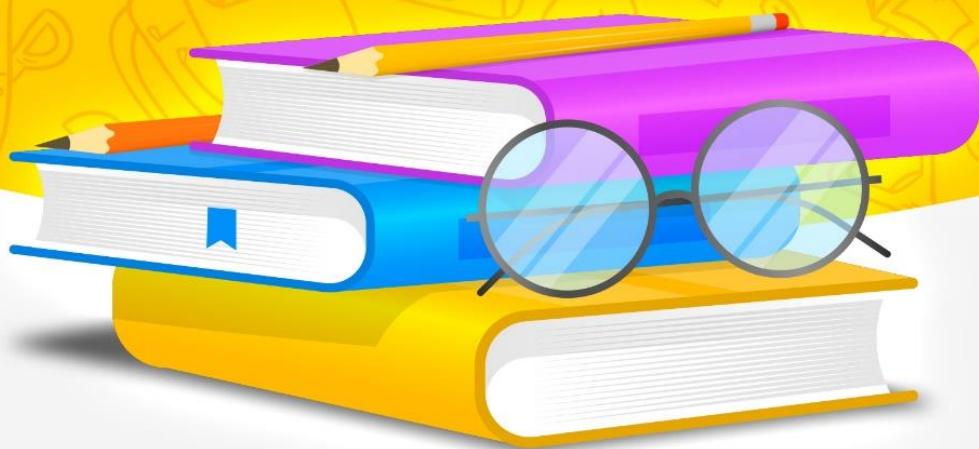




آکادمی کنکور دورخیز



دانلود رایگان جزوه درسی، گام به گام، نمونه سوال، مشاوره کنکور و برنامه ریزی درسی

www.dourkhiz.com

جبر و معادله

فصل

- ۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
- ۲ معادلات درجه دوم
- ۳ معادلات گویا و ننگ
- ۴ قدر مطلق و ویزگی‌های آن
- ۵ آشنایی با هندسه تحلیلی



ارامگاه دانیال نبی در شهر شوش از استان خوزستان. این آرامگاه دارای گنبدی مخروطی به سبک اورچین (گبید مخروطی پله‌ای سکل) است که کنگره‌های روی پله‌ها تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند.

دانلود جزو
مونه سوال
نمایه کام

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

درس

در سال قبل با مفهوم دنباله و دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدید و می‌دانید که مجموعه اعداد طبیعی $1, 2, 3, \dots$ یک دنباله حسابی با قدر نسبت یک می‌باشد. چگونگی بدست آوردن مجموع اعداد طبیعی 1 تا n می‌تواند الگوی مناسبی باشد تا به یک دستور برای محاسبه مجموع جملات هر دنباله حسابی برسیم.

فعالیت

تعدادی دگمه داریم که به شکل رو به رو آرایش شده‌اند. تعداد این دگمه‌ها چندتاست؟

۱ یکی از راه‌ها، شمارش تعداد دگمه‌ها در هر ردیف است که مجموع آن برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

۲ راه دیگر استفاده از شهود و تجسم، با استفاده از شکل باین، است.

در این شکل تعداد ردیف‌ها 10 و تعداد دگمه‌های در هر ردیف 10 است. پس تعداد کل دگمه‌ها برابر 100 است و چون تعداد دگمه‌های آبی و قرمز برابر است پس:

$$\frac{\text{تعداد کل دگمه‌ها}}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

۳ برای محاسبه مجموع اعداد طبیعی 1 تا n مراحل زیر را انجام داده‌ایم. چگونگی هر مرحله را توضیح دهید.

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\ S &= n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 \\ 2S &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{\text{تا } n} \end{aligned}$$

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

این اعداد طبیعی 1 تا n را نشاند و ترتیب صعودی سینه n تا 1 را ترتیب معکوس نشانند. این اعداد $n+1$ تا $n+1$ را نشانند و ترتیب صعودی سینه $n+1$ تا $n+1$ را ترتیب معکوس نشانند. مجموع این دو مجموعه $n(n+1)$ است.



برای شهاده در کمک متفق نظر داشتم

۳ فصل اول: جبر و معادله

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

❖ مثال: روی محیط دایره‌ای 20 نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را بدست آورید.

❖ حل: نقطه اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم در این صورت 19 وتر پیدید می‌آید. با وصل نقطه دوم به نقاط دیگر (به غیر از نقطه اول) 18 وتر بدست می‌آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم. 17 وتر حاصل می‌شود. با ادامه این عمل تعداد وترهای حاصل برابر است با:

$$19 + 18 + 17 + \dots + 2 + 1 = \frac{19}{2} (1+19) = 190$$

❖ تذکر: این مسئله را با استفاده از ترکیبیات نیز می‌توان حل کرد. آن را حل کرده و دو روش را با هم مقایسه کنید.

فعالیت

خواهد بود

دنباله حسابی زیر را، که در آن a جمله اول، d قدر نسبت و n تعداد جملات آن است، در نظر بگیرید.

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-2)d, a+(n-1)d$$

مجموع جملات این دنباله را S_n می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-2)d) + (a+(n-1)d)$$

حال، جملات S_n را از آخر به اول بنویسید و با جمع جملات متناظر دو عبارت اخیر، $2S_n$ را بدست آورید. نتیجه خواهد گرفت:

$$\begin{aligned} S_n &= a + (a+d) + \dots + (a+(n-1)d) \\ S_n &= a + (n-1)d + a + (n-2)d + \dots + a \\ 2S_n &= (a+a+(n-1)d) + (a+a+(n-2)d) + \dots + (a+a+(n-1)d) \\ 2S_n &= n[2a + (n-1)d] \end{aligned}$$

❖ مثال: مجموع صد جمله اول دنباله حسابی $\dots, 3, 7, 11, 15$ را بدست آورید.

❖ حل: جمله اول 3 ، تعداد جمله‌ها 100 و قدر نسبت جملات 4 است. با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی می‌توان نوشت:

$$S_{100} = \frac{100}{2} [(2 \times 3) + (99 \times 4)] = 50 \times 40 \times 2 = 2000$$

کاردر کلاس

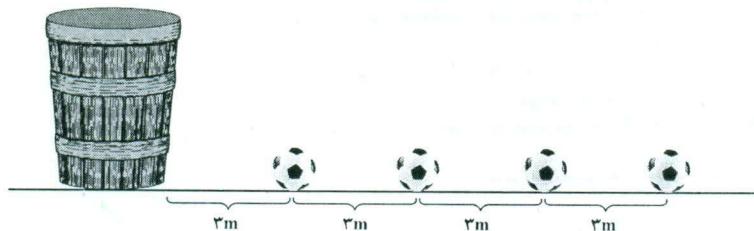
۱ نشان دهد در یک دنباله حسابی اگر a_1 و a_n به ترتیب جملات اول و آخر باشند آنگاه :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a_1 + (a_1 + (n-1)d)] = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

۲ مجموع همه عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را بدست آورید.

$$\frac{12+14+16+\dots+94}{a_n} \quad n = \frac{94-12}{4} = 22 \quad S_n = \frac{22}{2} \times [12+94] = 1188$$

* مثال : در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هریک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است (شکل زیر). دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده توپ اول را بردارد و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی بدو و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دونده در بیان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمیعاً چند توپ در سبد انداخته است؟



* حل : دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید مسافت $3+3=6$ متر را طی کند؛ برای توپ دوم نیز باید ۱۲ متر و برای توپ سوم ۱۸ متر و ... طی کند. بنابراین مسافت‌های طی شده در این مراحل، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدر نسبت ۲ می‌دهد. اگر n تعداد توپ‌های انداخته شده در سبد باشد از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی داریم :

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$918 = \frac{n}{2}(12 + (n-1)6) \Rightarrow 306 = n(n+1) \Rightarrow 17 \times 18 = n(n+1) \Rightarrow n = 17$$

مجموع جملات دنباله هندسی

فعالیت

۱ قدر نسبت و مجموع n جمله اول دنباله هندسی زیر را بدست آورید. ($a \neq 0$)

$$a, a, a, \dots, a \quad q=1 \quad S_n = na$$

۲ دنباله هندسی زیر را در نظر بگیرید. ($q \neq 1$)

$$a, aq, aq^2, \dots$$

الف) جمله n ام دنباله چیست؟

$$a_n = aq^{n-1}$$

ب) فرض می کنیم مجموع n جمله اولیه دنباله هندسی S_n باشد:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

$$S_n q = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

طرفین رابطه را در q ضرب می کنیم:

اگر $S_n - S_n q$ را تشکیل دهیم، پس از ساده سازی، نتیجه می گیریم:

$$S_n = a \frac{1-q^n}{1-q}$$

کار در کلاس

مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید.

$$S_{10} = \frac{1}{8} \times \frac{1 - (\frac{1}{4})^{10}}{1 - \frac{1}{4}} \approx 0.259788$$

مثال: برای محافظت از تابش خط‌رنگ مواد رادیوакتیویته لایه‌های محافظی وجود دارد که شدت تابش پرتوها پس از عبور از هر یک از آنها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد خط‌رنگ دست کم ۹۷ درصد کاهش یابد؟

حل: اولین لایه، شدت تابش را نصف می‌کند. دومین لایه باز این تابش را نصف می‌کند $(\frac{1}{2})$ و ... بدین ترتیب دنباله‌ای از اعداد به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$$

این یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ است. حال می‌خواهیم چند جمله از این دنباله باید جمع شود تا حاصل حداقل ۹۷ درصد شود.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

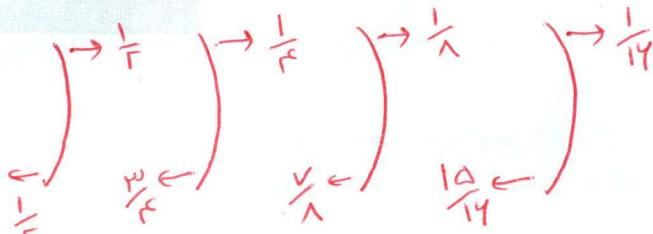
$$\frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{3}{100} \Rightarrow 2^n \geq \frac{100}{3} \approx 33.3$$

با آزمایش اعداد طبیعی در نامعادله اخیر، و اینکه $2^6 = 64$ در می‌باییم که حداقل مقدار n برای برقراری نامساوی فوق برابر با ۶ خواهد بود. پس تعداد لایه‌ها باید حداقل شش تا باشد.

روش تصویری

اسعد



$$\frac{1(1-\gamma^4)}{1-\gamma} = \gamma^4 - 1$$

کار در کلاس

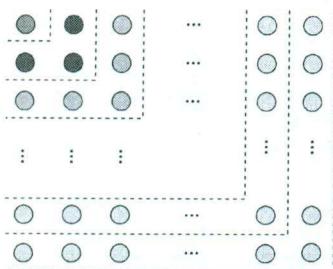
در داستان مختصر شطرنج اگر در خانه اول یک دانه گندم و در خانه دوم دو دانه گندم و به همین صورت در هر خانه دو برابر خانه قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم :

الف) این جائزہ چند گرم می شود؟
 ب) نشان دهید جائزہ او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تُن خواهد شد. حوالے ۱۰۰۰ اعلیار در تُن پر اپر استجا ۱۰۰۰ گرم

$$a=1 \quad q = r \quad n = 4^c \quad S_n = a \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) \rightarrow 1 \left(\frac{1 - r^{4^c}}{1 - r} \right) = S_{4^c}$$

$$S_{4^c} = r^{4^c} - 1 > r^{4^c} = (r^c)^4 > 100^4 = 10^{18}$$

تہذیب



- ۱** در دنیاله حسابی $\dots, 11, 8, 5$ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم
 $a=a$ $s_n > 493$ $[10 + 3(n-1)] > 493$ $n > 15$
 $d=3$ تا حاصل آن از 493 بیشتر شود؟ $n_1 = -\frac{v}{d} \Rightarrow n_1 = 18$
 $\Delta = 11881$ $n_2 = \frac{-v}{d} \Rightarrow n_2 = 19$
۲ الف) به کمک شکل رویه رو حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید.

۳ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می شود؟ **صفر و هر**

۴ در جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره های زوج ۱۵۰ می باشد.

۵) جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از قبل را رنگ می کنیم. پس از دستت کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع

برای عدد حقیقی $a \neq 1$ و عدد طبیعی n :

الف) حاصل عبارت زیر را به دست آوردید.

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که :

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \cdots + a^1 + a^0)$$

۱- این مسئله به نام مسئله شترنج معروف است و ابوریحان بیرونی با روش خاص خود آن را حل کرده است. (ترجمه میزان الحکمة، ص ۷۷)

$$1 + r + dr + \dots + (rn - 1) = n^r$$

$$a=1 \quad d=r \quad n=r \quad s_n = \frac{n}{r} [ra + (n-1)d]$$

$$s_n = \frac{n}{r} [r + (n-1) \times r] = \frac{n}{r} \times rn = n^r$$

$$10^0, 10^1, \dots, 99^1 \quad a=10^0 \quad a_n = 99^1 \quad n = \frac{99^1 - 10^0}{r} = 10^0 + 1 = 10^1$$

$$s_n = \frac{n}{r} [ra + (n-1)d] = \frac{10^0}{r} [ra \times 10^0 + (10^0 - 1) \times r] = 10^0 \times 10^1$$

$$\downarrow s_n = \frac{n}{r} [ra + (n-1)d] \quad (r \text{ متساوية})$$

$$10^0 + 10^1 d = \frac{10^0}{r} [ra + 10^0 d] \rightarrow [ra + 10^0 d = ra + 10^0 d] \rightarrow 10^0 d = 10^0$$

$$a + a + rd + a + 2rd + \dots + a + (n-1)d = nr^0 \quad \text{فرنك} \rightarrow$$

$$[10^0 + 9^0 d = nr^0] \rightarrow ra + 10^0 d = rv$$

$$r \begin{cases} ra + nr^0 d = rv \\ ra + 10^0 d = rv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ra + nr^0 d = rv \\ -ra - 10^0 d = -rv \end{cases} \rightarrow \frac{-ra - 10^0 d = -rv}{rd = r} \rightarrow d = 10^0$$

$$ra + 10^0 d = rv \quad ra + rv = rv \quad ra = 0 \quad a = 0$$

$$a_n = r^{n-1} \quad 1, r, r^2, \dots \quad (r \text{ متساوية})$$

$$s_n = a \left[\frac{1 - r^n}{1 - r} \right] \quad s_n = ra \quad \left[\frac{1 - r^n}{1 - r} \right] = ra$$

$$r^n - 1 = ra \quad r^n = r \cdot a \quad r^n = r^1 \quad n = 1,$$

$$\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}, \dots \quad s_n = a \left[\frac{1 - r^n}{1 - r} \right] \quad (r \text{ متساوية})$$

$$s_n > \frac{99}{100} = \frac{1}{r} \left[\frac{1 - (\frac{1}{r})^n}{1 - \frac{1}{r}} \right] > \frac{99}{100} \quad 1 - (\frac{1}{r})^n > \frac{99}{100}$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)^n < \frac{1}{100} \rightarrow r^n > 100 \quad n \text{ متساوية} = v$$

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \begin{cases} a=1 \\ q=a \\ n=n \end{cases} \quad s_n = a \left[\frac{1 - q^n}{1 - q} \right] \quad (q \text{ متساوية})$$

دانلود جزوه
نمودارهای
گام به گام

$$s_n = \left[a + a^2 + \dots + a^n \right]$$

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

$$1 - a^n = (1 - a)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$$



درس

معادلات درجه دوم

در سال‌های قبل با معادله‌های درجه اول و درجه دوم و حل آنها آشنا شده‌اید. صورت کلی معادلات درجه دوم

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{به صورت } ax^2 + bx + c = 0 \text{ است (} a \neq 0 \text{)} \quad \text{که جواب‌های آن، در صورت وجود، از رابطه}$$

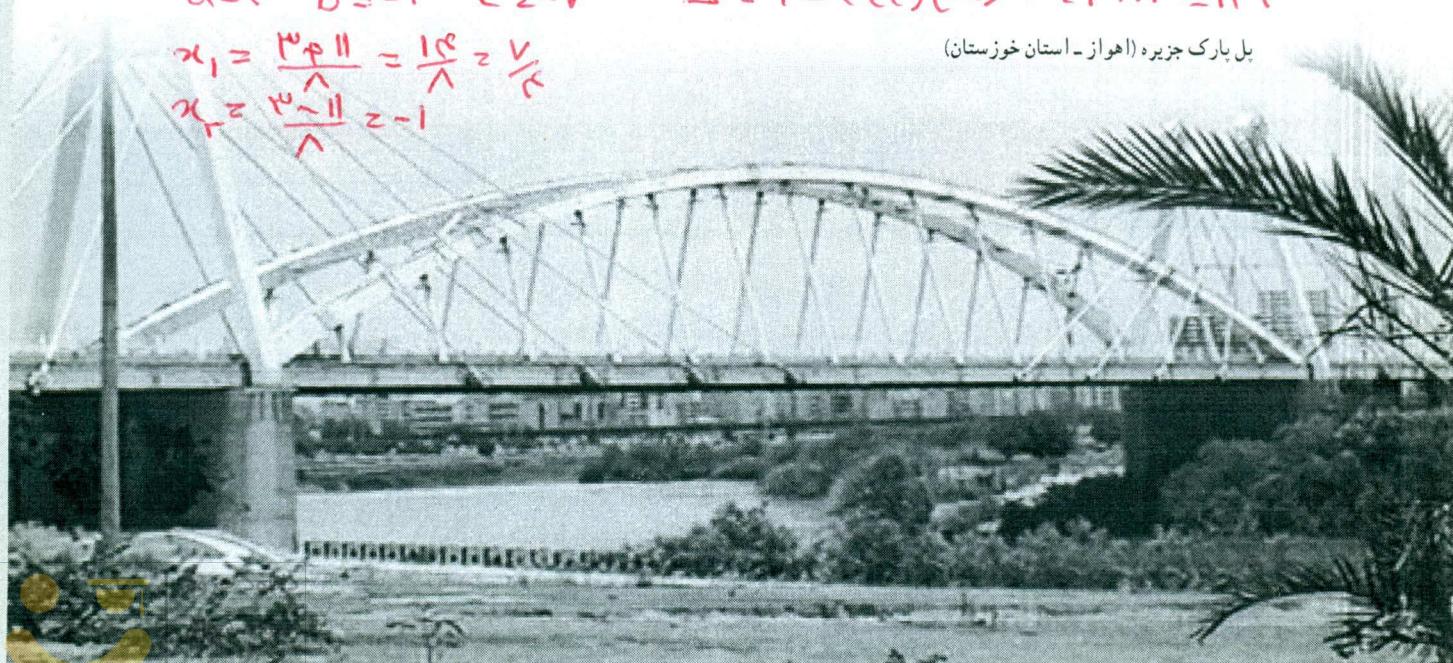
به دست می‌آید. اینک، در این بخش، با برخی از انواع معادلات درجه دوم، روابط بین ریشه‌ها و ضرایب این

معادلات و دیگر نکات تكمیلی آشنا خواهید شد.

کار در کلاس

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 5x + 2 = 0 \\ & a = 3, b = -5, c = 2 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 \\ & x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{6} = 1 \quad \text{معادله } 3x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ را حل کنید.} \\ & x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ & x = -1 \rightarrow 3(-1)^2 - 5(-1) + 2 = 0 \quad m - 3 = 0 \quad m = 3 \quad \text{اگر } x = -1 \text{ یک ریشه معادله } 3x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ باشد، ریشه دیگر کدام است؟} \\ & 4x^2 - 4x - 7 = 0 \quad m - 3 = 0 \quad m = 3 \\ & a = 4, b = -4, c = -7 \quad \Delta = 16 - 4(4)(-7) = 16 + 112 = 128 \\ & x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{128}}{8} = \frac{4 + 8\sqrt{2}}{8} = \frac{4}{8} + \frac{8\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{2} + \sqrt{2} \\ & x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{128}}{8} = \frac{4 - 8\sqrt{2}}{8} = \frac{4}{8} - \frac{8\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{2} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

بل بارک جزیره (اهواز - استان خوزستان)



روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

فعالیت

۱ جدول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

$ax^2 + bx + c = 0$	مقدار هر ریشه x_1 و x_2	(S) جمع ریشه‌ها	(P) ضرب ریشه‌ها	a	b	c	$\frac{-b}{a}$	$\frac{c}{a}$
$2x^2 - 5x + 2 = 0$	۱ $\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{2}$	۲	-۵	۲	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
$4x^2 - 3x - 7 = 0$	-۱ $\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-7}{4}$	۴	-۳	-۷	$\frac{3}{4}$	$\frac{-7}{4}$
$x^2 - 2x + 1 = 0$	۱ ۱	۲	۱	۱	-۲	۱	۱	۱
$5x^2 + 6x - 8 = 0$	-۲ $\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{8}{5}$	۵	۶	-۸	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{5}$

۲ الف) در جدول بالا بین جمع ریشه‌ها و ضرایب هر معادله چه ارتباطی مشاهده می‌کنید؟

ب) در جدول بالا بین حاصل ضرب ریشه‌ها و ضرایب معادله چه ارتباطی وجود دارد؟

۳ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های S و P به ترتیب حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، نشان دهید:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dots = \frac{-b}{a}$$

$$P = x_1 x_2 = \left(-\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(-\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$b^2 - \Delta = b^2 - b^2 + 4ac = 4ac \quad \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

به طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد این روابط برقرار است.

$$S = \frac{-b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$

مثال: اگر $x = -1$ یک ریشه معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد ریشه دیگر و مقدار m را با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها بدست آورید.

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow (-1)x_2 = \frac{-7}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{7}{4}$$

حل: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله باشند، داریم:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow -1 + \frac{7}{4} = \frac{m}{4} \Rightarrow m = 3$$

از طرفی با استفاده از جمع ریشه‌ها داریم:

فعالیت

فصل اول: جبر و معادله ۹

- ۱ برای تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌های آن 2 و -3 باشند راه حل زیر ارائه شده است.
مراحل حل را توضیح دهید.

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

- ۲ اگر $x_1 = \alpha$ و $x_2 = \beta$ ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، با استفاده از روش قسمت قبل معادله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} x = \alpha \\ x = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - \alpha) = 0 \\ (x - \beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow x^2 - (\underbrace{\alpha + \beta}_{S})x + \underbrace{\alpha\beta}_{P} = 0$$

به طور کلی اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشند، آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

کار در کلاس

$$S = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4 \quad P = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad x^2 - 4x + 1 = 0$$

* مثال: محیط یک مستطیل 33 سانتی‌متر و مساحت آن 65 سانتی‌متر مربع است. ابعاد مستطیل را به دست آورید.

* حل: فرض کنید طول و عرض مستطیل به ترتیب x_1 و x_2 باشند، داریم:

$$x_1 + x_2 = \frac{33}{2}, \quad x_1 x_2 = 65$$

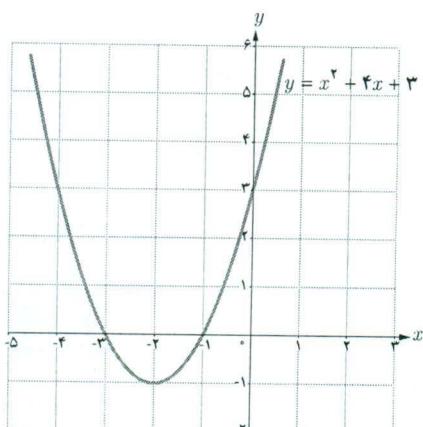
معادله درجه دومی تشکیل می‌دهیم که در آن $S = \frac{33}{2}$ و $P = 65$ باشد و آن را حل می‌کنیم.

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{33}{2}x + 65 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 33x + 130 = 0$$

از حل معادله اخیر $x_1 = 1$ یا $x_2 = \frac{13}{2}$ به دست می‌آید؛ در نتیجه، طول و عرض مستطیل به ترتیب 1 و $\frac{13}{2}$ خواهد بود.

صفرهای تابع

فعالیت



نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 + 4x + 3$ در شکل رو به رو رسم شده است.

۱) معادله $f(x) = 0$ را حل کنید و جواب‌های آن را به دست آورید.

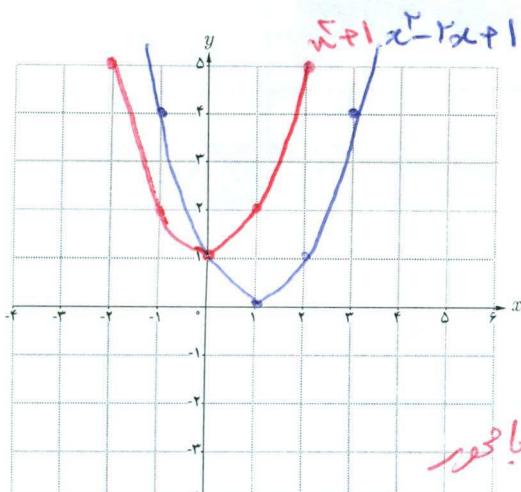
$$\begin{aligned} x^3 + 4x + 3 &= 0 \\ (x+1)(x+3) &\geq 0 \\ x &= -1 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

۲) محل تلاقی نمودار تابع f با محور طول‌ها چه رابطه‌ای با جواب‌های معادله $f(x) = 0$ دارد؟ **حل کنیم** نمودار با محور طول‌ها دقتاً جواب‌های معادله $f(x) = 0$ هستند.

صفرهای تابع

برای هر تابع f جواب‌های معادله $f(x) = 0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع f می‌نامیم. به عبارت دیگر، صفرهای تابع f آن مقادیری از x (در دامنه f) هستند که به ازای آنها $f(x)$ برابر صفر می‌شود. اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم صفرهای f طول نقاط تلاقی نمودار با محور x هاست.

کار در کلاس



۱) نمودار سهمی‌های $f(x) = x^2 - 2x + 1$ و $g(x) = x^2 + 1$ را رسم کنید.

۲) با توجه به نمودارهایی که رسم کردید در مورد جواب‌های معادله‌های $f(x) = 0$ و $g(x) = 0$ چه می‌توان گفت؟

معادله $f(x) = 0$ جواب ندارد **جواب $g(x) = 0$ دارد** **حل بحث ریاضی با محور طول** **نمودار دو معادله دارد** **جواب $f(x) = 0$ دارد** **جواب $g(x) = 0$ ندارد**

فصل اول: جبر و معادله ۱۱

مثال: اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند نشان دهید

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

حل: از آنجا که x' و x'' صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند پس جوابهای معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند و

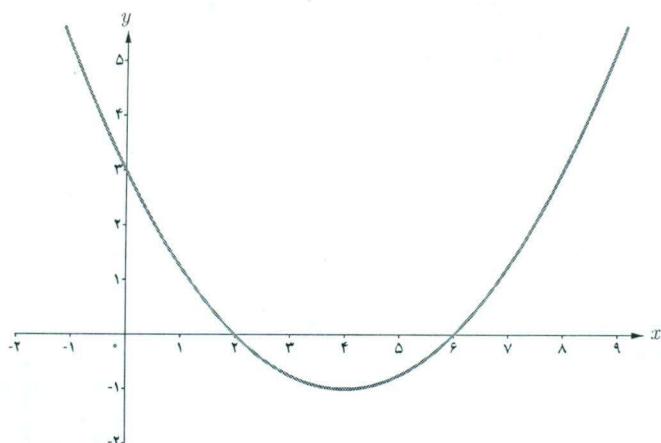
داریم:

$$a(x - x')(x - x'') = a(x^2 - (x' + x'')x + x'x'')$$

$$= a(x^2 - Sx + p)$$

$$\begin{aligned} &= a[x^2 - \left(\frac{-b}{a}\right)x + \frac{c}{a}] \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

مثال: اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد ضابطه سهمی را مشخص کنید.



روش اول: از آنجا که $x' = 2$ و $x'' = 6$ صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند با استفاده از رابطه‌ای که در مثال قبل آمده

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - 2)(x - 6)$$

است می‌توان نوشت:

می‌دانیم نمودار تابع از نقطه $(3, 0)$ می‌گذرد پس مختصات این نقطه در ضابطه تابع صدق می‌کند و داریم.

$$3 = a(0 - 2)(0 - 6) \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

معادله سهمی به صورت $y = \frac{1}{4}(x - 2)(x - 6)$ می‌باشد که پس از ساده‌سازی به صورت $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$ نوشته می‌شود.

روش دوم: از آنجا که $f(0) = 3$ می‌توان نوشت $f(x) = ax^2 + bx + 3$; حال از روابط بین صفرهای تابع استفاده می‌کنیم.

$$\frac{c}{a} = 12 \Rightarrow \frac{3}{a} = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

از طرفی از آنجا که $b = -2a$ و $a = \frac{1}{4}$ پس $b = -\frac{1}{2}$ در نتیجه

کاردر کلاس

هر یک از شکل‌های زیر نمودار یک سهمی به معادله کلی
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ است.

با توجه به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ نمودار یا نمودارهای متناظر با هر یک از ویژگی‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) دو ریشه مثبت دارد. (شکل‌های ۸ و ۹)

(ب) دو ریشه منفی دارد.

(پ) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد.

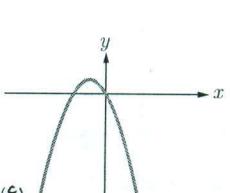
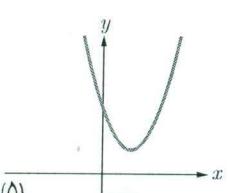
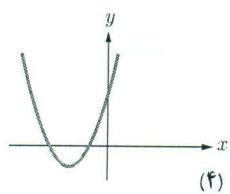
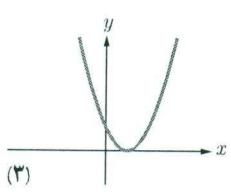
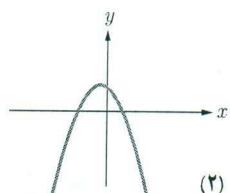
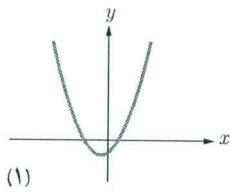
(ت) ریشه ندارد.

(ث) ریشه ندارد و دارای ماکزیمم است.

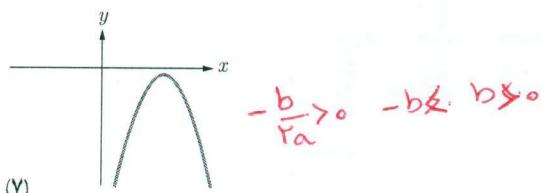
(ج) یک ریشه دارد.

(چ) حاصل جمع ریشه‌ها مثبت است.

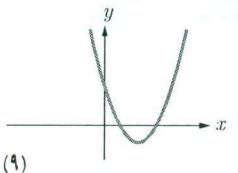
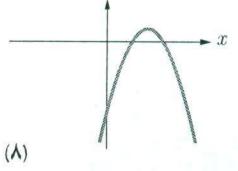
(ح) حاصل جمع ریشه‌ها منفی است.



با توجه به نمودارهای داده شده مقابل، جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.



شماره شکل	ویژگی
۹	تعداد صفر $f(x) = 0$
۸	علامت a
۷	علامت b
۶	علامت c
۵	
۴	
۳	
۲	
۱	



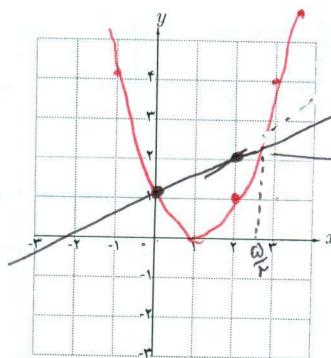
* تذکر: ستون نظیر شکل پنجم را با توجه به استدلال زیر کامل کرده‌ایم. از آنجا که منحنی سهمی محور x را قطع نکرده است پس تعداد صفرهای تابع متناظر آن صفر خواهد بود؛ و چون شاخه‌های منحنی به سمت بالا هستند علامت a مثبت است. از آنجا که منحنی، محور y را در نقطه با عرض مثبت قطع می‌کند پس $c > 0$ و طول نقطه مینیمم تابع، مقداری مثبت است. پس $\frac{-b}{2a} > 0$ و از مثبت بودن a و رابطه اخیر نتیجه می‌شود $b < 0$.

$$\begin{aligned}
 (n-1)^2 &= \frac{1}{\Gamma} n+1 \\
 x^2 - 2n + 1 &= \frac{1}{\Gamma} n + 1 \\
 x^2 - \frac{\Delta}{\Gamma} n &= 0 \\
 n(n - \frac{\Delta}{\Gamma}) &= 0 \quad \Rightarrow \quad n = 0 \\
 n &= \frac{\Delta}{\Gamma}
 \end{aligned}$$

۱۴

روش هندسی حل معادلات

فعالیت



۱ معادله $(x-1)^2 = \frac{1}{2}x + 1$ را حل کنید. **برای این طریق از روش**

۲ نمودار دو تابع $y = (x-1)^2$ و $y = \frac{1}{2}x + 1$ را رسم کنید.
و هر دو تابع در نقاط $x = 1$ و $x = 2$ برابر باشند.

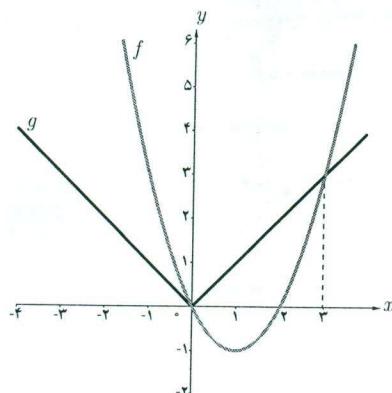
چه ارتباطی بین ریشه‌های معادله $(x-1)^2 = \frac{1}{2}x + 1$ و

طول‌های نقاط تلاقی نمودارها وجود دارد؟ **ریشه‌های نمودار دو تابع** طول‌های نقاط تلاقی نمودارها هستند

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ است و بر عکس، هر جواب این معادله طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است.
این روش حل معادله را، که از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است، روش هندسی (نموداری) حل معادلات می‌نامیم.

* مثال : به روش هندسی معادله $|x| = x^2 - 2x$ را حل کنید.

* حل : با فرض $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = |x|$ ، نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم :



$$x = 3, \quad x = 0$$

با توجه به نمودارهای دو تابع طول نقاط تلاقی دو نمودار عبارت اند از :
که جواب‌های معادله $|x| = x^2 - 2x$ می‌باشند.



دانلود جزوه
نمونه سوال

dourkhiz.....

۱۳ فصل اول: جبر و معادله

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ \hline x - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - - \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline x^2 - 4x \\ - - \\ x^2 - 2x \\ \hline - 2x + 4 \\ - - \\ - 2x + 4 \\ \hline \end{array}$$

مثال: اگر $x=2$ یکی از صفرهای تابع $p(x)=x^3-x^2-4x+4$ باشد سایر صفرهای تابع را در صورت وجود باید.

حل: از آنجا که $x=2$ یک صفر تابع $p(x)$ است می‌توان نشان داد که $p(x)$ عاملی به صورت $x-2$ دارد، پس با تقسیم $p(x)$ بر $x-2$ عامل دیگر $p(x)$ را می‌باییم. $p(x)=0$. آنگاه از حل معادله $p(x)=(x-2)(x^2+x+2)=0$ می‌توان نوشت $(x-2) = 0$ یا $x=2$.

$$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2+x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

صفرهای تابع p برابر $-2, 2, 1$ می‌باشند.



$$\begin{array}{r} x^3 + kx^2 - n - 2 \mid x^2 + 1 \\ \hline x^3 - x^2 - n - 2 \end{array} \rightarrow (n-1)(n+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ n=-1 \end{cases}$$

مقدار k را چنان باید که یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^3+kx^2-x-2$ باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ 0 &= -1 + kx + 1 - x \\ k &= +2 \end{aligned}$$

مثال: صفرهای تابع f با ضابطه $f(x)=(x^2-1)^t+(x^2-1)^{-t}$ را به دست آورید.

حل: هر چند معادله $f(x)=0$ از درجه چهار است اما می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب آن را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد. با فرض $t^2=x$, معادله به صورت $x^2+t^2-2=0$ در می‌آید. اکنون با حل این معادله و یافتن t با استفاده از عبارت $t^2=1$ مقادیر x را می‌باییم.

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ یا } t = -2$$

$$\begin{cases} t=1 \Rightarrow x^2-1=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ t=-2 \Rightarrow x^2-1=-2 \Rightarrow x^2=-1 \end{cases}$$

غیرقابل قبول

پس تنها صفرهای قابل قبول برای تابع f , $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ می‌باشد.

برخی از معادلات را می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب، به یکی از انواع معادلاتی که می‌شناسیم تبدیل کرد و پس از حل آن و با رجوع به تغییر متغیر، مقادیر مجهول اصلی معادله اولیه را یافت.



$$x^3 - 10x^2 + 14 = 0 \quad w=t$$

همه صفرهای تابع $f(x)=x^3-10x^2+14=0$ را به دست آورید.

$$t^3 - 10t^2 + 14 = 0$$

$$(t-1)(t-2) = 0$$

$$\begin{aligned} t &= 1 & w &= 1 \\ t &= 2 & w &= 2 \end{aligned}$$

$$w^3 - 10w^2 + 14 = 0$$

$$S = \frac{1}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = 1 \quad P = \frac{1}{\alpha} \times \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\alpha^2 - S\alpha + P = 0 \quad \alpha^2 - 1\alpha + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

$$\alpha, \gamma \alpha \quad S = 1\alpha \quad P = \gamma \alpha^2$$

$$\alpha^2 - S\alpha + P = 0 \quad \alpha^2 - 1\alpha + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

فصل اول: جبر و معادله ۱۵

مسئله جامعه ارجواب دار

(ب)

تمرین

۱) معادله درجه دومی بنویسید که:

الف) ریشه های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند. بالای مختصر

ب) یکی از ریشه های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟).

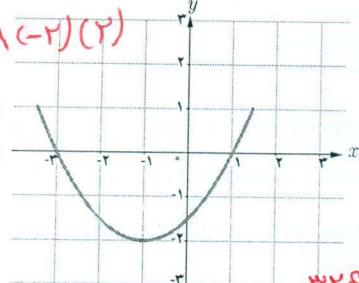
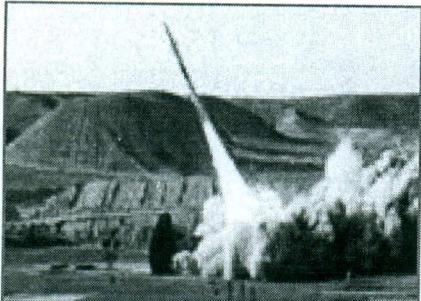
۲) در هر یک از شکل های زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع (x) و

$$y = a(n-1)(n+3)$$

$$\begin{cases} n=1 \\ y=-2 \end{cases} \quad -P=a(-2)(2) \quad a=\frac{1}{4}$$

$$P(n) = \frac{1}{4}(n-1)(2n+3)$$

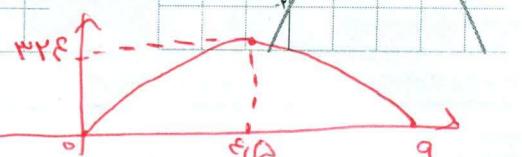
$$P(n) = \frac{1}{4}n^2 + n - \frac{3}{4}$$



ضابطه آن را مشخص کنید.

$$\begin{cases} n=0 \\ y=-2 \end{cases} \quad -2=4a \quad a=-\frac{1}{4}$$

$$P(n) = -\frac{1}{4}(n-2)^2 = -\frac{1}{4}n^2 + 2n - 4$$



(الف)

نمودار درست

۳) یک موشک با سرعت اولیه ۱۴۴ متر بر ثانیه از زمین به فضا پرتاب می شود.

ارتفاع این موشک (h) در زمان t ، از رابطه $h(t) = -16t^2 + 144t$ بدست می آید.

ارتفاع ماکریم آن و همچنین زمانی را که موشک به زمین برخورد می کند بدست آورید.

$$t_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-144}{-32} = \frac{9}{2} \quad h_{max} = -16 \times \frac{81}{4} + 144 \times \frac{9}{2}$$

$$t(-14t+144)=0 \rightarrow t=0 \quad t=9 \quad t=9$$

۴) صفرهای توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$f(x) = x^2 - 4x \quad \text{(الف)} \quad \begin{cases} n=0 \\ n=4 \end{cases} \quad n = \pm 2$$

$$g(x) = 2x^2 + x + 3 \quad \text{(ب)} \quad \begin{cases} n=0 \\ 2n^2 + n + 3 = 0 \end{cases} \quad \Delta < 0 \quad \text{رسانه حسنه ندارد}$$

$$h(x) = x^2 + 3x + 5 \rightarrow \frac{t^2}{a} + \frac{n}{b} t + \frac{c}{c} \quad \Delta = 9 - 4(1)(5) = -11 \quad \text{رسانه حسنه ندارد}$$

۵) معادلات زیر را حل کنید.

$$(x-\epsilon)(x+\epsilon) = 0 \quad (\epsilon-\epsilon)(\epsilon+\epsilon) = 0 \quad n = \pm 2$$

$$(\frac{x^2}{3}-2)^2 - 7(\frac{x^2}{3}-2) + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2 = t$$

$$(4-x^2)^2 - 7(4-x^2) + 6 = 0$$

$$4-n^2=t$$

$$4-n^2=t$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

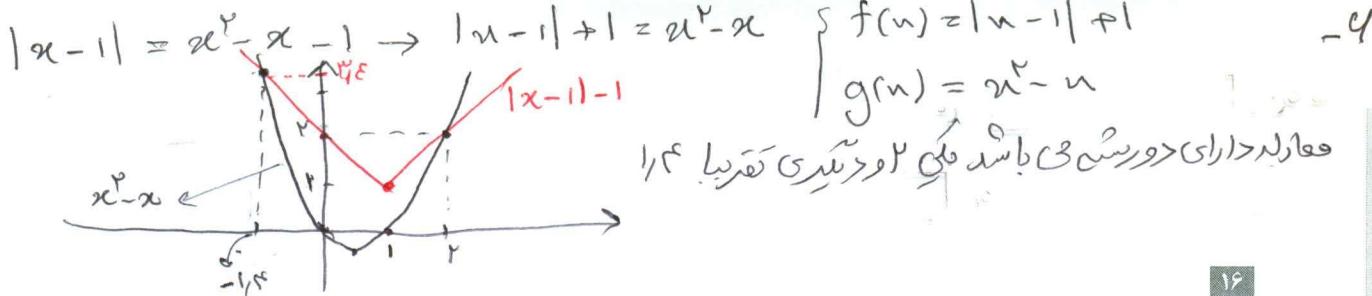
$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

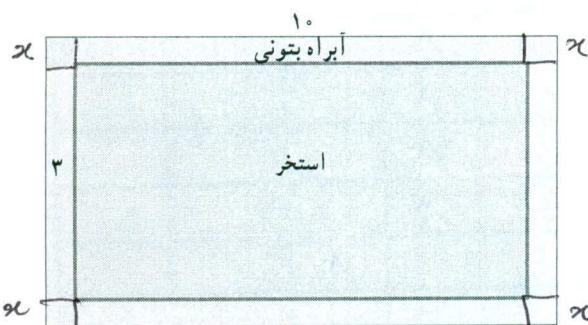
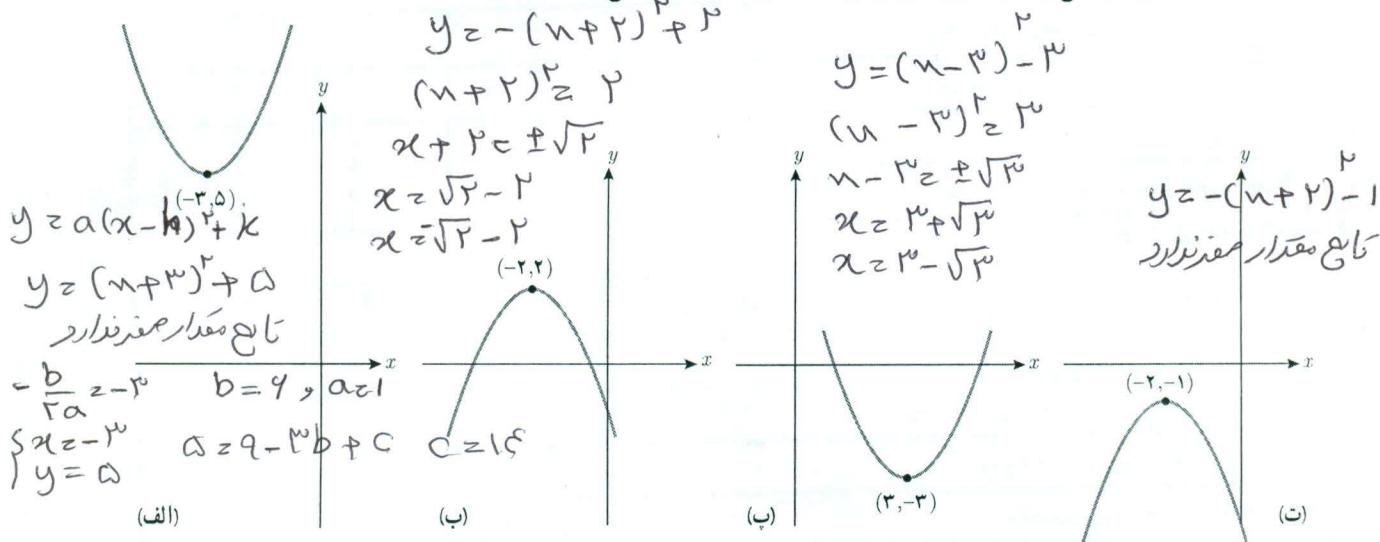
$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \Delta = 41$$



۶ تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x - 1| = x^3 - x$ را با استفاده از روش هندسی به دست آورید.

۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a| = 1$ است و نقطه رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطه تابع را مشخص کنید.



۸ یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول 10° و عرض 3 متر داریم که یک آبراه بتنی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای بهنای یکسان و مساحت 14 مترمربع باشد، پهنه‌ای آن را محاسبه کنید.

$$4x^2 + 20x + 4x = 14$$

$$4x^2 + 24x - 14 = 0$$

$$2x^2 + 12x - 7 = 0$$

$$\Delta = 144 + 4 \cdot 4 = 224$$

$$x = \frac{-12 + 14}{4} = \frac{1}{2} \quad x = \frac{-12 - 14}{4} = -7$$

۹ طول یک نوع کاشی یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشانیدن دیواری به مساحت $52/8$ مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی

$$\begin{aligned} & \text{چند سانتی‌متر است؟} \\ & 21m^2 = 21 \times 100 \text{ cm} \\ & 2000 \text{ کاشی} \end{aligned}$$

$$S = n(n+1)$$

$$S = n^2 + n$$

$$2000S = 2000(n^2 + n)$$

$$1000n^2 + 2000n = 210000$$

$$n^2 + 2n - 210 = 0$$

$$n^2 + n - 100 = 0$$

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{-1 + \sqrt{41}}{2} = 5 \\ n_2 &= \frac{-1 - \sqrt{41}}{2} = -\frac{42}{2} = -21 \end{aligned}$$



معادلات گویا و گنگ

معادلات شامل عبارات گویا

حل یک مسئله



در یک مغازه ماهی‌های تزیینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی 200 کیلوگرم محلول آب نمک 4 درصدی ساخته است. او چگونه باید این محلول را به غلظت مورد نظر برساند؟ برای حل این مسئله سه حالت مختلف فرض می‌کنیم. ممکن است نمک به اندازه کافی وجود داشته باشد و یا نمک در مغازه موجود نباشد و یا نمک به میزان کافی وجود نداشته باشد. در هر حالت می‌توان مسئله را مورد بررسی قرار داد.

حالت اول: فرض کنیم نمک به اندازه کافی موجود باشد.

ابتدا تعیین می‌کنیم در محلول 4 درصدی چند کیلوگرم نمک وجود دارد:

$$200 \times \frac{4}{100} = 8$$

حالا اگر بخواهیم برای رساندن این محلول به محلول 7 درصدی x کیلوگرم نمک به محلول بیفزاییم، وزن نمک $8+x$ و وزن کل محلول $200+x$ و نسبت میزان نمک موجود به کل محلول برابر $\frac{8+x}{200+x}$ خواهد بود. از آنجا که این نسبت باید 7 درصد باشد تناسب زیر برقرار خواهد بود:

$$\frac{x+8}{200+x} = \frac{7}{100}$$

برای حل این معادله که شامل عبارت گویا است، طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها یعنی $(200+x)$ ضرب می‌کنیم.

$$100(x+8) = 7(200+x)$$

از حل این معادله خواهیم داشت: $x = 600 - 93x$ و در نتیجه $x = \frac{600}{93}$

بنابراین تقریباً 6 کیلو و 451 گرم نمک باید به محلول اضافه شود تا محلول 7 درصد نمک به دست آید.

حالت دوم: اگر نمک در مغازه موجود نباشد.

در این حالت باید y کیلوگرم از آب محلول را تبخیر کنیم تا درصد نمک محلول خود به 7 برسد. واضح است که میزان نمک محلول کم نخواهد شد. در این حالت معادله مورد نظر به صورت زیر خواهد بود. (چرا؟)

$$\frac{8}{200-y} = \frac{7}{100}$$

از حل این معادله خواهیم داشت $(y=200-7\cdot 100) = 140$ و از آنجا $\frac{600}{7} = y$ و این بدین معنی است که کارگر باید با تبخیر 85 کیلو و 140 گرم از آب محلول به غلظت مورد نظر برسد.

کار در کلاس

در مسئله ماهی‌های تزیینی حالت سومی هم وجود داشت که نمک به اندازه کافی موجود نباشد. فرض کنیم در مغازه فقط 5 کیلوگرم نمک موجود باشد و کارگر ناچار است همان را به محلول بیفزاید. چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کند تا به محلول 7 درصدی نمک مورد نظر برسد؟

$$\begin{aligned} \text{وزن نمک} &= 13 \\ 200 + 13 &= 213 \\ 200 + y &= 213 \\ \frac{13}{200+y} &= \frac{7}{100} \\ 1420 - 7y &= 1300 \\ y &= \frac{1420 - 1300}{7} = 19,29 \end{aligned}$$

برای حل معادلات شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به دست آمده معادله را حل می‌کنیم. جواب به دست آمده باید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند (چرا؟)

همچنین ممکن است برخی از جواب‌ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت نداشته باشند که این جواب‌ها نیز مورد قبول نیستند.

مثال: معادله $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-4}$ را حل کنید.

حل: کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها برابر $(x-4)(x+2)$ است. (چرا؟)
با ضرب طرفین معادله در این عبارت داریم:

$$3x(x-2) + 2(x^2-4) = x(4x-4)$$

$$3x^2 - 6x + 2x^2 - 8 = 4x^2 - 4x$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ یا } x = -2$$

البته جواب $x = -2$ مورد قبول نیست. (چرا؟) **جواب $x = 4$ سُرِّ صفری کن**

(۳) ابتدا باعث مصالحه ساره ترجیعاً برای بدست می آوریم هماناً محیط زمین ۲۰۰ متر باشد سری جواب را در



$$2L + 2w = 2 \rightarrow L + w = 1 \rightarrow L = 1 - w$$

$$\frac{L}{w} = \frac{w+L}{L} \rightarrow \frac{1-w}{w} = \frac{1}{1-w}$$

$$(1-w)^2 = w \rightarrow w^2 - 3w + 1 = 0 \quad w_1 = \frac{3+\sqrt{4}}{2} \quad w_2 = \frac{3-\sqrt{4}}{2}$$

$$L = 1 - w = 1 - \frac{3-\sqrt{4}}{2} = 1 - \frac{1+\sqrt{4}}{2}$$

$$140 \times \frac{3-\sqrt{4}}{2} = 280 - 10\sqrt{4}$$

$$140 \times \frac{-1+\sqrt{4}}{2} = -10 + 10\sqrt{4}$$

$$\text{معادله } 3 = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} \text{ را حل کنید.}$$

(سبلایو طرف در $x^3 - 2x^2 - 4x + 15$ صفر می کشم)

$$1 + 2(n-2) = 3(n-2) \rightarrow 1 + 2n - 4 = 3n - 6 \rightarrow 14x + 15 = 0$$

$$3x^3 - 14x + 15 = 0 \quad \frac{1}{3}(3x-9)(3n-5) = 0$$

$$3x = 9 \quad n = 3$$

$$3x = 5 \quad x = \frac{5}{3}$$

خواندنی

در ریاضیات هندگامی نسبت طلایی پدید می آید که نسبت بخش بزرگ تر به بخش کوچک‌تر برابر نسبت مجموع دو بخش به بخش بزرگ‌تر باشد.

تعییر هندسی آن چنین است. طول مستطیلی به مساحت واحد که عرض آن یک واحد کمتر از طولش باشد.

مصریان سال‌ها قبیل از میلاد از این نسبت آگاه بودند و آن را در ساخت اهرام رعایت کرده‌اند. بسیاری از الگوهای طبیعی در بدن انسان نز این نسبت را دارا هستند.

روان‌شناسان بر این باورند که زیباترین مستطیل به جسم انسان مستطیلی است که نسبت طول به عرض آن برابر عدد طلایی باشد. دلیل این امر آن است که این نسبت در شبکه جسم انسان رعایت شده و هر مستطیلی که این نسبت را دارا باشد به چشم زیبا می‌آید.

در ساخت برج میدان آزادی تهران به ارتفاع ۶۲ و عرض ۴۲ متر نسبت طلایی تا حد زیادی رعایت شده است.

کتبیه پیشتون از دوره هخامنشی در کوشش برای این نسبت را عرض ۳ متر به عدد طلایی نزدیک است.

بکی از هنرهاي معماري در تخت جمشيد اين است که ارتفاع سردرها به عرض آنها و همین طور نسبت ارتفاع ستون‌ها به فاصله بين دو ستون نسبت طلایی است.

در بل ورسک، ارگ به، مقبره این‌سینا، میدان نقش جهان، مسجد شیخ لطف‌الله و خوشنویسی میرعماد حسنی از نسبت طلایی استفاده شده است. با جستجوی اینترنتی به مطالب خواندنی در این زمینه دست می‌یابید.

منبع: مبانی هنرهاي تجسمی، قسمت اول، شركت جاب و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۲

۱) اگر در یک مستطیل با طول L و عرض w داشته باشیم:

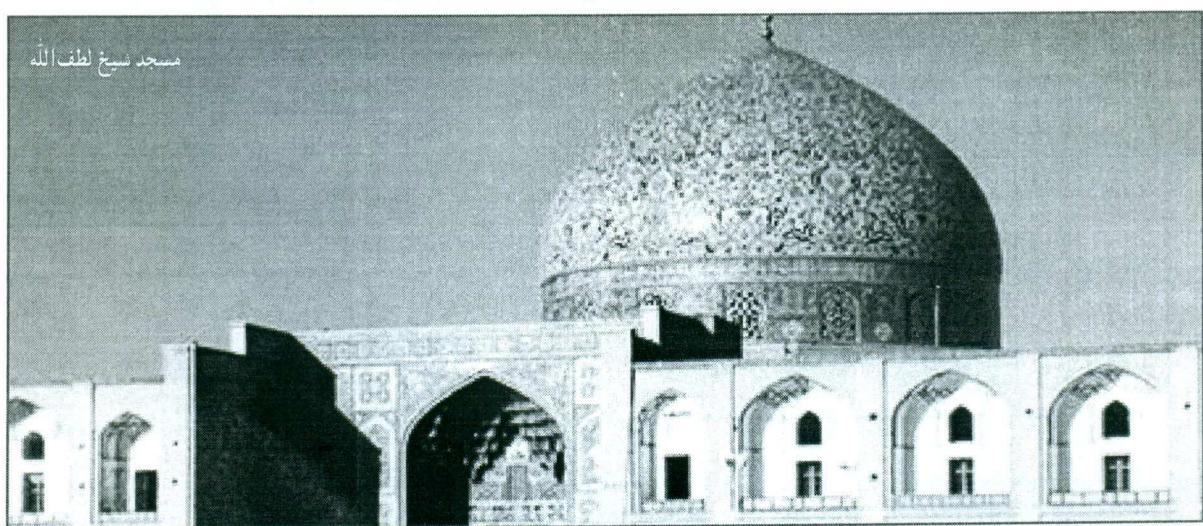
آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

اگر محیط يك زمين ورزشي مستطيل شكل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول

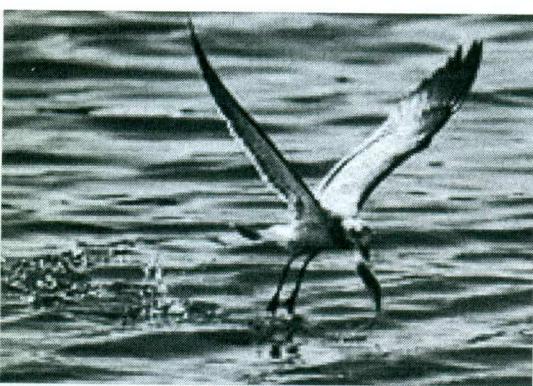
و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

پالایی صفر

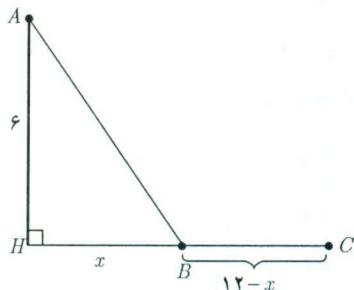
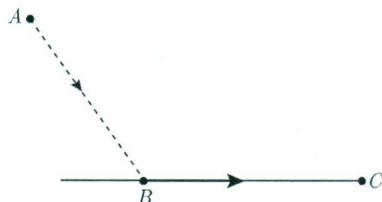
مسجد سیخ لطف‌الله



معادلات شامل عبارت‌های گنگ



طرح یک مسئله معمولاً مرغ‌های دریابی، برای شکار ماهی‌ها، بخشی از مسیر خود را در هوا و بخشی را به موازات سطح آب طی می‌کنند. یک مرغ دریابی در نقطه A به ارتفاع ۶ متر از سطح آب قرار دارد. فاصله تصویر مرغ روی آب از ماهی که در نقطه C قرار دارد ۱۲ متر است. مرغ ابتدا از نقطه B به نقطه A می‌آید سپس در سطح آب از B به C می‌رود و ماهی را شکار می‌کند. اگر مرغ دریابی برای طی هر متر در هوا ۱۴ کیلوکالری و برای طی هر متر در سطح آب ۱۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند، نقطه B در چه فاصله‌ای از C باید باشد تا مرغ دریابی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند؟



* حل : برای درک بهتر صورت مسئله شکل رو به رو را رسم می‌کنیم. فاصله B از تصویر مرغ بر روی آب (H) را x می‌گیریم در نتیجه فاصله میان B و C برابر $12-x$ می‌شود. با استفاده از رابطه فیثاغورس طول AB برابر $\sqrt{36+x^2}$ می‌شود.

میزان انرژی مصرف شده توسط مرغ دریابی برابر است با :

برای آنکه مرغ دریابی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند باید داشته باشیم :

$$14\sqrt{36+x^2} + 10(12-x) = 180 \Rightarrow 14\sqrt{36+x^2} = 10x + 60$$

$$\sqrt{36+x^2} = 5x + 30$$

با به توان دو رساندن طرفین معادله اخیر و ساده کردن به معادله درجه دوم $2x^2 - 25x + 72 = 0$ می‌رسیم که از آنجا $x=8$ و $x=4/5$. در این صورت فاصله B تا C برابر 4 یا $12-8=4$ یا $7/5$ متر خواهد بود.

اگر مرغ دریابی مستقیماً از A به C پرواز می‌کرد چقدر کالری مصرف می‌کرد؟ آیا اقدام مرغ دریابی برای شکار ماهی‌ها هوشمندانه نمی‌باشد؟!

$$x_{min} = 4, 11.5 \text{ متر}$$

فصل اول: جبر و معادله ۲۱

برخی از معادلات که دارای عبارت‌های رادیکالی از مجھول هستند را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آنها با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به دست آمده باید در معادله اصلی این عمل آزمایش شوند، زیرا عملیات توان رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.

مثال: معادله $x - 4 = \sqrt{x+2}$ را حل کنید.

حل:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+2})^2 &= (x-4)^2 \\ x+2 &= x^2 - 8x + 16 \\ x^2 - 9x + 14 &= 0 \\ (x-2)(x-7) &= 0 \Rightarrow x = 2 \text{ و } x = 7 \end{aligned}$$

آزمایش جواب‌ها

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 : \sqrt{2+2} = 2-4 \\ 2 &\neq -2 \times \end{aligned}$$

جواب مسئله نیست

$$\begin{aligned} x_2 &= 7 : \sqrt{7+2} = 17-4 \\ 3 &= 3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

جواب معادله است

بنابراین $x = 7$ تنها جواب معادله است.

تذکر: در حل این مسئله طرفین معادله اولیه نامنفی بودند و به توان دو رساندن آنها مشکلی ایجاد نمی‌کرد. در حل معادلات گنگ می‌توان با تعیین دامنه تعریف معادله، جواب‌های نهایی را با استفاده از آن مورد بررسی قرار داد. در حل این مسئله برای به دست آوردن دامنه تعریف داریم:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک نواحی}} x \geq 4$$

کار در کلاس

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x} &= 4 \quad \sqrt{x} = 4-x \quad \text{آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر شود؟} \\ (\sqrt{x})^2 &= (4-x)^2 \\ x &= 34 - 12x + x^2 \quad x^2 - 13x + 34 = 0 \quad (x-8)(x-9) = 0 \quad \begin{cases} x=8 \\ x=9 \end{cases} \end{aligned}$$

معادله $x + \sqrt{x} = 4$ را حل کنید؛ سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 34 &= 0 \quad x = 2 \pm \sqrt{25} \\ x &= 5 \quad x = -1 \end{aligned}$$

جواب امسکر و بعد از آنسته حریصه جواب ندارد

(۹)

$$\begin{aligned}
 & t_1 = \text{زمان برگشته} \\
 & t_2 = \text{زمان بازگشت} \\
 & v_p = v_1 - \lambda \quad t_1 + t_2 = 17 - 2 = 15 \quad t_1 = \frac{144}{v_1} \quad t_2 = \frac{144}{v_1 - \lambda} \\
 & t_1 + t_2 = \frac{144}{v_1} + \frac{144}{v_1 - \lambda} = 15 \quad \rightarrow v_1 = 24 \quad \text{فقط} \\
 & v_1 = -30 \quad \text{ناتمام} \\
 & 144(v_1 - \lambda) + 144v_1 = 15v_1(v_1 - \lambda) \\
 & 144v_1 - 144\lambda + 144v_1 = 15v_1^2 - 15\lambda v_1 \quad 15\lambda v_1 = 0 \\
 & 15v_1^2 - 30\lambda v_1 + 1140 = 0 \rightarrow 5v_1^2 - 10\lambda v_1 + 228 = 0 \quad \text{معادلات زیر را حل کنید. صحن بعده}
 \end{aligned}$$

تمرین

۲۲

$$\begin{array}{lll}
 1. \frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1} & 2. \frac{P}{2-P} + \frac{2}{P} = \frac{-3}{2} & 3. \frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y} \\
 4. 2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4} & 5. \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x & 6. \frac{5}{\sqrt{x+2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \\
 7. \sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4 & &
 \end{array}$$

۸ پدریزگ برای اهدا به مهدکودک چند اسباب بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی هزار تومان به پدریزگ تخفیف می‌داد او می‌توانست با همان پول چهار اسباب بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

$$\begin{cases}
 xy = 120 \\
 5xy = 120 \\
 |y = 2x - 4
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 y = 2x - 4 \\
 120 + 4x - y - 4 = 120 \\
 120 + 4x - 2x + 4 - 4 = 120 \\
 2x = 120 \\
 x = 60 \\
 y = 2(60) - 4 = 116
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 n=4 \\
 n=4 \\
 n=4
 \end{cases}$$

۹ ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟ **بالای صحن**

۴۰۰ **صحت بدل**
تحفیض

۱۰ فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جريان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جريان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.



$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{n} + \frac{1}{n-12} = \frac{1}{18} \\
 & 18(n-12) + 18n = n(n-12) \\
 & n^2 - 12n + 216 = 0 \\
 & n^2 - 12n + 144 = 0 \\
 & (n-12)^2 = 0 \quad (10) \\
 & n-12 = 0 \\
 & n = 12
 \end{aligned}$$

$$1) \frac{q}{n} = p + \frac{n}{n+1} \xrightarrow{x(n+1)} q(x+1) = pn(n+1) + n(n)$$

$$4x + 4 = 4x^2 + 4pn + n^2 \rightarrow n^2 - 4n - 4 = 0 \quad \Delta = 16 + 16 \times 1 \approx 32$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{4 + \sqrt{32}}{4} \text{ جذر} \\ n = \frac{4 - \sqrt{32}}{4} \text{ جذر} \end{array} \right.$$

$$2) \frac{p}{p-1} + \frac{p}{p} = n \xrightarrow{p(p-1)} p(p) + p(p-1) = p(p-1)$$

$$\rightarrow p^2 - p - p^2 + p = 0 \rightarrow -p = 0 \rightarrow p^2 - p + 1 = 0$$

$$\Delta = p^2 - 4 \cdot 1 = 12 \quad n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \text{ جذر} \\ n = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \text{ جذر} \end{array} \right.$$

$$3) \frac{py + \alpha}{y^2 + \alpha y} + \frac{y + \epsilon}{y + \alpha} = \frac{y + 1}{y}$$

$$\underline{y(y + \alpha)} \rightarrow py + \alpha + y(y + \epsilon) = (y + 1)(y + \alpha)$$

$$py + \alpha + y^2 + \epsilon y = y^2 + \alpha y + \alpha \rightarrow y = 0 \quad \text{جذر}$$

$$4) \sqrt{n} = \sqrt{pn + \epsilon} \rightarrow (\sqrt{n})^2 = (\sqrt{pn + \epsilon})^2 \rightarrow n = pn + \epsilon \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1 - \sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}} = 1 - n \rightarrow (1 + \sqrt{n})(1 - n) = 1 - \sqrt{n}$$

$$(1 - \sqrt{n})(1 + \sqrt{n})$$

$$(1 + \sqrt{n})(1 - \sqrt{n}) - (1 - \sqrt{n}) = 0$$

$$(1 - \sqrt{n}) [(1 + \sqrt{n})^2 - 1] = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - \sqrt{n} = 0 \quad \sqrt{n} = 1 \quad n = 1 \text{ جذر} \\ (1 + \sqrt{n})^2 - 1 = 0 \quad (1 + \sqrt{n})^2 = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \sqrt{n} = 1 \rightarrow \sqrt{n} = 0 \quad n = 0 \\ 1 + \sqrt{n} = -1 \rightarrow \sqrt{n} = -2 \quad \text{غير ممكن} \end{array} \right.$$

$$5) \frac{1}{\sqrt{n} + p} = p + \frac{1}{\sqrt{n} - p} \xrightarrow{(\sqrt{n} + p)(\sqrt{n} - p)}$$

$$\sqrt{n} - p = p(n - \epsilon) + \sqrt{n} + p \quad n = \epsilon \quad n = p \quad \text{جذر}$$

$$6) \sqrt{pn + \epsilon} = \lambda - \sqrt{n + p} \quad (\sqrt{pn + \epsilon})^2 = (\lambda - \sqrt{n + p})^2$$

$$qn(n+1) = qf - 14\sqrt{pn+p} + pn + p \rightarrow 14\sqrt{pn+p} = \lambda^2 - 2qn$$

$$\lambda \sqrt{n + p} = qf - 14n \rightarrow (\lambda \sqrt{n + p})^2 = (qf - 14n)^2 \quad qf(n+p) = \lambda^2 - 14pn + 14n^2$$

$$149x^2 - 111x + 4f^2 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} n = 1 \text{ جذر} \\ n = \frac{c}{a} = \frac{4f^2}{149} = \frac{4f^2}{149} \text{ جذر} \end{array} \right.$$



قدر مطلق و ویژگی‌های آن

در سال قبل با مفهوم قدر مطلق و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شدیم. همان‌طور که می‌دانید قدر مطلق عدد حقیقی a به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$|a| = \begin{cases} a & , \quad a \geq 0 \\ -a & , \quad a < 0 \end{cases}$$

کاردر کلاس

۱ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

$$\text{(الف)} | -2 | = 2 \quad \text{(ب)} |\sqrt{3} - \sqrt{5}| = -(\sqrt{3} - \sqrt{5}) \quad \text{(پ)} \left| \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \right| = \left| \frac{-1}{20} \right| = \frac{1}{20}$$

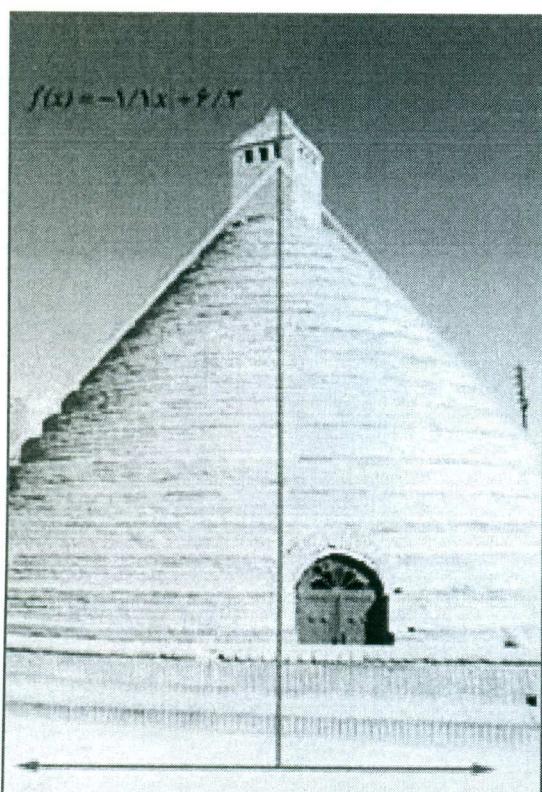
$$= \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

۲ عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$$\text{(الف)} \sqrt{a^4 + 2a^2 + 1} = \sqrt{(a^2 + 1)^2} = |a^2 + 1| = a^2 + 1$$

$$\text{(ب)} \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = |\sqrt{3} - 2| = -(\sqrt{3} - 2)$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

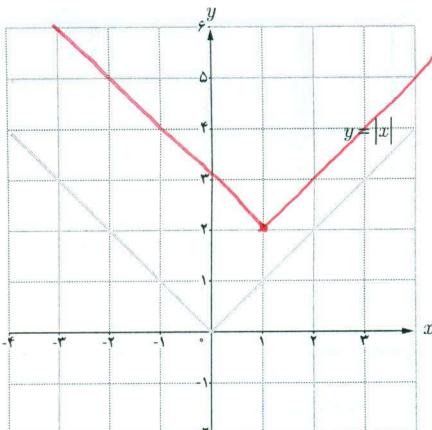


آستانه - روستای پیانک (استان سمنان)

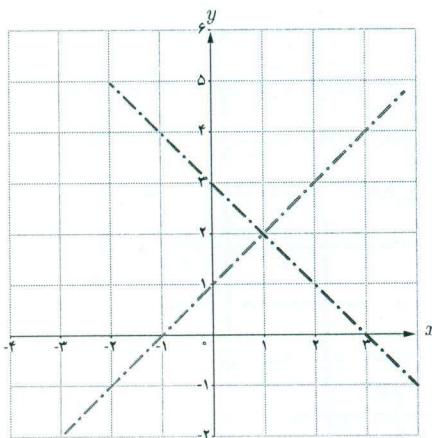
دانلود جزوه
نمونه سوال
۰۰ گام

رسم توابع قدر مطلقی

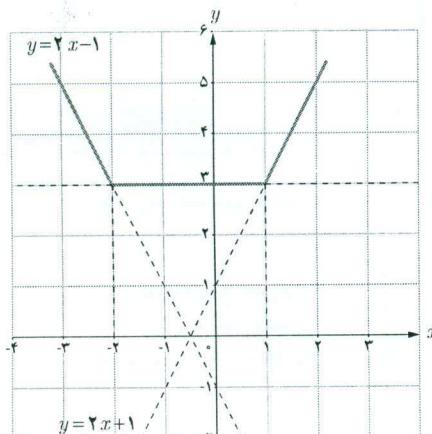
فعالیت



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

می خواهیم نمودار تابع $y = |x - 1| + 2$ را رسم کنیم.

روش اول : با توجه به نمودار $|x| = y$ در شکل (۱) و استفاده از انتقال مسخری، نمودار آن را رسم کنید.

روش دوم : گام اول؛ با استفاده از تعیین علامت، تابع را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای بنویسید.

$$y = |x - 1| + 2 = \begin{cases} x - 1 + 2 & , x \geq 1 \\ -x + 1 + 2 & , x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 & , x \geq 1 \\ -x + 3 & , x < 1 \end{cases}$$

گام دوم؛ با توجه به شکل (۲) نمودار y را رسم کنید.

❖ مثال : نمودار تابع f با ضابطه $|x - 1| + |x + 2| = f(x)$ را رسم کنید.

❖ حل : در اینجا نمی توانیم از رسم تابع $|x| = y$ و انتقال استفاده کنیم. بنابراین از روش تعیین علامت عبارت های داخل قدر مطلق ها کمک می گیریم. برای این کار ابتدا عبارت های داخل قدر مطلق ها را تعیین علامت می کنیم.

x	-	-	○	+
$x - 1$	-	-	○	+
$x + 2$	-	○	+	+

$\Rightarrow f(x) = (x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$
 $\Rightarrow f(x) = -(x - 1) + (x + 2) = 3$
 $\Rightarrow f(x) = -(x - 1) - (x + 2) = -2x - 1$

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & , x < -2 \\ 3 & , -2 \leq x \leq 1 \\ 2x + 1 & , x > 1 \end{cases}$$

نمودار تابع از سه قسمت که هریک بخشی از یک خط هستند تشکیل می شود (شکل (۳)).



معادلات قدر مطلقی

حل یک مسئله

بر روی محور اعداد حقیقی فاصله چه نقاطی از نقطه ثابت ۷ برابر ۳ است؟

برای حل مسئله شکل روبرو را رسم می کنیم.

اگر طول نقطه جواب مسئله را x بنامیم، شرط مسئله به این معناست که $|x-3|=7$. با استفاده از ویژگی های قدر مطلق خواهیم دانست $x-3=7$ و در نتیجه $x=10$ و $x=-4$; و هر دو جواب های معادله هستند.

جواب های معادله $|f(x)|=|g(x)|$ همان جواب های دو معادله $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ هستند. به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارت قدر مطلق هستند معادلات قدر مطلقی می گویند.

مثال : معادله $|x-4|=3x-2$ را حل کنید.

روش اول : با استفاده از ویژگی های قدر مطلق : جواب های این معادله همان جواب های دو معادله $3x-2=x-4$ و $3x-2=-(x-4)$ هستند که، به ترتیب، عبارت اند از :

$$x = \frac{3}{2} \quad x = -1$$

روش دوم : با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت : $x^2 - 8x + 16 = x^2 - 12x + 4$; و از آنجا $4x = 12$ ؛ جواب های این معادله $x = 3$ هستند.

کاردر کلاس

معادله قدر مطلقی $|x-1|=4-3x$ را به سه روش زیر حل کنید.

روش اول : (با استفاده از تعریف قدر مطلق)

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$$

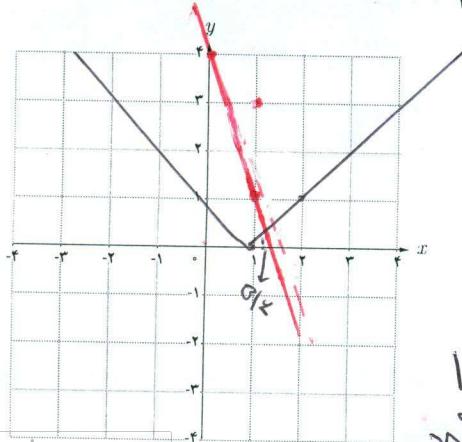
$$x \geq 1 \Rightarrow x-1=4-3x \Rightarrow x=\frac{5}{4} \quad \text{حالت اول} \quad x < 1 \Rightarrow \dots \quad \text{حالت دوم} \quad -x+1=4-3x \quad 2x=3 \quad x=\frac{3}{2}$$

روش دوم : (روش هندسی)

الف) توابع $y=|x-1|$ و $y=4-3x$ را رسم کنید.

ب) طول های محل تلاقی دو نمودار را مشخص کنید. $x=1$

پ) جواب های معادله را به دست آورید. $x=1$

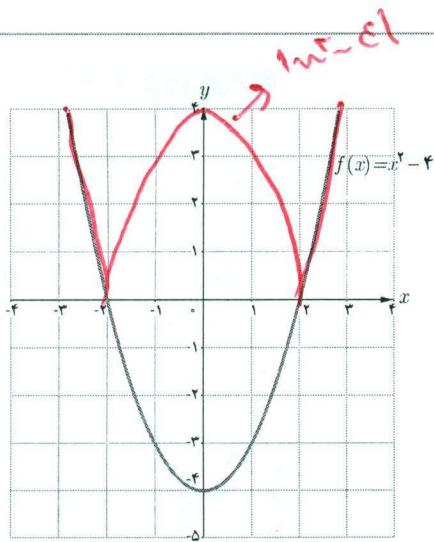


روش سوم : (به توان رساندن طرفین)

$$\begin{aligned} |x-1| &= 4-3x \quad |x-1|^2 = (4-3x)^2 \\ x^2 - 2x + 1 &= 16 - 24x + 9x^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 16 - 24x + 9x^2 \quad \text{معادله} \\ \frac{1}{x}(8x-12)(8x-10) &= \begin{cases} 8x=16 & x=2 \\ 8x=10 & x=\frac{5}{4} \\ 8x-12=0 & x=1.5 \end{cases} \end{aligned}$$

فعالیت

فصل اول: جبر و معادله ۲۷



در شکل رویه رو نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 4$ آمده است.

- با توجه به علامت عبارت $x^3 - 4$ و استفاده از تعریف قدر مطلق، تابع $y = |x^3 - 4|$ را به صورت چندضابطه‌ای بنویسید.

۱ نمودار $|x^3 - 4|$ را رسم کنید.

۲ تابع $|f(x)|$ را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای بنویسید.

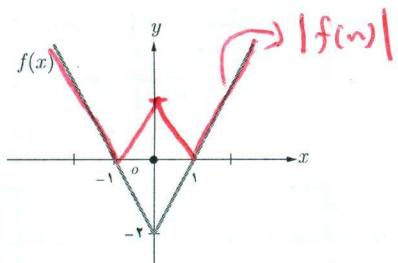
$$y = |f(x)| = \begin{cases} x^3 - 4, & f(x) \geq 0 \\ -x^3 + 4, & f(x) < 0 \end{cases}$$

- با توجه به قسمت‌های قبل یک روش رسم برای تابع $|f(x)|$ از روی نمودار $y = f(x)$ بیان کنید.

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

- ۳ در شکل رویه رو نمودار تابع با ضابطه $y = |f(x)|$ را از روی نمودار تابع $y = f(x)$ رسم کنید.

با توجه به فعالیت بالا :



۱ نمودار $y = -f(x)$ قرینه نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x هاست.

۲ برای رسم نمودار $|f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم

کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور x هاست، تصویر آینه وار

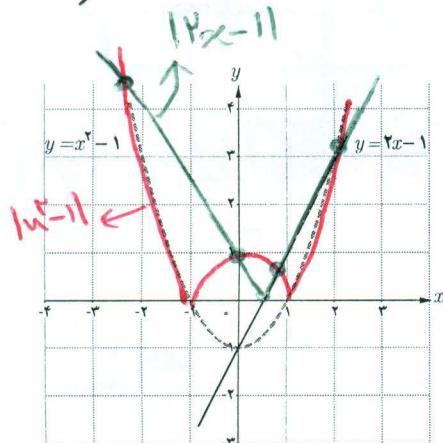
نمودار $(-x, f(x))$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم.

۰

کاردکلاس

- ۱ با استفاده از شکل رویه رو، نمودار توابع $y = |2x - 1|$ و $y = |x^3 - 1|$ را رسم کنید و تعداد جواب‌های معادله $|x^3 - 1| = |2x - 1|$ و مقدار تقریبی جواب‌ها را به دست آورید.

۲ به روش جبری و با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق معادله $|x^3 - 1| = |2x - 1|$ را حل کنید.



$$x^3 - 1 = 2x - 1 \Rightarrow x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad x = 2$$

$$|x^3 - 1| = |2x - 1| \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 1 = 2x - 1 \\ x^3 - 1 = -(2x - 1) \end{cases} \Rightarrow x^3 + 2x - 2 = 0 \quad \Delta = 12$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{3} \approx 0.73 \\ x = -1 - \sqrt{3} \approx -2.73 \end{cases}$$



$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

(ج)

$x < -\Delta$

$|x+3| > 2$

$|x+3| > 2 \rightarrow x > -1$

$|x+3| < -2 \rightarrow x < -\Delta$

۳) افق

$|x-3| = 1$

$x = 4 - 2\Delta$ $x = 4 + 2\Delta$

$|x-4| = 2 \rightarrow |x-4| = 2$

$|x-4| = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x-4 = 2 \\ x-4 = -2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 6 \\ x = 2 \end{array} \right.$

$x = 3 - \Delta$ $x = 3 + \Delta$

$x = 3 - \Delta$ $x = 3 + \Delta$

۲۸

تمرین

۱) با استفاده از تعیین علامت، ضابطه هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

(الف) $f(x) = x|x| = \begin{cases} n(x) = n^2 & x \geq 0 \\ n(-x) = -n^2 & x < 0 \end{cases}$

(ب) $g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} n^2 - 1 & n \leq -1 \text{ یا } n \geq 1 \\ -n^2 + 1 & -1 < n < 1 \end{cases}$

(پ) $h(x) = |x-1| + |x+1| = \begin{cases} -n + (-n-1) = -2n & n \leq -1 \\ -n+1+n+1 = 2 & -1 < n < 1 \\ x-1+x+1 = 2n & n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2n & n \leq -1 \\ 2 & -1 < n < 1 \\ 2n & n \geq 1 \end{cases}$

بر روی محور طول ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه به طول های ۱ و ۳ روی محور x ها

$|x+1| + |x-3| = 4$

$\begin{cases} -2n+2 & n \leq -1 \\ 2n-2 & n \geq 1 \end{cases} \rightarrow -2n+2=4 \rightarrow -2n=2 \rightarrow n=-1$

$\begin{cases} -1 < n < 1 \\ n \geq 1 \end{cases} \rightarrow 2n-2=4 \rightarrow 2n=6 \rightarrow n=3$

۲) هر یک از عبارت های زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

(الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است. **بالای صحن**

(ب) دو برابر فاصله بین x و ۶ برابر ۴ است. **بالای صحن**

(پ) فاصله بین x و -۳ بزرگتر از ۲ است. **بالای صحن**

۳) دو معادله زیر را حل کنید.

(الف) $\frac{2-x}{|x-3|} = 1 \rightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ |x-3| = 2-x \end{cases} \quad \begin{cases} n-3 = 2-n \rightarrow 2n=5 \rightarrow n=\frac{5}{2} \\ n-3 = n-2 \rightarrow -3=-2 \end{cases}$

(ب) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1 \quad \sqrt{(n-1)^2} = 2n+1 \quad |n-1| = 2n+1$

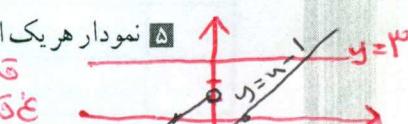
نمودار هریک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y=3$ معادله های به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

(الف) $y = x - \frac{x}{|x|}$

(ب) $y = x^2 - 6x$

$$x = -\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{3} \approx 4.89$$

نمودار تابع $|x|-2$ را رسم کنید، سپس معادله $|x|-2 = f(x)$ را، به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.



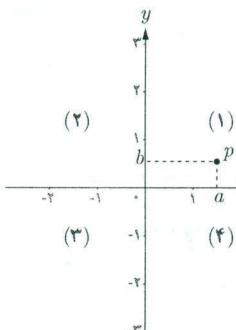
صحن بعد

معکوس

۷) نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ را رسم کنید، سپس به دو روش هندسی و جبری معادله $|x^2 - 2x| = 1$ را حل نمایید.

درس

آشنایی با هندسه تحلیلی



در سال‌های گذشته با دستگاه محورهای مختصات آشنا شده‌اید. محورهای مختصات، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر ناحیه یک ربع نامیده می‌شود. نقاط روی محورها در هیچ ربعی نیستند.

به هر نقطه P در صفحه مختصات یک زوج مرتب (a, b) نظیر می‌شود. به این زوج مختصات نقطه P گفته می‌شود. طول نقطه P را با x_p و عرض آن را با y_p نشان می‌دهیم. در این درس با برخی از ویژگی‌های نقطه در صفحه مختصات آشنا می‌شویم.

فاصله بین دو نقطه

فالات

روی محور اعداد زیر به مبدأ O ، نقطه متناظر 4 را با A و نقطه متناظر -3 را با B مشخص کردایم:

$$|OA| = 4 \quad |OB| = 3$$



$$|AB| = \sqrt{ }$$

طول پاره خط BA چقدر است؟

$$\checkmark \quad \text{فاصله دو نقطه } A \text{ و } B \text{ متناظر با } 4 \text{ و } (-3) \text{ از یکدیگر چقدر است؟}$$

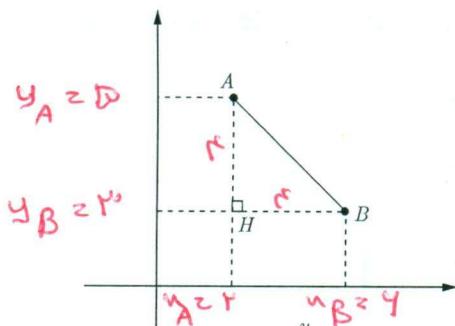
\checkmark بر روی هریک از دو محور زیر، در مورد فاصله بین دو نقطه A و B چه می‌توان گفت؟



$$|AB| = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$$

اگر طول نقاط متناظر با A و B روی محور اعداد را به ترتیب با x_A و x_B نشان دهیم، در این صورت فاصله بین A و B را به صورت $|AB| = |x_B - x_A|$ تعریف می‌کنیم.

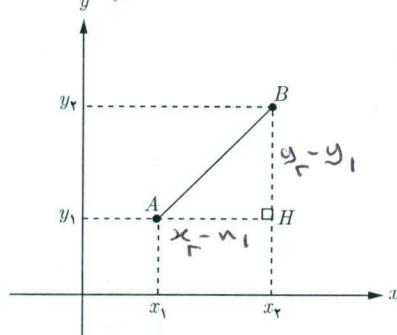
فعالیت



۱) دو نقطه $A(2, 5)$ و $B(6, 3)$ را، در شکل رو بخواهید.

(الف) روی محور افقی x_A و روی محور عمودی y_A و y_B را مشخص کنید.

(ب) در مثلث قائم الزاویه AHB ($\hat{H} = 90^\circ$) با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول پاره خط AB را به دست آورید.



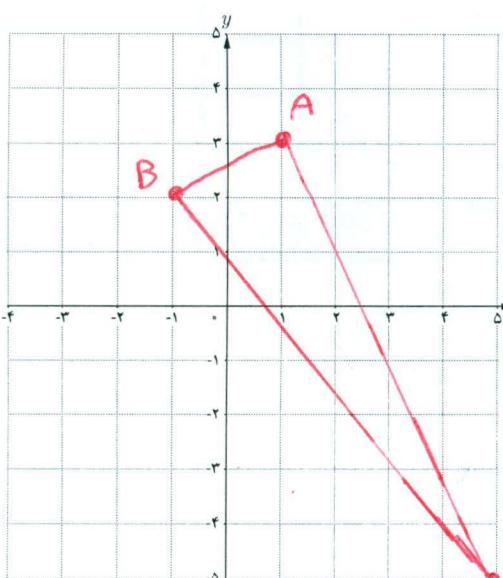
۲) در شکل رو بخواهید، اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات باشند، طول AB را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + BH^2 \\ AB^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

به طور کلی، اگر در صفحه مختصات دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم، طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

کاردر کلاس



سه نقطه $A(1, 3)$ ، $B(-1, 2)$ و $C(5, -5)$ سه رأس مثلث

در صفحه مختصات رو بخواهید.

(الف) مثلث را رسم کنید.

(ب) طول اضلاع مثلث را به دست آورید.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ AC &= \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} \end{aligned}$$

(پ) نشان دهید مثلث ABC قائم الزاویه است.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \quad \checkmark$$

را بطای خود بخواهید
برهان مثلث قائم الزاویه است

(ت) شبیه خط AB و AC را بدست آورید.

چه رابطه‌ای بین دو شبیه مشاهده می‌کنید؟

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 3}{-1 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-5 - 3}{5 - 1} = -2$$

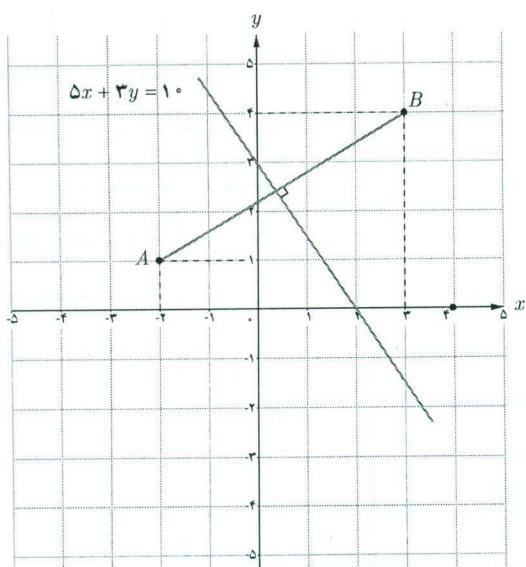
$$m_{AB} \times m_{AC} = \frac{1}{2} \times -2 = -1$$

سینما مخصوص و قرینه ملکه عزیز حوضه بیرهم عبورند

۳۱ فصل اول: جبر و معادله

مثال: در شکل زیر، معادله عمودمنصف پاره خطی را بنویسید که دو نقطه $A(-2, 1)$ و $B(3, 4)$ را به هم وصل کرده است.
حل: عمودمنصف یک پاره خط شامل همه نقاطی است که فاصله آنها از دو سر پاره خط به یک اندازه است. بنابراین اگر آنگاه P روی عمودمنصف AB قرار دارد. فرض کنیم $P(x, y)$ آنگاه با استفاده از فرمول فاصله پاره خط می‌توان نوشت:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$$



با به توان دو رساندن طرفین و ساده کردن داریم:

$$5x + 3y = 10$$

این معادله برای تمام نقاطی که از A و B هم فاصله‌اند برقار است، بنابراین، معادله عمودمنصف AB است.

در مثال بالا شیب خط AB برابر $\frac{3}{5}$ و شیب خط عمودمنصف آن برابر $-\frac{5}{3}$ است. چه رابطه‌ای بین این دو شیب مشاهده می‌شود؟

شیبها که هم و متعکس می‌باشند

به طور کلی:
اگر خطوط d و d' به ترتیب با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند آنگاه $mm' = -1$ و برعکس.

کاردر کلاس

نشان دهید نقطه $P(-12, 11)$ روی عمودمنصف پاره خط واصل دو نقطه $A(0, -3)$ و $B(6, 15)$ قرار دارد.

$$PA = \sqrt{11^2 + (-3)^2} = \sqrt{140} \rightarrow PA = PB$$

$$PB = \sqrt{11^2 + 15^2} = \sqrt{140}$$

خط AB از جویی P را می‌گذراند (ست بنا بر این P روی عدویت AB قرار ندارد)

$$AB \text{ بوسیله } M \left| \begin{array}{l} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m \\ \frac{11 - (-3)}{-12 - 0} = 4 \end{array} \right. \quad m_{AB} = \frac{11 - (-3)}{-12 - 0} = 4 \quad m = -\frac{1}{4} \quad \text{عمود منصف} \quad \text{رسانید}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y = -\frac{1}{4}x + v$$

$$P \left| \begin{array}{l} -12 = x \\ 11 = y \end{array} \right. \quad 11 = -\frac{1}{4}(-12) + v \rightarrow 11 = 3 + v \quad \checkmark \quad \text{س اس } AB \text{ را عدویت می‌داند}$$

$$\frac{y - 11}{x - (-12)} = -\frac{1}{4} \quad m_{AB} = \frac{11 - (-3)}{-12 - 0} = 4 \quad \text{رسانید}$$

$$m_{AB} \times m_{PM} = -1 \rightarrow PM \perp AB \quad \text{س اس } AB \text{ را عدویت می‌داند}$$

مختصات نقطه وسط یک پاره خط

فعالیت

$$x_M = ?$$

در شکل زیر نقطه M وسط پاره خط AB است. طول نقطه M چقدر است؟



- چه ارتباطی بین طول نقطه M و طول نقاط A و B مشاهده می‌کنید؟ طول نقطه M میانجای طول نقاط A و B است.
- اگر A و B دو نقطه دلخواه روی محور x و M وسط AB باشد، طول نقطه M را بر حسب طول های نقاط A و B به دست آورید.

$$AM = MB$$

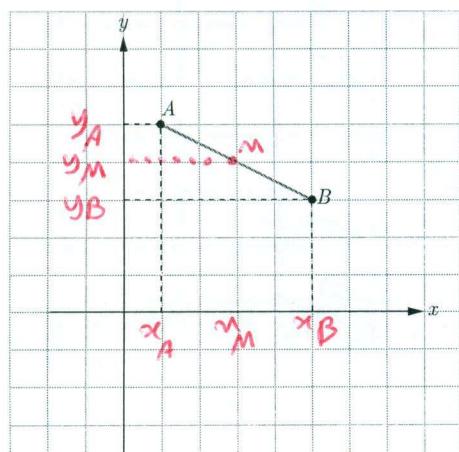
$$x_M - x_A = x_B - x_M \quad x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad x_M = \frac{xA + xB}{2}$$



- اگر A و B روی محور y و عرض نقاط A و B را با y_A و y_B نشان دهیم و M وسط پاره خط AB باشد، چه دستوری برای محاسبه عرض نقطه M می‌توان بیان کرد؟

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

کار در کلاس



اگر $A(1, 5)$ و $B(5, 3)$ دو سر پاره خط AB و $M(a, b)$ وسط این پاره خط باشد :

(الف) تصویر نقاط A و B و M را روی محورهای مختصات مشخص کنید.

(ب) با توجه به تصویر نقاط A و B و M روی محورهای مختصات نقطه M را به دست آورید.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$$

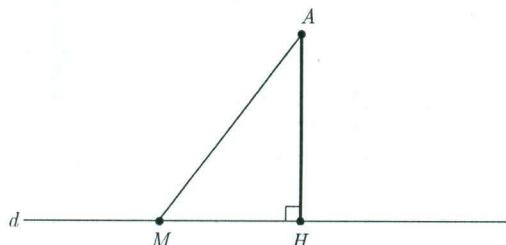
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$$

اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات و M وسط پاره خط AB باشد. مختصات نقطه M برابر است با :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

فاصله یک نقطه از یک خط

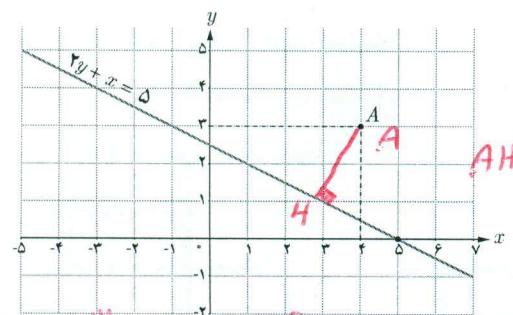
اگر خط d و نقطه A در خارج آن داده شده باشد، فاصله نقطه A از خط d را همان کوتاهترین فاصله A از d تعریف می‌کنیم. با توجه به آنکه طول عمود از طول مابین کوتاهتر است (چرا؟) این فاصله را عمود AH در نظر می‌گیریم.



بنابراین برای بدست آوردن فاصله هر نقطه از خط کافی است از آن نقطه بر خط عمودی رسم و طول پاره خط عمود شده را اندازه‌گیری کنیم.

فعالیت

در شکل رو به رو خط d به معادله $2y + x = 5$ داده و نقطه $A(4, 3)$ دارد. شده است.



$$m_d = -\frac{1}{2} \quad m_{AH} = \frac{1}{2} \quad y - 3 = \frac{1}{2}(x - 4) \quad 2y - 6 = x - 4 \quad 2y - x = 2$$

$$\rightarrow 2y - 2x = -2 \quad AH \text{ نسبت } \rightarrow 2y - 2x = -2$$

۱) عمود AH را بر خط d رسم کنید.

۲) رابطه بین شیب‌های دو خط d و AH را بدست آورید.

۳) شیب AH را بدست آورده و معادله خط AH را بنویسید.

۴) دستگاه متشکل از دو خط d و AH را تشکیل دهید و مختصات محل برخورد دو خط (نقطه H) را بدست آورید.

۵) طول پاره خط AH را محاسبه کنید.

به طور کلی اگر بخواهیم فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط $ax + by + c = 0$ را به دست آوریم، با استفاده از مراحل فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت که طول عمود AH برابر است با :

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

که در آن، وجود علامت قدر مطلق در صورت کسر برای نامنفی شدن مقدار AH می‌باشد.

۱- از اثبات فرمول به دلیل طولانی شدن صرف نظر می‌شود. دانشآموزان علاقه مند می‌توانند خود به اثبات آن بپردازند.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ 3x - 4y = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{3} \\ y = \frac{49}{12} \end{cases}$$

$$AH = \sqrt{\left(\frac{14}{3} - 4\right)^2 + \left(\frac{49}{12} - 3\right)^2} = \sqrt{\frac{196 + 1225}{144}} = \sqrt{\frac{1421}{144}} = \frac{\sqrt{1421}}{12} = \frac{11\sqrt{13}}{12}$$

مثال: فاصله نقطه $A(-2, 4)$ از خط $4x + 3y = 12$ را به دست آورید.

حل: ابتدا معادله خط را به صورت $4x - 3y + 12 = 0$ می‌نویسیم. طبق فرمول فاصله نقطه از خط، فاصله نقطه A تا خط d را AH فرض می‌کنیم و داریم:

$$AH = \frac{|4(-2) - 3(4) + 12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-8|}{5} = \frac{8}{5}$$

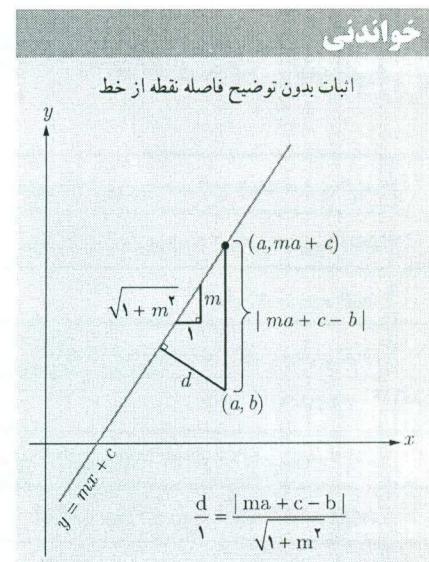
مثال: فاصله نقطه $A(1, -4)$ از خط $8x + 6y = k$ برابر ۴ است. مقدار k چقدر است؟

حل: ابتدا معادله خط را به صورت $8x + 6y - k = 0$ می‌نویسیم. مطابق فرمول فاصله نقطه از خط داریم:

$$AH = \frac{|8(1) + 6(-4) - k|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} \Rightarrow 4 = \frac{|-16 - k|}{10} \Rightarrow |-16 - k| = 40$$

$$-16 - k = 40 \Rightarrow k = -56$$

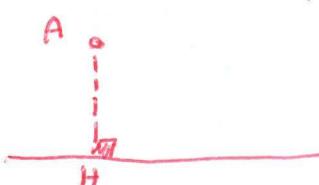
$$-16 - k = -40 \Rightarrow k = 24$$



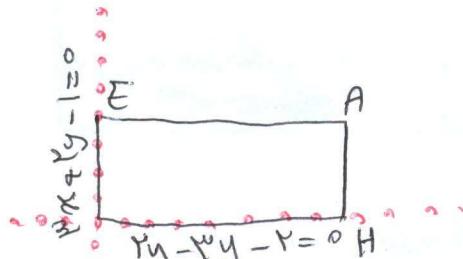
کار در کلاس

اگر نقطه $A(2, 3)$ رأس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟

$$AH: \frac{|3(2) - 4(3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3 \quad S = 3 \times 3 = 9$$



دو خط $2x - 3y = 2$ و $3x + 2y = 1$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل اند و نقطه $A(2, 5)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟



$$AH = \frac{|3(2) - 2(0) - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

$$AE = \frac{|3(2) - 2(0) - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

$$S = AH \times AE = \frac{5}{\sqrt{13}} \times \frac{5}{\sqrt{13}} = 25/13$$

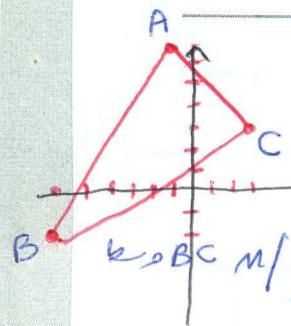
$$m_{BC} = \frac{a}{q} \quad c \mid 3 \quad y - 3 = \frac{a}{q}(n - 3) \quad qy - 2v = ax - 1 \Delta \quad (1)$$

$\Delta x - 9y + 12 = 0$ BC نویسید

$$AH = \frac{|a(-1) - 9(2) + 12|}{\sqrt{a^2 + 9^2}} = \frac{0}{\sqrt{104}}$$

فصل اول: جبر و معادله ۳۵

تمرین



۱ مثلث ABC به رأس های $A(-1, 7)$ و $B(-6, -2)$ و $C(3, 3)$ را در نظر بگیرید.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) شان دهید مثلث متساوی الساقین است.

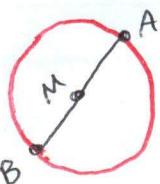
$$AB = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{104}$$

$$BC = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{104}$$

$$\begin{aligned} m_{BC} &= \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-2 - 3}{-6 - 3} = \frac{1}{3} \\ m_{AB} &= \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{7 - (-2)}{-1 - (-6)} = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{BC} &= \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{7 - 3}{-1 - 3} = \frac{4}{5} \\ AH &= \text{طول ارتفاع } BC \text{ را به دست آورید.} \end{aligned}$$

با عذر



۲ نقاط دوسر قطب یک دایره اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

$$AB \text{ وسط } M \mid \frac{\frac{0+1}{2} = 5}{\frac{4+(-1)}{2} = -1} \rightarrow M \mid 5 \text{ هر زو زو } MA = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

۳ شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله $y = -8x - 20$ مطابق شکل زیر مدل سازی می شود.

الف) مختصات نقطه انتهای عدسی A و B را به دست آورید.

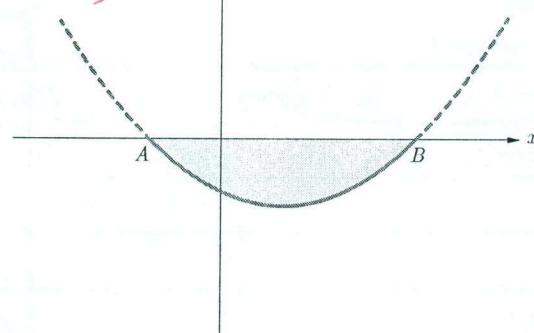
$$x^2 - 16 - 20 = 0 \quad (n-1)(n+4) = 0 \quad n=10 \quad n=-4$$

$$AB = \sqrt{10 - (-4)^2} = 12$$

ب) اگر x بر حسب سانتی متر باشد طول AB را به دست آورید.

پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y بر حسب میلی متر باشد پیشترین ضخامت آن چقدر است؟

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} = 5 \rightarrow y_{\min} = \frac{1}{2}(-8(5)) - 20 = -34$$

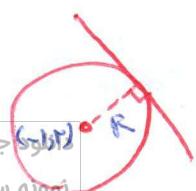


۴ ثابت کنید فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر باشد.

$$A(n, y_0) \rightarrow ax_0 + by_0 = -c \quad AH = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

خط $4x + 3y = 5$ بر دایره $x^2 + y^2 = 1$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

$$R = \frac{|4(-1) + 3(2) - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}$$



نقطه $S(x, 8)$ روی نیم دایره ای به شعاع 10 در شکل روبه رو داده شده است.

$$R = 0.5 - \sqrt{-E/\Delta E} = 1.0 \quad g^{\frac{1}{2}} = 1.4 \quad g = 1.4^2 = 1.96$$

ب) شبیه خط‌های PS و SQ را به دست آورید.

ب) نشان دهید $P\hat{S}Q$ قائم است.

$$S \left| \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right|^{\perp_0} \rightarrow P \perp P_{PS} = \frac{o-\lambda}{-1_0-4} = \frac{1}{r} \quad m_{PS} \times m_{QS} = \frac{1}{r} \times -2 = -1 \quad PS \perp QS$$

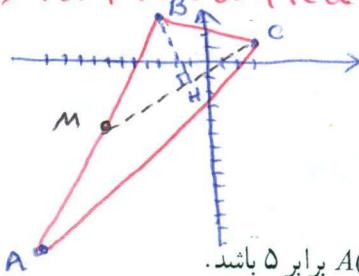
$$S \left| \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right|^{\perp_0} \rightarrow m_{SQ} = \frac{o-\lambda}{1_0-4} = -2 \quad \hat{P} \hat{S} \hat{Q} = 90^\circ \quad QS$$

اگر فاصله نقطه $A(1,2)$ از خط $ax+4y=1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

$$AH = \frac{|a(1) + 4(2) - 1|}{\sqrt{a^2 + 4^2}} = \frac{|a + 8 - 1|}{\sqrt{a^2 + 16}} = \frac{|a + 7|}{\sqrt{a^2 + 16}} = |a + 7| / \sqrt{a^2 + 16} = |a + 7| / \sqrt{a^2 + 16}$$

$$\rightarrow 4a^2 + 48a + 49 = a^2 + 16 \rightarrow 3a^2 + 48a + 33 = 0 \rightarrow a = -1 \text{ یا } a = -\frac{11}{3}$$

سه راس مثلث $C(3,1), B(-3,3), A(-11,-13)$ باشند.

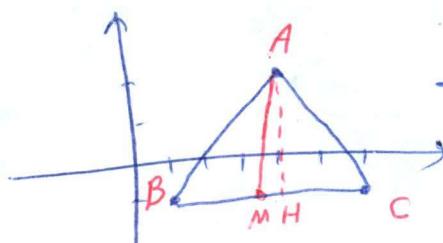


۹) نقطه‌ای روی خط $x=2y$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2,4)$ برابر ۵ باشد.

جوابی رہوئی

۱۰ نقاط $(4, 2)$ و $(-1, -1)$ و $C(8, -2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM

باشند طول MH را به دست آورید. جواب پاسخ صادر



$$H \left| \begin{matrix} e \\ -1 \end{matrix} \right.$$

$$\rightarrow M_H = \left| e - \frac{v}{\gamma} \right| = \frac{1}{\gamma}$$

cont BC 2nd M

$M \mid \frac{M}{P_x}$ $y = P_x \cos \alpha$, M نہیں - ۹
 $MO + MA = \Delta$

$\sqrt{2Y + P_m^2} + \sqrt{(n-y)^2 + (P_m - Y)^2} = \Delta$
 $\sqrt{n^2 + Y^2} + \sqrt{\Delta(n-Y)^2} = \Delta$
 $|n| + |n-Y| = \sqrt{\Delta}$
 $n - n + Y = \sqrt{\Delta}$

$P_m = Y - \sqrt{\Delta}$
 $x = 1 - \frac{\sqrt{\Delta}}{r}$ گھر
 $n < Y$ $x - n + Y = \sqrt{\Delta}$
 $r = \sqrt{\Delta}$ گھر

$x > Y$
 $x + x - Y = \sqrt{\Delta}$
 $\rightarrow P_m = Y + \sqrt{\Delta}$
 $x = 1 + \frac{\sqrt{\Delta}}{r}$ گھر

$M \mid 1 - \frac{\sqrt{\Delta}}{r}$ $M \mid 1 + \frac{\sqrt{\Delta}}{r}$ $Y - \sqrt{\Delta}$

$AB \in M \mid \frac{-10 - 10}{r} z - \frac{10}{r} - 1$
 $\frac{-10 + 10}{r} z - \Delta$
 $m_{MC} = \frac{1 - (-\Delta)}{r - (-\frac{10}{r})} = \frac{1}{\frac{10}{r}} = \frac{r}{10}$
 $y - 1 = \frac{1}{10}(x - 10) \rightarrow 10y - 10 = 10x - 10y$
 $\rightarrow 10x - 19y - 10 = 0$
 CM یک جزو

$BH = \frac{|10(-10) - 10(10) - 10|}{\sqrt{10^2 + 10^2}} = \frac{110}{\sqrt{200}} = \frac{110}{10\sqrt{2}}$

$\frac{-10 + 10}{r} z = \frac{-10 + 10}{r}$ یک جزو
 $\frac{Y + y_D}{r} = \frac{-10 + 1}{r}$
 $\frac{-10 + x_D}{r} = -V$ $x_D = -r$
 $\frac{Y + y_D}{r} = -10$ $y_D = -10$

تابع

۱ آشنایی بیشتر با تابع

۲ انواع توابع

۳ وارون تابع

۴ اعمال روی توابع



فصل



مفهوم تابع در ریاضیات و علوم مختلف دارای کاربردهای فراوانی است. تابع در دنیای واقعی برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. به طور نمونه قد متوسط کودکان را می‌توان به صورت یک تابع رادیکالی مانند $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ نمایش داد.



دانلود جزوه
نمونه سوال
گام به گام

dourkhiz.com

آنالیز پیش‌نمونه تابع

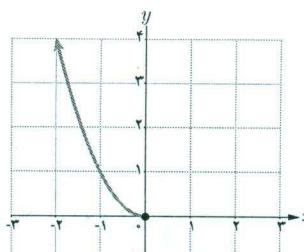
درس

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B ، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A ، دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود. A را هم‌دامنه تابع و B را هم‌دامنه تابع می‌نامند. برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه است.

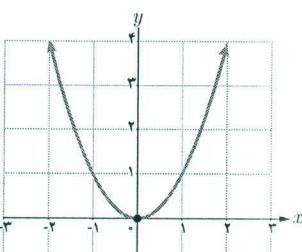
کاردر کلاس

الف) با توجه به توابع داده شده در جدول زیر، مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است و جدول را نیز کامل کنید. شباهت‌ها و تفاوت‌های نمودارها را با هم مقایسه کنید.

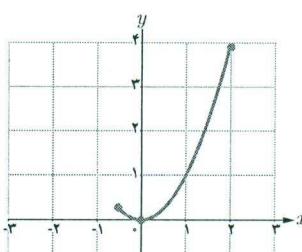
تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$t(x) = x^2$	$s(x) = x^2$	$k(x) = x^2$
دامنه تابع	\mathbb{R}	$\{-1, 1, 2\}$	$(-2, 2]$	\mathbb{R}	$(-\infty, 0]$	$[-\frac{1}{2}, 2]$
برد تابع	\mathbb{R}	$\{-2, 2, 6\}$	$\{-4, 4\}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$	$[0, 4]$



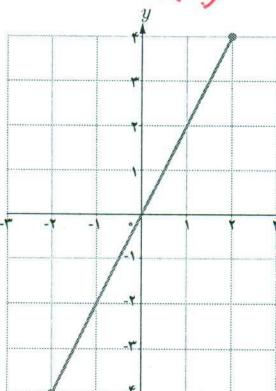
$s(x)$



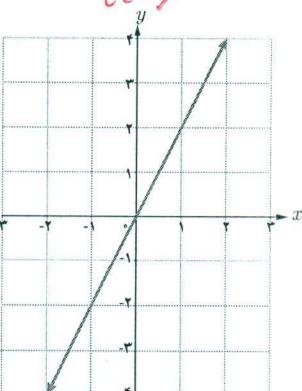
$t(x)$



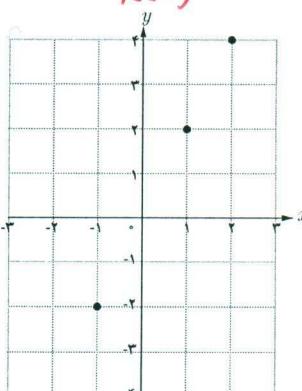
$k(x)$



$h(x)$



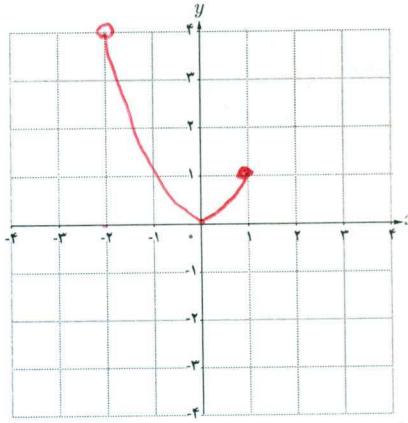
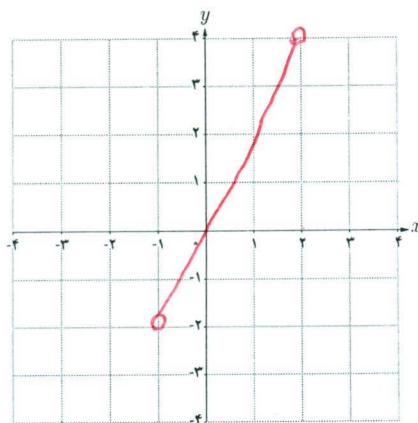
$f(x)$



$g(x)$

فصل دوم: تابع ۳۹

تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = x^3$	ب) جدول روبه رو را به دلخواه (متفاوت از قسمت الف) کامل و نمودار هر
دامنه	(-۱, ۲)	(-۲, ۱)	تابع را رسم کنید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. چند پاسخ
برد	(-۲, ۴)	(۱, ۴)	متفاوت برای f و g می‌توان ارائه کرد؟ ج) اختصار



برای مشخص بودن یک تابع باید دامنه، هم‌دامنه و دستور یا قاعده‌ای که نحوه ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم‌دامنه را نشان می‌دهد معلوم باشد.

به طور مثال تابع f در قسمت الف کار در کلاس قبل، تابعی است با دامنه \mathbb{R} و هم‌دامنه آن نیز $x \neq 2$ است. برای سادگی و اختصار این تابع را به صورت مقابل نمایش می‌دهند:

$$\text{تابعی از } \mathbb{R} \text{ به } \mathbb{R} \text{ است.} \quad \begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2x \end{cases}$$

به همین ترتیب تابع h قسمت الف را می‌توان چنین نمایش داد.

تابع h را به صورت مقابل هم می‌توان معرفی کرد.

در هر دو نمایش اخیر تابع h ، دامنه مجموعه $[-2, 2] \setminus \{-4, 4\}$ و ضابطه آن $h(x) = 2x$ است. در نمایش اول هم‌دامنه $[-4, 4] \setminus \{-2, 2\}$ است که همان برد تابع است. در نمایش دوم h ، هم‌دامنه را \mathbb{R} در نظر گرفته‌ایم. در این حالت نیز برد تابع $[-4, 4]$ است.

هم‌دامنه تابع را می‌توان هر مجموعه دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت.

کاردر کلاس

برای تابع $f: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ کدام یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟ **ب) و c)**

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

(الف) **X**

$$\begin{cases} f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow [0, \frac{1}{9}] \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

(ب) **✓**

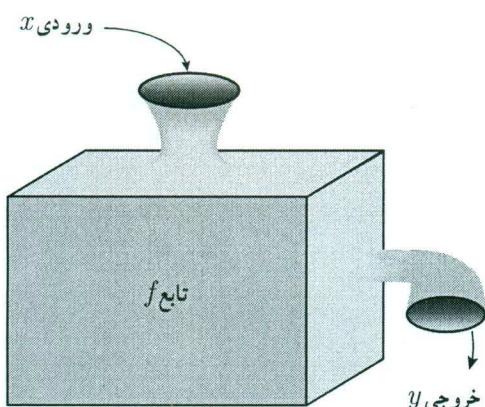
$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \frac{1}{9}] \\ f(x) = x \end{cases}$$

(پ) **X**

$$\begin{cases} f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

(ت) **✓**

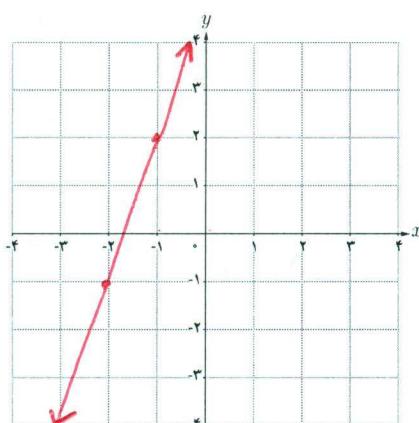
تابع به عنوان یک ماشین



می‌توان تابع را همچون ماشینی در نظر گرفت که یک ورودی را دریافت می‌کند و در ازای آن یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنه داده می‌شوند و خروجی‌ها به برد تعلق دارند و برای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد (البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسانی داشته باشند). اگر x عنصری دلخواه از دامنه f و y نمایش خروجی نظری آن باشد، x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می‌نامند.

در این صورت می‌نویسیم : $y = f(x)$

کاردر کلاس



فرض کنید ماشین f به عنوان ورودی، اعداد (حقیقی) را قبول می‌کند و پس از دریافت هر عدد، آن را سه برابر و سپس ۵ واحد به آن اضافه می‌کند. در این صورت به ازای ورودی 10 ، خروجی 35 را می‌دهد. به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) ماشین به ازای ورودی -2 ، چه خروجی خواهد داشت؟ **-1**

ب) اگر خروجی ماشین 4 باشد ورودی آن چقدر بوده است؟ **$2x + a = 4$**

پ) نمایش تابع به صورت $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ است. **$f(x) = 2x + a$**

ت) نمودار تابع رارسم و دامنه و برد آن را معلوم کنید.

$$D = \mathbb{R} \quad \text{بر}: \mathbb{R}$$

۴۱ فصل دوم: تابع

تساوی دو تابع

اگر نمودارهای دو تابع در یک دستگاه مختصات داده شده باشند، هنگامی این دو تابع باهم برابرند که نمودارهای آنها کاملاً برابر هستند. به طور مثال هیچ کدام از توابع داده شده در قسمت الف کار در کلاس صفحه ۳۸ با یکدیگر برابر نیستند. اگر دو تابع به صورت مجموعه زوج های مرتب داده شده باشند، هنگامی باهم برابرند که به عنوان دو مجموعه باهم برابر باشند.

دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه:

الف) دامنه f و دامنه g باهم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$:

$D_f \neq D_g$ مثال: تابع های $f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = |x|$ باهم برابرند ولی تابع های $f(x) = \frac{x}{x}$ و $g(x) = 1$ برابر نیستند. چرا؟
 $D_g = \mathbb{R}$ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

کار در کلاس

در جدول زیر کدام یک از توابع داده شده زیر باهم برابرند؟ دلیل بیاورید:

۱	$f = \{(1, 2), (5, 7)\}$	$g = \{(1, 7), (5, 2)\}$	$\rightarrow f(1) \neq g(1) \leftarrow \text{اما } D_f = D_g$
۲	$f = \{(a, b), (c, d)\}$	$g = \{(c, d), (a, b)\}$	\rightarrow f رو برابرند
۳	$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2x \end{cases}$	$\begin{cases} g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = 2x \end{cases}$	$\rightarrow D_f \neq D_g$
۴	$f(x) = x x $	$g(x) = x^3$	$\rightarrow f(-1) \neq g(-1) \leftarrow \text{اما } D_f = D_g$
۵	$f(x) = 4x$	$g(x) = \frac{8x}{2}$	\rightarrow f رو برابرند

وقتی در آسمان پدیده آذربخش رخ می دهد، اندکی پس از دیدن نور آن صدای آن را نیز می شنویم. صدای ناشی از آذربخش هر ۳ ثانیه حدود یک کیلومتر را طی می کند. رابطه بین فاصله ما از مکان وقوع آذربخش و زمانی که طول می کشد تا صدای آن را شنویم در جدول زیر (برای برخی زمان ها) داده شده است، اگر $t \in [4, 12]$:

الف) جدول را کامل کنید:

(ثانیه) t	۴	$\frac{4}{2}$	۵	۶	۸	۹	$\frac{10}{5}$	۱۱	۱۲
(کیلومتر) h	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	۲	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{10}{5}$	$\frac{11}{3}$	۴

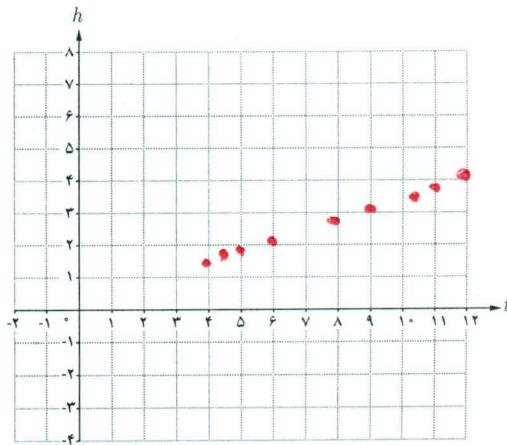
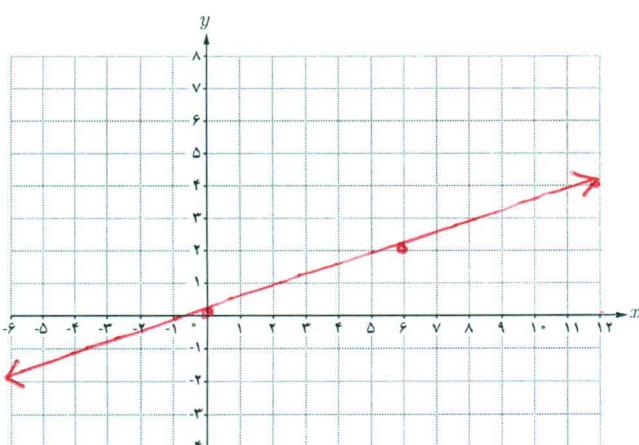
ب) چرا h تابعی از t است؟ پلای هر زمان t فقط یک مقدار h وجود دارد

پ) دامنه و برد این تابع را بنویسید.

ت) نمایش مقابله از تابع h کامل کنید:

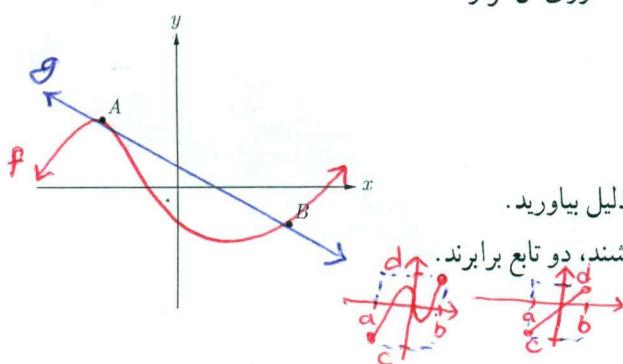
$$\begin{cases} h: [4, 12] \rightarrow [4, 12] \\ h(t) = \frac{1}{t} t \end{cases}$$

ث) نمودار تابع h و نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را رسم کنید و شباهت‌ها و تفاوت‌های آنها را بیان کنید.



تمرین

۱ در صفحه مختصات رو به رو تابعی رسم کنید که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟ **بی شمار**



۲ کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.

الف) اگر دامنه دو تابع باهم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند. **X خود گذشت**

ب) برد و هم دامنه تابع می‌توانند یکی باشند. **✓**

ب) هم دامنه تابع زیر مجموعه‌ای از برد آن است. **X**

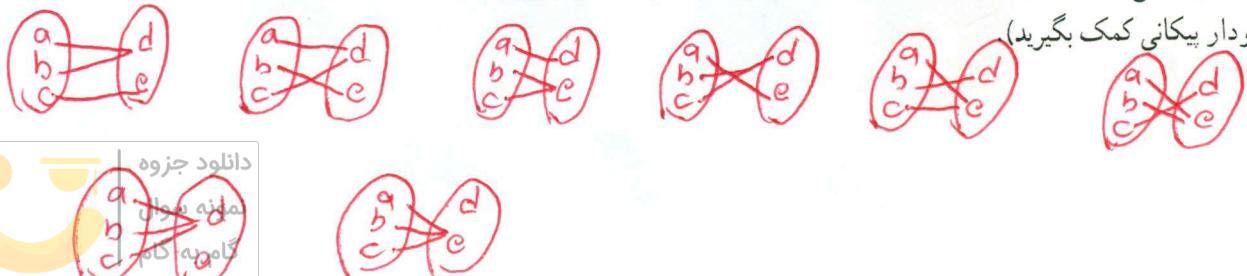
ت) بی شمار تابع وجود دارد که دامنه آن بازه $[3, \infty)$ است. **✓**

۳ تابعی مثل بزنید که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. چه تعداد از این

توابع وجود دارند؟ **بی شمار**

۴ همه تابع‌های از مجموعه $A = \{a, b, c\}$ به مجموعه $B = \{d, e\}$ را بنویسید (از

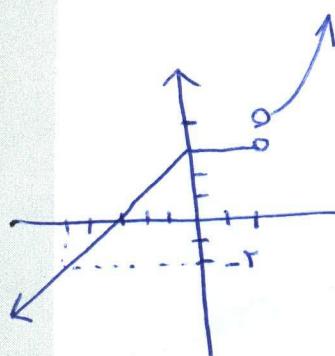
نمودار پیکانی کمک بگیرید).



۴۳ فصل دوم: تابع

۵ تابع‌های مساوی را مشخص کنید.

$$\begin{array}{ll}
 \left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = |x| \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} r: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ r(a) = 5a \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = 5x \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s(a) = 5a \end{array} \right. \\
 h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & t: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\
 h(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} & t(x) = 5x
 \end{array}$$



۶ تابع f در همه شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $3 < f(2) < 2$ و $-2 < f(-5) < 3$.
ب) f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور x را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند.

۷ با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخوان بازو (از آرنج تاشانه) می‌توان طول قد یک انسان بزرگ سال را برآورد کرد:

$$m(38) = 218 \times 38 + 70/48 = 171/79 \text{ (اعدا)}$$

$$185 = 218x + 70/48 \quad (\text{ب})$$

$$\begin{aligned} M(x) &= 218x + 70/48 \\ F(x) &= 218x + 70/48 \end{aligned}$$

$$x = \frac{185 - 70/48}{218} = \frac{114,34}{218} \approx 39,157 \text{ cm}$$

که در آنها x طول استخوان بازو برحسب سانتی‌متر است.

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی‌متر باشد، طول قد او چقدر است؟

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی‌متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟

تابع خطی برای مردان

تابع خطی برای زنان

خواهد بود

نتایج یک مطالعه در مورد قد مردان و زنان از سال ۱۹۱۴ تا ۲۰۱۴ نشان می‌دهد که میانگین قد مردان ایرانی در طی این صد سال از $157/1$ به $173/6$ سانتی‌متر و میانگین قد زنان ایرانی از $148/5$ به $159/7$ سانتی‌متر رسیده است. مردان ایرانی بیشترین افزایش طول قد در دنیا را در ۱۰۰ سال اخیر داشته‌اند.



توابع توان



شما تاکنون با توابع مختلفی آشنا شده‌اید. توابع در دنیای واقعی دارای کاربردهای زیادی هستند. تابع‌های ثابت، تابع‌های همانی، تابع‌های خطی و به طور کلی توابع چند جمله‌ای نمونه‌هایی از توابعی هستند که در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این درس با انواع دیگری از توابع مهم و مفید آشنا می‌شویم.

توابع گویا

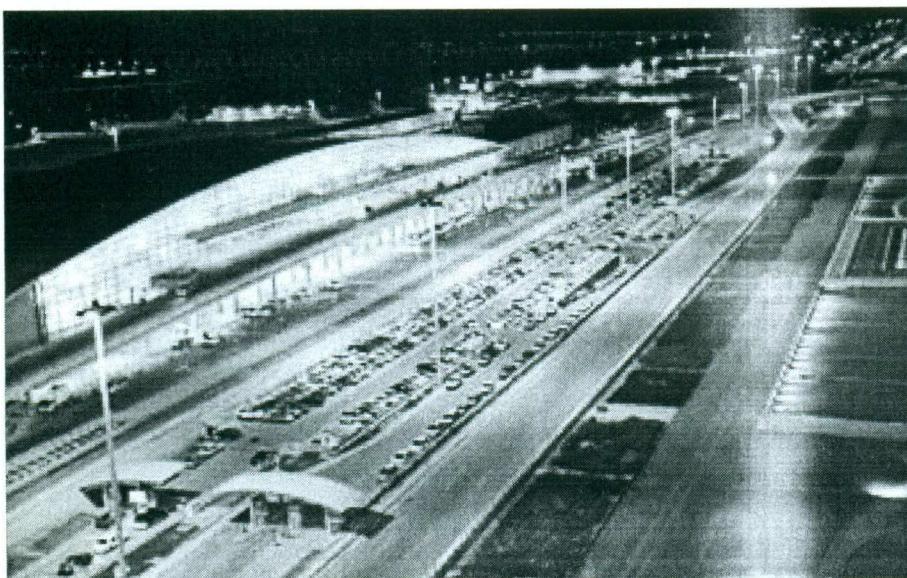
هر تابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

توابع زیر همگی گویا هستند:

$$f(x) = \frac{5}{x+2}$$

$$g(x) = \frac{\frac{1}{3}x - 4}{x^2 - 7x + 1}$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{5}x + 2}{x^3 + 1}$$



حاج لندنی

توابع گویا در دنیای واقعی کاربردهای فراوانی دارند. به طور مثال میانگین تعداد وسائل نقلیه‌ای که در یک صف منتظر ورود به یک پارکینگ هستند از تابع گویای $f(x) = \frac{x^2}{2(1-x)}$ بدست می‌آید که در آن x شدت ترافیک و عددی بین صفر و یک است.

فروندگاه امام خمینی (ره)

مشخص کنید که هر نمودار زیر متناظر با کدام تابع است؟ دلیل بیاورید.

$$\left\{ \begin{array}{l} f \\ g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

(الف)

$$\left\{ \begin{array}{l} g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

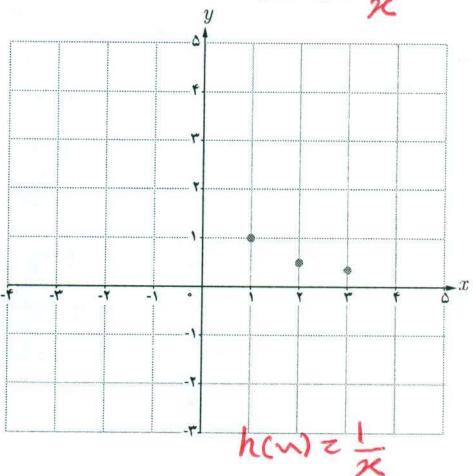
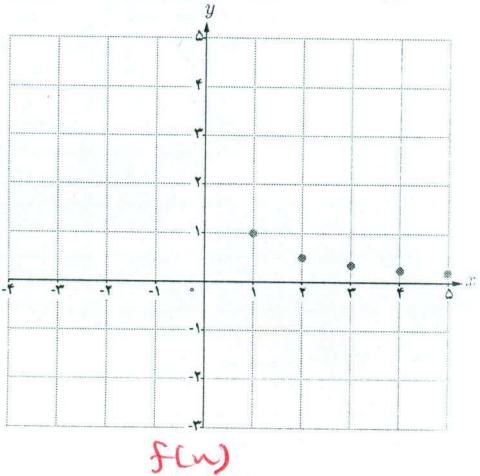
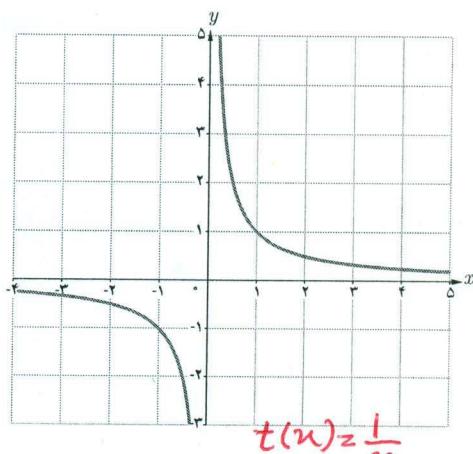
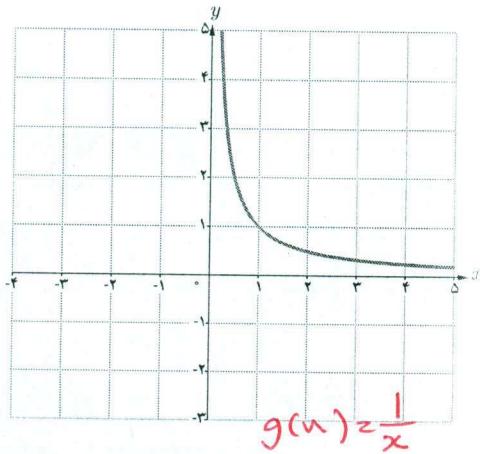
(ب)

$$\left\{ \begin{array}{l} h: \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

(پ)

$$\left\{ \begin{array}{l} t: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ t(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

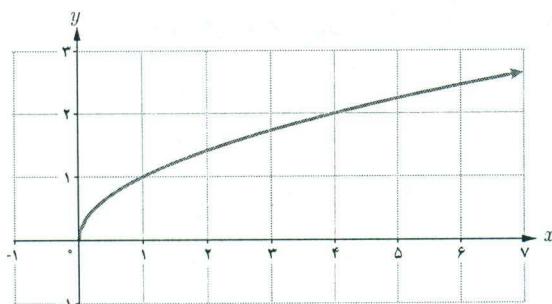
(ت)



دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است، اما ممکن است دامنه را به مجموعه‌های دیگری محدود کنیم. دامنه f را با D_f نمایش می‌دهیم. دامنه یک تابع گویا مجموعه همه مقادیری است که به‌ازای آنها، عبارت جبری گویای نمایش دهنده ضابطه تابع، تعریف شده

باشد؛ مثلاً دامنه تابع $f(x) = \frac{5}{x+2}$ مجموعه $\{-2\}$ است.

تابع رادیکالی (تابع ریشه دوم)

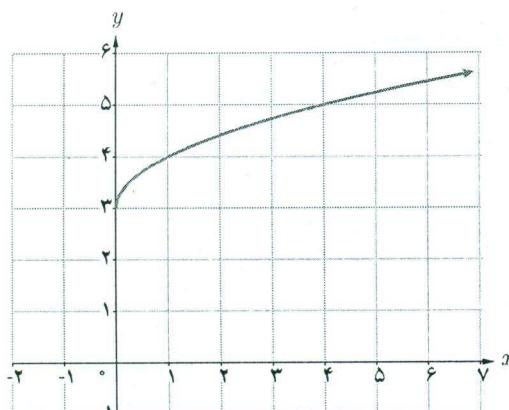


تابعی را که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت می‌دهد تابع ریشه دوم می‌نامند و به صورت $y = \sqrt{x}$ یا $f(x) = \sqrt{x}$ نمایش می‌دهند. نمودار تابع در شکل نشان داده شده است. دامنه و برد این تابع، بازه $(-\infty, +\infty]$ است. تابع $f(x) = \sqrt{x}$ یک تابع رادیکالی است.

کار در کلاس

به کمک نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ نمودار چهار تابع :

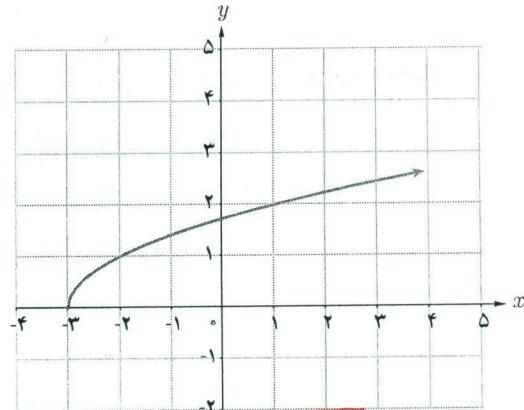
الف) $f(x) = \sqrt{x} + 3$ ، ب) $h(x) = \sqrt{x} - 3$ ، پ) $g(x) = \sqrt{x-3}$ ، ت) $r(x) = \sqrt{x+3}$
رسم شده‌اند. تابع مربوط به هر نمودار را مشخص و دامنه و برد آن را معلوم کنید.



$$f(x) = \sqrt{x} + 3$$

$$D = [0, \infty)$$

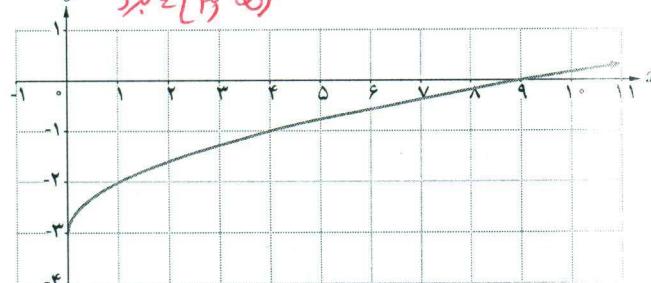
$$\text{برد} = [3, \infty)$$



$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

$$D = [-3, \infty)$$

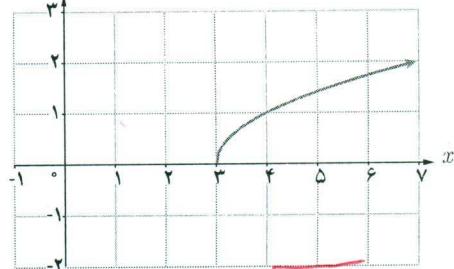
$$\text{برد} = [0, \infty)$$



$$h(x) = \sqrt{x} - 3$$

$$D = [0, \infty)$$

$$\text{برد} = [-3, \infty)$$



$$g(x) = \sqrt{x-3}$$

$$D = [3, \infty)$$

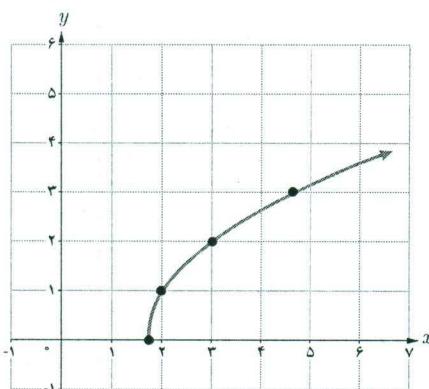
$$\text{برد} = [0, \infty)$$



دانلود جزوه
نمونه سوال
گام به گام

۴۷ فصل دوم: تابع

x	$\frac{5}{3}$	۲	۳	۴	$\frac{14}{3}$
$f(x)$	۰	۱	۲	$\sqrt{7}$	۳



مثال: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{3x - 5}$ برابر مجموعه همه اعدادی است که برای آنها $3x - 5 \geq 0$ یا $x \geq \frac{5}{3}$

$$D_f = \left[\frac{5}{3}, +\infty \right)$$

برایین تابع نیز مجموعه اعداد نامنفی است

$$R_f = [0, +\infty)$$

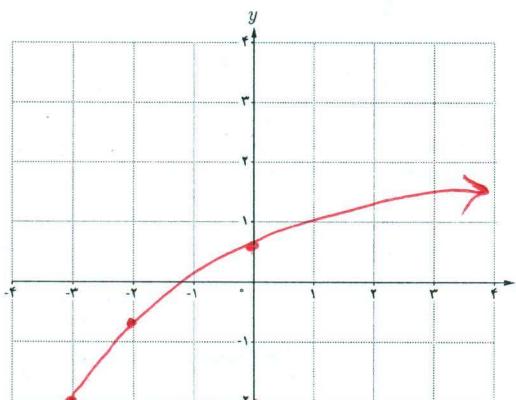
در جدول، مقادیر تابع f به ازای چند عدد در دامنه آن مشخص و نمودار تابع نیز در زیر جدول رسم شده است.

کاردر کلاس

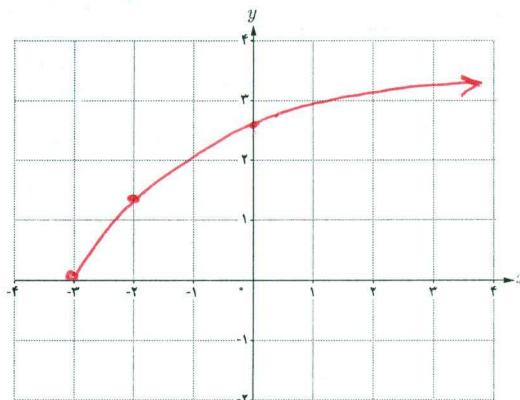
$$2x+6 > 0 \quad 2x > -6 \quad x > -3 \quad D_f = [-3, \infty)$$

(الف) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2x+6}$ را به دست آورید. سپس به کمک نقطه‌یابی نمودار آن را رسم کرده و برای تابع رانیز معلوم کنید.

(ب) نمودار تابع $g(x) = \sqrt{2x+6} - 2$ را به کمک انتقال رسم کنید.



$$\text{ب} \quad D: [-3, \infty)$$



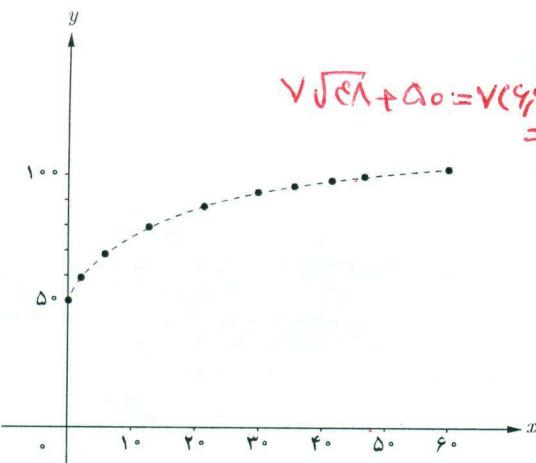
$$\text{الف} \quad D: [-3, \infty)$$

فالیت

تابع $f(x) = \sqrt{7x+5}$ قد متوسط کودکان را، به تقریب، و بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد. x نشان‌دهنده ماههای پس از تولد است. در حالت کلی دامنه این تابع رادیکالی بازه $(-\infty, 0]$ است ولی در این مثال که واقعی است دامنه آن بازه $[0, 60]$ می‌باشد.

الف) جدول زیر را کامل کنید. در همین صفحه با استفاده از این جدول نمودار تقریبی f را رسم کرده‌ایم.

x	۰	۱	۴	۱۰	۱۶	۲۵	۳۰	۳۶	۴۹	۶۰
$f(x)$	۵۰	$5\sqrt{5}$	$6\sqrt{4}$	$7\sqrt{10}$	$7\sqrt{16}$	۸۵	$8\sqrt{8/3}$	۹۲	$9\sqrt{9}$	$10\sqrt{4/2}$



[۰, ∞)

ب) برد این تابع چیست؟

پ) قد یک کودک چهار ساله تقریباً چقدر است؟

ت) با استفاده از ضابطه تابع یا نمودار آن مشخص کنید

که کودکی با قد ۷۵ سانتی متر حدوداً چند ماهه است.

$$\sqrt{a} = \sqrt{\sqrt{x} + 50}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{x}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{x} \quad x = 12, \sqrt{4}$$

معادلات و توابع

معادلاتی که دارای دو متغیر مانند x و y هستند یک رابطه را نشان می‌دهند؛ مثلاً معادله $x+y=2$ شامل همه زوج‌های مرتبی است که مجموع مؤلفه‌های آنها برابر ۲ است. نمودار این معادله یک خط است. این معادله را به صورت $y = -x + 2$ یا $f(x) = -x + 2$ نیز نمایش می‌دهند. بسیاری از توابع با یک معادله بیان می‌شوند، اما ازاماً یک معادله با دو متغیر بر حسب x و y یک تابع را مشخص نمی‌کند.

مثال

الف) در معادله $4 = -x^2 + y$ ، y را بر حسب x به دست آورید. آیا y تابعی از x است؟

حل : داریم $y = x^2 + 4$. این معادله یک سهمی را مشخص می‌کند که همان تابع $f(x) = x^2 + 4$ است.

ب) آیا در معادله $4 = x - y^2$ ، y تابعی از x است؟

حل : اگر y را بر حسب x به دست آوریم داریم : $y = \pm\sqrt{x-4}$ به ازای $x=5$ داریم : $y = \pm 1$. یعنی فقط نقاط $(5, 1)$ و

$(5, -1)$ روی نمودار تابع قرار دارند. بنابراین، این معادله یک تابع را نمایش نمی‌دهد.

کدام یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟ دلیل بیاورید.

$$\text{تابع هست} \quad y = |x| + 1 \quad (\text{الف})$$

$$\text{تابع نیست} \quad y = |y| + 1 \quad (\text{ب}) \quad (\text{د} - \text{ر} - \text{ر} - \text{ر})$$

$$x = a \rightarrow y = \pm c \quad \text{حفره ایان} \quad \text{تابع مرد حاره}$$

تابع پله‌ای - تابع جزء صحیح

هزینه ارسال بسته‌های پستی به طور معمول تابعی از وزن آنهاست. هزینه توقف خودرو در یک پارکینگ نیز تابعی از زمان توقف است. در فعالیت زیر با نمونه‌ای از این توابع آشنا می‌شویم.

هزینه ارسال یک بسته پستی به مقصدی معین در جدول زیر داده شده است.

x (وزن بسته) کیلوگرم	$0 < x \leq 2$	$2 < x \leq 5$	$5 < x \leq 10$	$10 < x \leq 12$
$f(x)$ (هزینه ارسال) بر حسب هزار تومان	۵	۱۰	۱۷	۲۰

$$f(x) = \begin{cases} 5 & 0 < x \leq 2 \\ 10 & 2 < x \leq 5 \\ 17 & 5 < x \leq 10 \\ 20 & 10 < x \leq 12 \end{cases}$$

اگر حداقل وزن بسته‌های ارسالی ۱۲ کیلوگرم باشد،

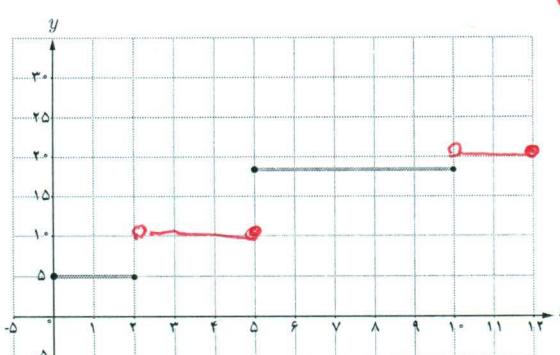
(الف) ضابطه تابعی را که جدول فوق نشان می‌دهد بنویسید
 $D = \boxed{[20, 12]}$
 و دامنه و برد آن را بدست آورید:

(ب) برای ارسال دو بسته به وزن‌های ۹ کیلوگرم و

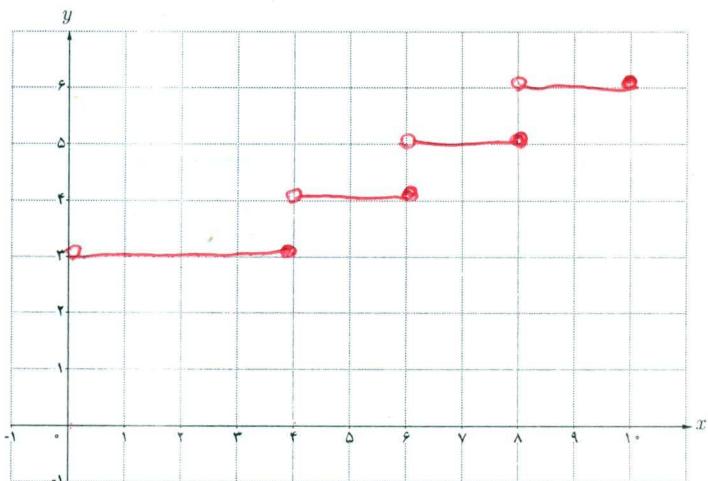
$$11/5 \text{ کیلوگرم} \quad ? \quad 11/5 + 20 = 37$$

(پ) قسمتی از نمودار این تابع در شکل رویه را رسم شده است. بقیه نمودار را رسم کنید.

توابعی مانند تابع فوق را که بتوان دامنه آنها را به تعدادی بازه تقسیم کرد به گونه‌ای که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت باشد، تابع پله‌ای می‌نامند.



- ۱ پارکینگ یک مجتمع تفریحی - ورزشی برای چهار ساعت اول توقف یک خودرو ۳ هزار تومان و برای هر دو ساعت اضافه یا زمانی کمتر از آن ۱۰۰۰ تومان دریافت می‌کند. اگر حداقل مدت توقف در این پارکینگ ده ساعت باشد، نمودار تابع را که هرینه توقف را بهازای همه ساعت ممکن نشان دهد رسم کنید. دامنه و برد تابع را نیز مشخص کنید.

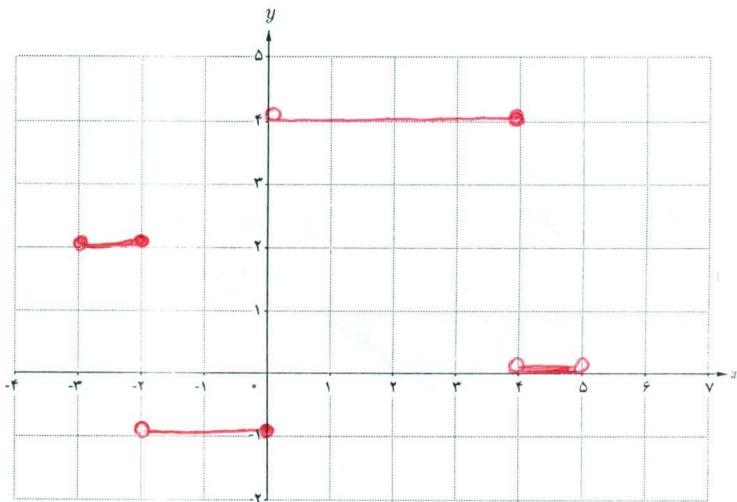


$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 < x \leq 4 \\ 4 & 4 < x \leq 6 \\ 5 & 6 < x \leq 8 \\ 6 & 8 < x \leq 10 \end{cases}$$

$$D = [0, 10]$$

$\{3, 4, 5, 6\}$: برد

- ۲ نمودار تابع پله‌ای زیر را رسم کنید :

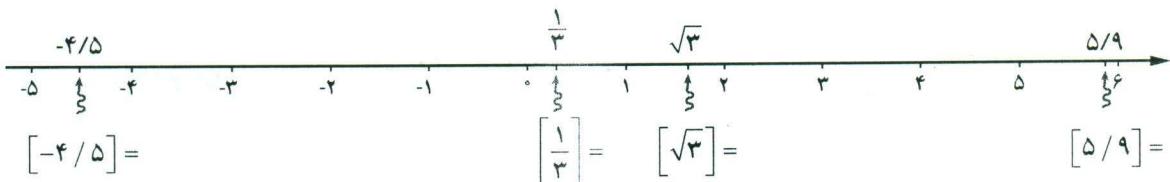


گونه خاصی از توابع پله‌ای که دارای کاربردهای زیادی نیز هست تابع جزء صحیح نام دارد. ابتدا با جزء صحیح یک عدد آشنا می‌شویم.

برای هر عدد حقیقی مانند x ، جزء صحیح آن بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم، به طور مثال $-3 = [-2/8]$ و $3 = [3/49]$. مطابق با تعریف، جزء صحیح یک عدد همواره $x \leq [x]$. اگر x یک

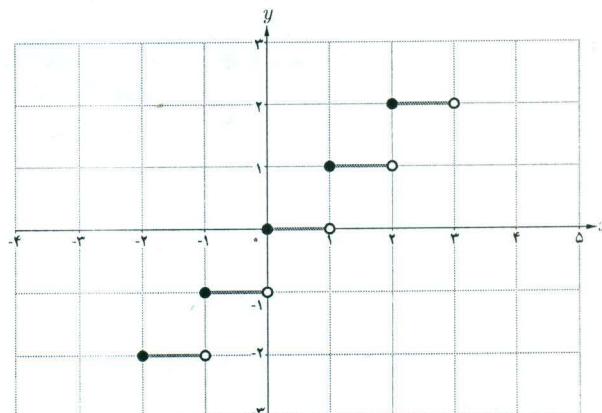
۵۱ فصل دوم: تابع

عدد صحیح باشد $x = [x]$. جزء صحیح اعداد نشان داده شده روی محور را باید.



تابعی که به هر عدد حقیقی x , جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و آن را به صورت $[x]$ نمایش می‌دهند. $R_f = \mathbb{Z}$ و $D_f = \mathbb{R}$. نمودار تابع با توجه به جدول در بازه $(-2, 3]$ رسم شده است.

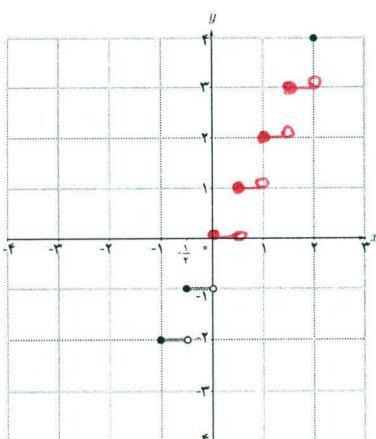
x	$y = [x]$
$-2 \leq x < -1$	$y = -2$
$-1 \leq x < 0$	
$0 \leq x < 1$	
$1 \leq x < 2$	
$2 \leq x < 3$	



کار در کلاس

نمودار تابع $f(x) = [2x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید (جدول و نمودار داده شده را کامل کنید).

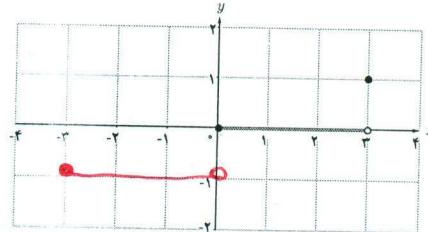
$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4$$



$2x$	$-2 \leq 2x < -1$	$-1 \leq 2x < 0$	$0 \leq 2x < 1$	$1 \leq 2x < 2$	$2 \leq 2x < 3$	$3 \leq 2x < 4$
$[2x]$	-2	-1	0	1	2	3
x	$-1 \leq x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \leq x < 0$	$0 \leq x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \leq x < 1$	$1 \leq x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} \leq x < 2$

نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{1}{3}x \right]$ را در بازه $[-3, 3]$ رسم کنید (کامل کنید).

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{3}x < 1 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{3}x \right] = 0 \\ 0 \leq x < 3 \end{array} \right. \\ -1 \leq \frac{1}{3}x < 0 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{3}x \right] = -1 \\ -3 \leq x < 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$



تمرین

۱ دامنه توابع زیر را باید.

الف) $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$
 $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

ب) $f(x) = \frac{-3x}{x^2 + 1}$
 $D_f = \mathbb{R}$

پ) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+x-12}$
 $D_f = \mathbb{R} - \{3, -4\}$

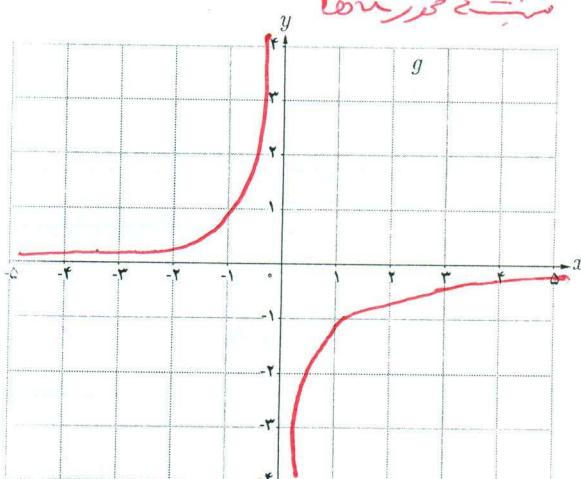
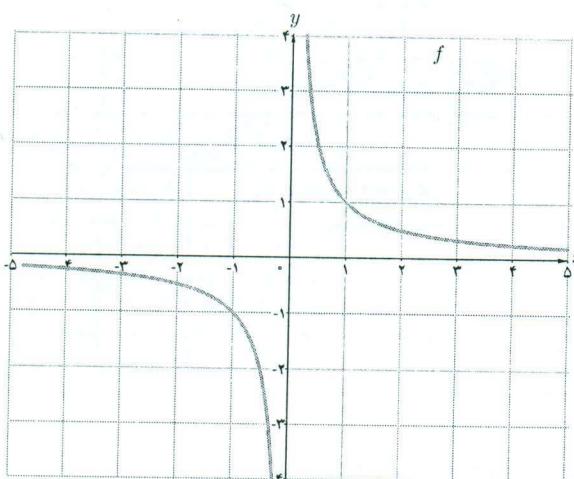
$$\begin{cases} u+3 \neq 0 \\ u-4 \neq 0 \\ u = 3 \end{cases} \Rightarrow u \neq -3, 4$$

ت) $f(x) = \sqrt{3x+1}$
 $D_f = \left[-\frac{1}{3}, \infty \right)$

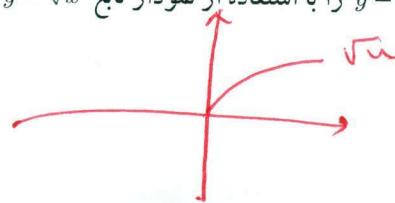
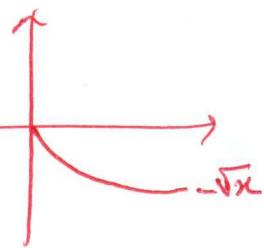
ث) $f(x) = 2\sqrt{x-3}$
 $D_f = [3, \infty)$

ج) $f(x) = \sqrt{8-x}$
 $D_f = (-\infty, 8]$

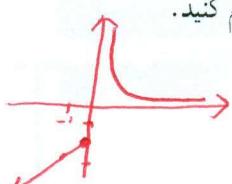
۲ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x) = -\frac{1}{x}$ را رسم کرد.
 نظر و ازچینه کرد نمودار f سنت محور x های بر سر آید چون g مکارهای این محور را روی مکارهای x است



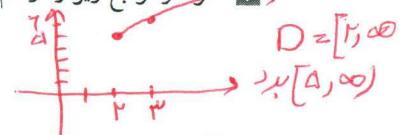
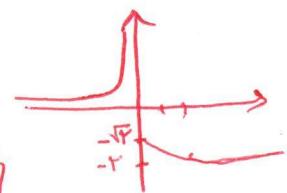
۳ نمودار تابع $y = -\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.



فصل دوم: تابع

 $D=R$ (الف) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x-2 & x \leq 0 \end{cases}$ برد

نمودار توابع زیر رارسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

(ب) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & x > 0 \\ \sqrt{x+2} & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$ برد(الف) $2x+2y=12$ کامیاب ✓(ب) $x=1$ کامیاب ✓(پ) $y=-2$ کامیاب ✗(ب) $f(x) = \sqrt{x-2} + 5$ (ت) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ -\sqrt{x+2} & x \geq 0 \end{cases}$ برد

کدام یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟



۶ هزینه پاکسازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای، به وسیله تابع $f(x) = \frac{255x}{100-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاکسازی بر حسب میلیون تومان است.

(الف) هزینه پاکسازی ۵۰٪ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟

(ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

$$100-x > 0 \quad x < 100$$

اعمال

نمودار توابع‌های زیر رارسم کنید.

(الف) $f(x) = [x]+1$, $-2 \leq x < 3$ (ب) $f(x) = [\frac{1}{2}x]$, $-4 \leq x < 4$

صفحه دیگر

۷ نمودارهای دو تابع $y = [x]-3$ و $y = [x]+1$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟

صفحه دیگر

۸ اگر تعداد افرادی که، طی یک مدت معین، به وسیله یک نوع ویروس آلوده می‌شوند با دستور $n(t) = \frac{950t - 2000}{4+t}$ به دست آید که در آن $t > 0$ زمان بر حسب ماه است:

(الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟

(ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵٪ نفر خواهد رسید؟

صفحه دیگر

$$f(n) = [n] + 1 \quad -1 \leq n < 0$$

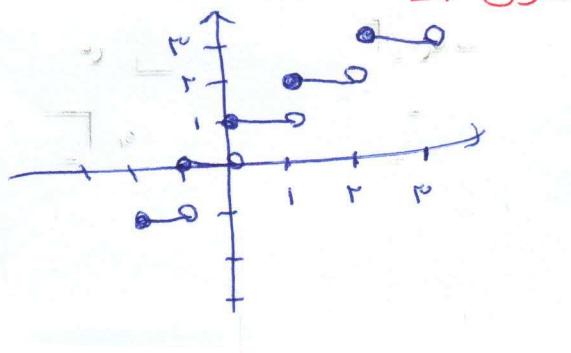
$$-1 \leq n < -1 \rightarrow [n] = -1 \rightarrow y = -1$$

$$-1 \leq n < 0 \rightarrow [n] = -1 \rightarrow y = 0$$

$$0 \leq n < 1 \rightarrow [n] = 0 \rightarrow y = 1$$

$$1 \leq n < 2 \rightarrow [n] = 1 \rightarrow y = 1$$

$$2 \leq n < 3 \rightarrow [n] = 2 \rightarrow y = 2$$



$$f(n) = \left[\frac{1}{2}n \right]$$

$$-2 \leq n < 2$$

$$-2 \leq n < -1$$

$$-2 \leq \frac{1}{2}n < -1 \rightarrow f(n) = -1$$

$$-1 \leq n < 0$$

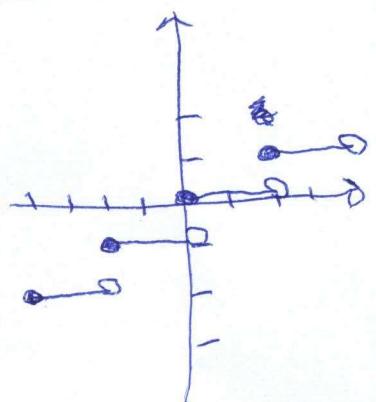
$$-1 \leq \frac{1}{2}n < 0 \rightarrow f(n) = 0$$

$$0 \leq n < 1$$

$$0 \leq \frac{1}{2}n < 1 \rightarrow f(n) = 1$$

$$1 \leq n < 2$$

$$1 \leq \frac{1}{2}n < 2 \rightarrow f(n) = 1$$



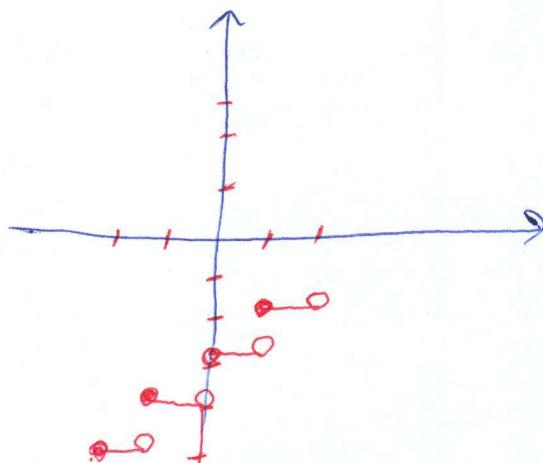
$$y = [n] - n$$

$$-1 \leq n < -1 \rightarrow y = -1$$

$$-1 \leq n < 0 \rightarrow y = -1$$

$$0 \leq n < 1 \rightarrow y = -1$$

$$1 \leq n < 2 \rightarrow y = -1$$



$$y = [n - 1]$$

$$y = -1$$

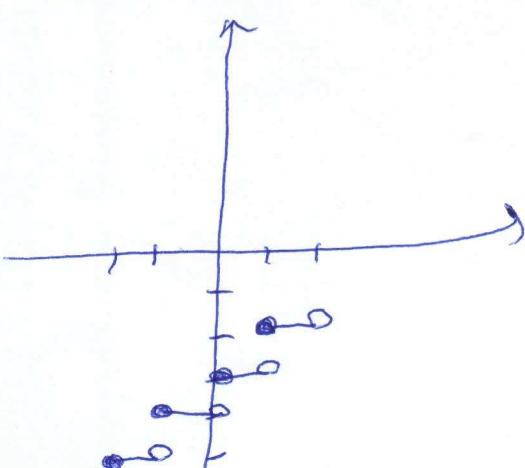
$$y = -1$$

$$y = -1$$

$$y = -1$$

$$-1 میل$$

$$\begin{aligned} -1 \leq n - 1 < -1 \\ -1 \leq n - 1 < -1 \\ -1 \leq n - 1 < -1 \\ -1 \leq n - 1 < -1 \end{aligned}$$



هر در تابع خود را که باز دارد

$$n(\omega) = \frac{9\omega_0 \times \omega - \nu_0}{\omega + \Delta} = \frac{\nu \omega_0 - \nu_0}{\omega} = \frac{\nu \Delta \omega_0}{\omega} = \omega_0 \Delta \quad \text{سکل ۹ - اف}$$

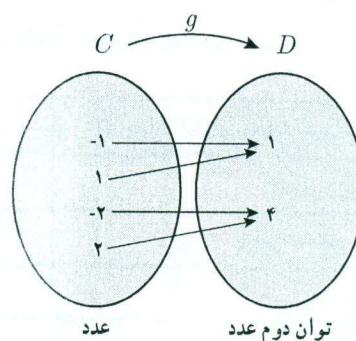
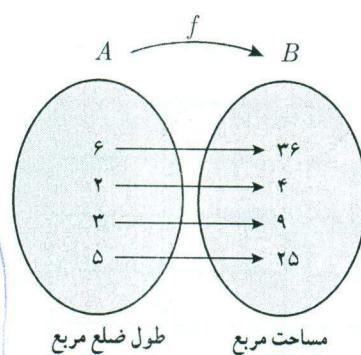
نفر



درس

فعالیت

دو تابع f و g را در نظر بگیرید:



الف) f و g را به صورت زوج های مرتب نمایش دهید و دامنه و برد هر یک را بنویسید.

$$f = \{(9, 36), (5, 25), (3, 9), (2, 4)\}$$

$$g = \{(-1, 1), (1, 4), (-2, 4)\}$$

$$D_f = \{4, 2, 3, 5\}$$

$$R_f = \{36, 4, 9, 25\}$$

$$D_g = \{-1, 2, 1, -2\}$$

$$R_g = \{1, 4\}$$

ب) اگر جای دو مؤلفه هر زوج مرتب در f و g را عوض کنیم، روابط جدیدی به دست می آید. آنها را به ترتیب h و k بنامید. h را وارون رابطه های f و g می نامیم. h و k را به صورت مجموعه زوج های مرتب بنویسید.

$$h = \{(36, 9), (25, 4), (9, 3), (4, 2)\}$$

$$k = \{(-1, -2), (1, 2), (-2, 1), (2, -1)\}$$

کدام یک از رابطه های h و k تابع است؟ دلیل بیاورید. **تابع دلیل تابع نیست**

اگر رابطه بین دو مجموعه به صورت زوج های مرتب داده شده باشد، رابطه ای را که از جایه جایی دو مؤلفه هر زوج مرتب رابطه به دست می آید وارون آن رابطه می نامیم.

اگر f یک تابع باشد وارون آن را با f^{-1} نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$$

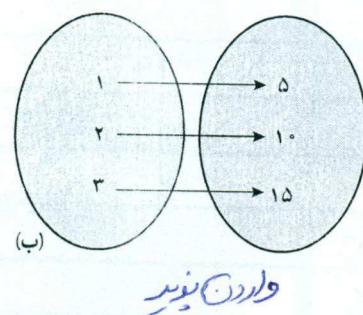
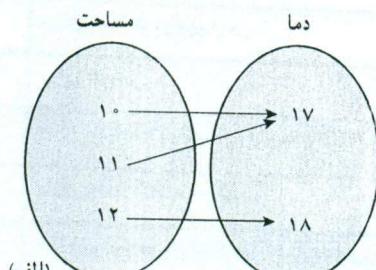
اگر f^{-1} تابع باشد آن گاه f را وارون بذر (معکوس بذر) و f^{-1} را «تابع وارون» f می نامیم.

توجه کنید که f^{-1} را نباید با $\frac{1}{f}$ اشتباه گرفت.

توابع یک به یک

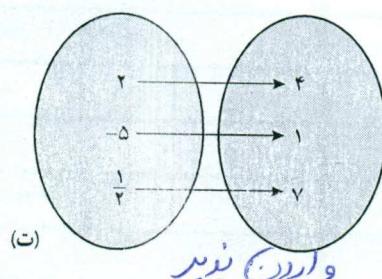
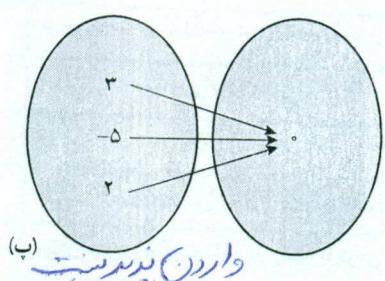
چه توابعی وارون پذیرند؟ در فعالیت قبل تابع f وارون پذیر بود ولی تابع g وارون پذیر نبود. بنابراین سؤال اساسی این است که یک تابع باید چه شرطی داشته باشد تا وارون پذیر باشد؟ **م طور کلی تابعی که در مدارک هر عضو فاصله بین از جبر تابع قطعه کنیم را از دامنه خارج شده باشد**

فعالیت



تابع زیر را در نظر بگیرید :

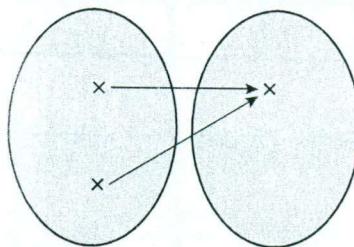
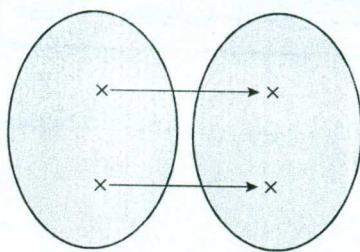
الف) کدام یک از آنها وارون پذیرند؟



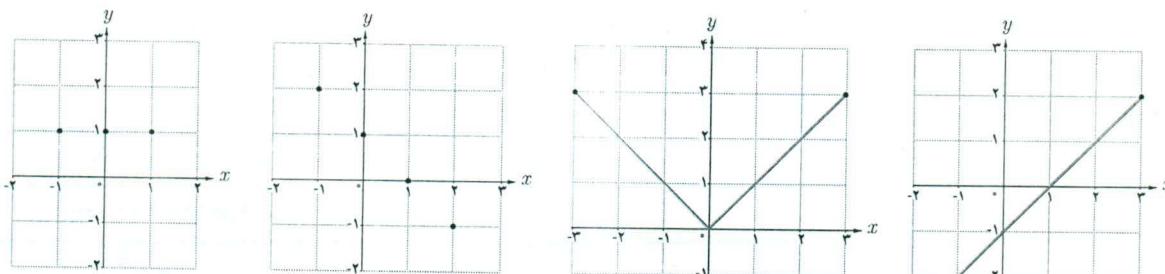
ب) ویژگی مشترک تابع وارون پذیر چیست؟

اگر f یک تابع باشد و به هر عنصر در برد دقیقاً یک عنصر از دامنه نظیر شود تابع وارون پذیر است. اگر تابعی چنین ویژگی داشته باشد آن را یک به یک نامیم. به عبارت دیگر تابع f یک به یک است هرگاه هر دو عنصر متمایز در دامنه، به دو عنصر متمایز در برد نظیر شوند.

همان گونه که در فعالیت بالا دیده شد، اگر تابعی یک به یک باشد آن گاه وارون پذیر است.

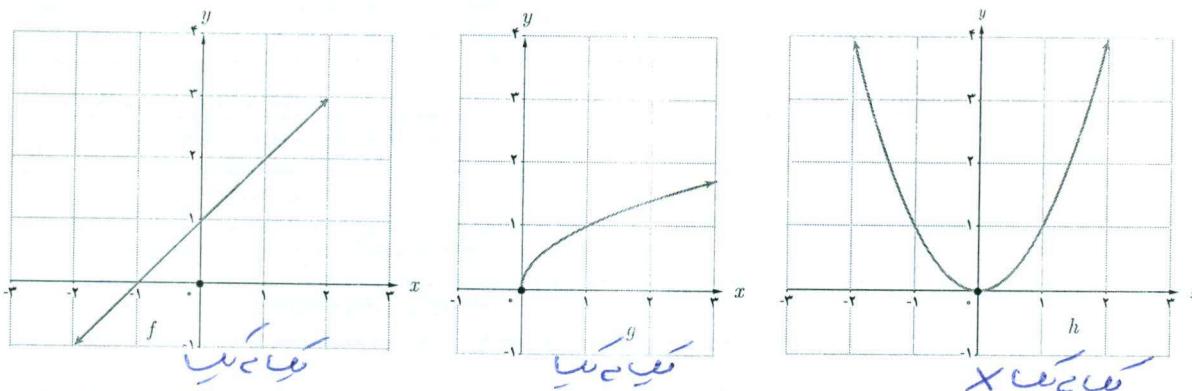


توابع داده شده در (الف) و (ب) یک به یک هستند ولی توابع داده شده در (ب) و (ت) یک به یک نیستند. چرا؟ توضیح دهید.



کد ۱۰۷) دو روش برای اثبات که تابع زیر یک به یک است معرفی می‌شود
 ۱) مفهوم از زمانه خطا و سورشاره
 ۲) آنکه هر خط موازی محور x را می‌گذراند
 به طور کلی می‌توان گفت که یک تابع در صورتی یک است که هر خط موازی محور x را، نمودار آن را حداقل در یک نقطه قطع کند.

۱ کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند؟



$$k = \{(1, 2), (3, 4), (8, 9)\}$$

$$l = \{(3, 7), (2, 5), (1, 5)\}$$

فرض کنید به هر یک از اعضای یک کلاس کد ملی آنها را نسبت دهیم. توضیح دهید که چگونه رابطه بین افراد و کد ملی آنها تابعی یک به یک را معلوم نمی‌کند. **مون** کرمی ها اعضای بدمحسوس. **خی شغف درامقار** ندارد **مع** کرمی متعلق به حرف فرا پیشتر باشد **مع** کرمی هر فقط سه مرد **مع** فرمی باشد

نکله ← وارد تابع فعلی است تابع باشد یا نباشد وی تابع طوری همچنین تابع هست



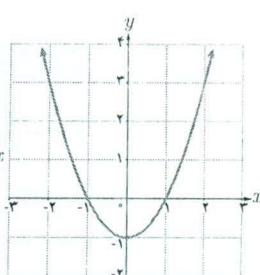
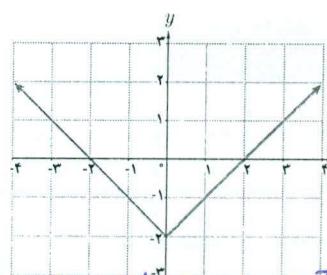
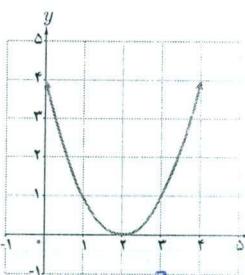
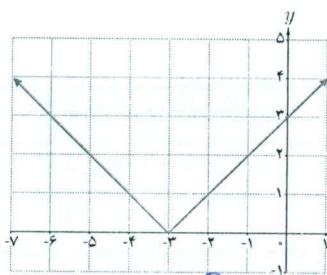
تابع‌های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هر یک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

(الف) $y = |x+3|$

(ب) $y = (x-2)^2$

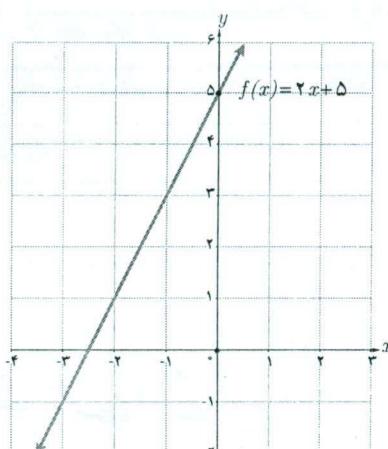
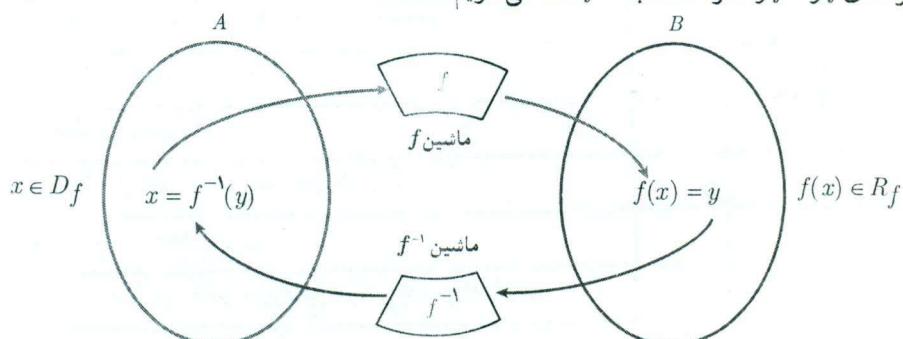
(پ) $y = |x|-2$

(ت) $y = x^2 - 1$



$D = (-\infty, \infty)$ با $(-\infty, \infty)$ $D = (-\infty, 2]$ با $(-\infty, 2]$ $D = [0, \infty)$ با $(-\infty, 0]$ $D = [0, \infty)$ با $(-\infty, 0]$ $D = [2, \infty)$ با $(-\infty, 2]$ $D = (-\infty, -1)$ با $(-\infty, -1)$ $D = [0, \infty)$ با $(-\infty, 0]$ $D = [0, \infty)$ با $(-\infty, 0]$

اگر f تابع یک به یک باشد و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر کار کرد f و f^{-1} را نشان می‌دهد. در فعالیت بعد به صورت جزئی‌تر با کارکردهای f و f^{-1} و نحوه محاسبه f^{-1} آشنا می‌شویم.



تابع $\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2x + 5 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

(الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.

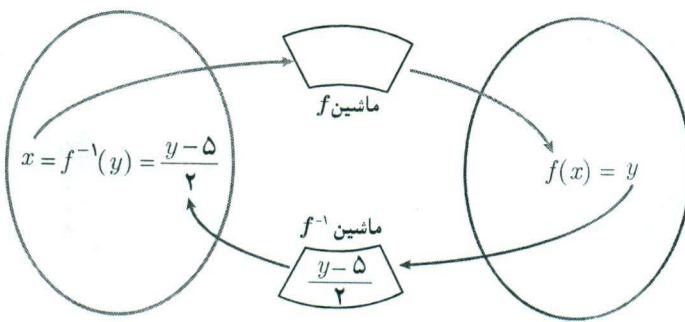
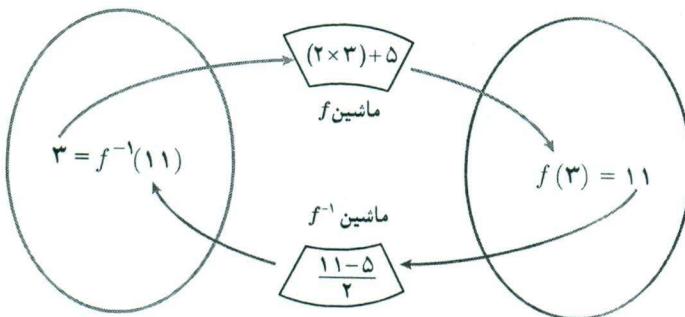
حول هر نقطه افقی آن را درین مقطعی که در هر یک قطعی
برد حقیقاً تک که نوزاد است طبق مسئله است



ب) نمودار رویه را توضیح دهید :

$$(3, 11) \in f \quad (11, 3) \in f^{-1}$$

به عبارت دیگر $f(3) = 11$ و $f^{-1}(11) = 3$



پ) در حالت کلی برای هر عنصر $x \in D_f$ ، نمودار مقابل را مانند ب کامل کنید.

ت) بنابراین می‌توان نوشت :

$$f(x) = 2x + 5 \quad (x \in D_f)$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y - 5}{2} \quad (y \in R_f)$$

f^{-1} را به صورت‌های دیگری هم می‌توانیم نمایش دهیم. یک نمایش دیگر را بنویسید :

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(y) = \frac{y - 5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(t) = \frac{t - 5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(h) = \frac{h - 5}{2} \end{cases}$$

آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه f^{-1} همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای f^{-1} به صورت زیر است :

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2} \end{cases}$$

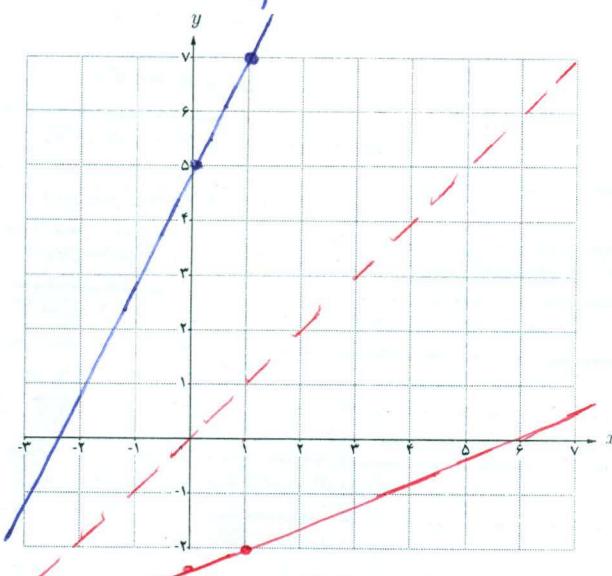
۵۹ فصل دوم: تابع

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند f , در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را ب محاسبه می کنیم، سپس با تبدیل y به x , $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.

$$f(x) = 2x + 5 \Rightarrow y = 2x + 5$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2x = y - 5 \\ &\Rightarrow x = \frac{y - 5}{2} \\ &\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y - 5}{2} \\ &\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2} \end{aligned}$$

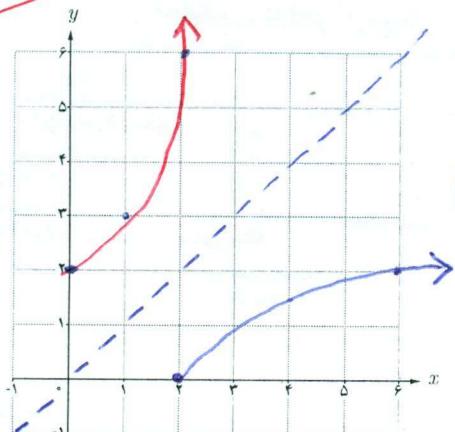
$f(x)$



گاردر کلاس

با توجه به فعالیت قبل اگر داشته باشیم $f(x) = 2x + 5$ نمودار f و f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$\begin{aligned} f(n) &= 2n + 5 & y &= 2n + 5 \\ \frac{y - 5}{2} &= n & y - 5 &= 2n \\ n &= \frac{y - 5}{2} & y &= 2n + 5 \\ f^{-1}(y) &= \frac{y - 5}{2} & f^{-1}(n) &= n - \frac{5}{2} \\ f^{-1}(n) &= \frac{n - 5}{2} & \frac{n - 5}{2} &= y - 5 \end{aligned}$$



اگر داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x - 2}$, دامنه و برد f را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

در معادله $y = \sqrt{x - 2}$ ضابطه f^{-1} را بنویسید. نمودار f^{-1} را رسم و دامنه و برد f^{-1} را معلوم کنید.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x - 2} \\ y^2 &= x - 2 \\ y^2 + 2 &= x \Rightarrow f^{-1}(y) = y^2 + 2 \\ f^{-1}(n) &= n^2 + 2 \end{aligned}$$

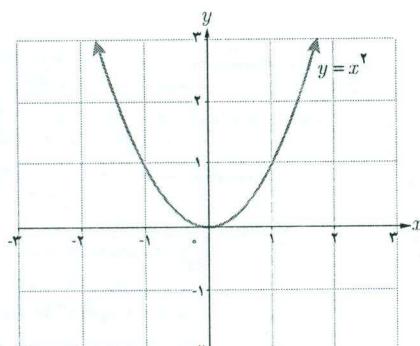
اگر f یک تابع یک به یک باشد، برای به دست آوردن نمودار تابع f^{-1} کافی است قرینه f را نسبت به خط $x = y$ (یمساز ربع اول و سوم) به دست آوریم.

$$D_{f^{-1}} = [0, \infty)$$

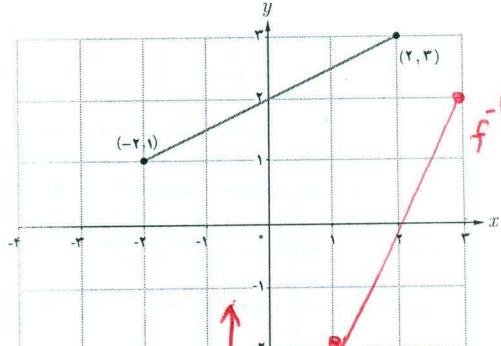
$$R_{f^{-1}} = [2, \infty)$$

کاردر کلاس

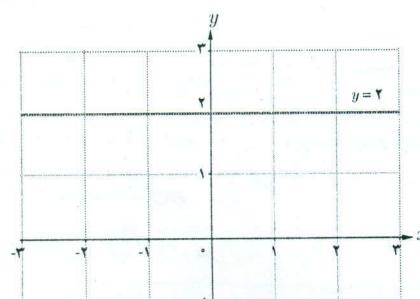
نمودار «تابع وارون» هر کدام از تابع‌های زیر را که یک به یک است در همان دستگاه مختصات رسم کنید.



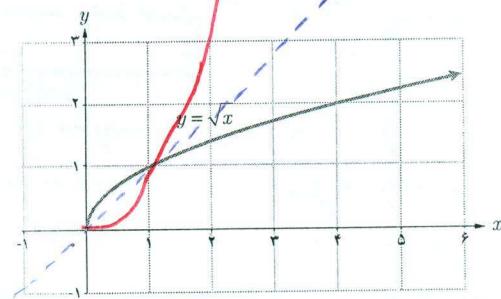
وَارُونٌ بُذِيرٌ نَّسِيْتَ



f^{-1}

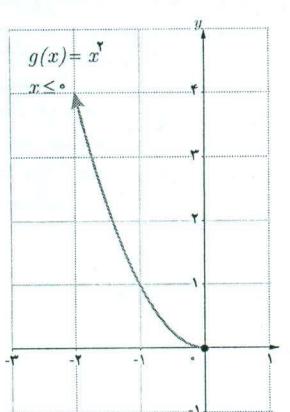


وَارُونٌ بُذِيرٌ نَّسِيْتَ

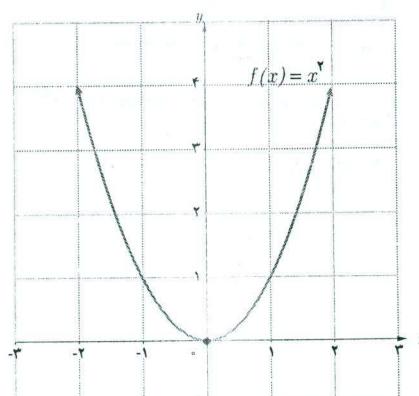


f^{-1}

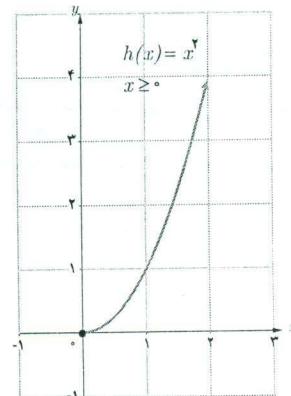
اگر تابعی یک به یک نباشد وارون بذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می‌توان تابعی یک به یک به دست آورد. به طور مثال تابع $f(x) = x^2$ یک به یک نیست، ولی با محدود کردن تابع به بازه $(-\infty, 0]$ و یا $[0, \infty)$ تابعی یک به یک به دست می‌آید.



g یک به یک و وارون بذیر است.

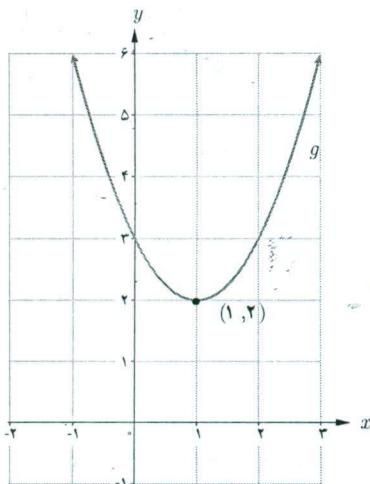


f یک به یک نیست، وارون بذیر هم نیست.



h یک به یک و وارون بذیر است.

۶۱ فصل دوم: تابع



مثال: نمودار تابع $g(x) = x^2 - 2x + 3$ و نشان می‌دهد که این تابع یک به یک نیست. به طور مثال $(2, 5) = g(0)$. می‌توان دامنه این تابع را محدود کرد و تابعی یک به یک به دست آورد و سپس وارون آن را حساب کرد.

در مورد تابع g داریم:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad D_g = \mathbb{R} \text{ و } R_g = [2, +\infty)$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$$

دامنه f را به بازه $[1, +\infty)$ محدود می‌کنیم و تابع جدید را f می‌نامیم. بنابراین تابع جدید به صورت زیر خواهد بود که تابع یک به یک و وارون پذیر است.

$$\begin{cases} f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = (x-1)^2 + 2 \end{cases} \quad D_f = [1, +\infty), \quad R_f = [2, +\infty)$$

اگر چنان سعی می‌کنیم x را بر حسب y به دست آوریم:

$$y = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow y-2 = (x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2 = y-2 \Rightarrow x-1 = \pm \sqrt{y-2}$$

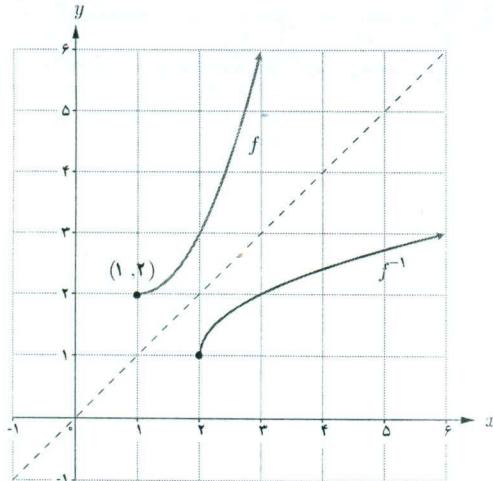
جواب منفی قابل قبول نیست (چرا؟) بنابراین:

$$x-1 = \sqrt{y-2} \Rightarrow x = \sqrt{y-2} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

در حقیقت داریم:

$$\begin{cases} f^{-1}: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1 \end{cases} \quad D_{f^{-1}} = [2, +\infty) \quad R_{f^{-1}} = [1, +\infty)$$

نمودار f و f^{-1} در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند.



۱ تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک به یک نباشد. ارتباط بین فعل و شمارهای تمام شمارهای بین که هم معتمد باشند

۲ آیا تابع $f(x) = \frac{2}{x}$ وارون تابع $g(x) = \frac{5}{x}$ است؟ خبر چو $f(g(x)) = f\left(\frac{5}{x}\right) = \frac{2}{\frac{5}{x}} = \frac{2x}{5}$

۳ به کمک رسم نمودار وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند، به دست آورید:

پاسخ‌های در صفحه بعد

(الف) $f(x) = (x + 5)^2$, $x \geq -5$

(ب) $f(x) = -|x - 1| + 1$, $x \geq 2$

(پ) $f(x) = (x - 3)^2$

(ت) $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بحسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه $h(t) = 100 - 5t^2$ به دست می‌آید.

(الف) دامنه و برد h را به دست آورید.

ب) چرا h تابع یک به یک است؟ خبر چه ارتفاع از زیر زمین مخفی جزری از دامنه تحلیری سوی

پ) تابع وارون h را به دست آورید.

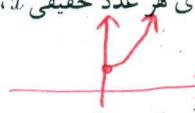
۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x , $x < f(x)$.

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 + 1$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3 \rightarrow y - 3 = -\frac{1}{4}x^2$$

آبشار پیران (استان کرمانشاه)



۶ وارون تابع $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3$ را باید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

$$\begin{aligned} y - 3 &= -\frac{1}{2}x^3 \\ y &= 3 - \frac{1}{2}x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= 3 - \frac{1}{2}y^3 \\ f^{-1}(x) &= 3 - \frac{1}{2}x^3 \end{aligned}$$

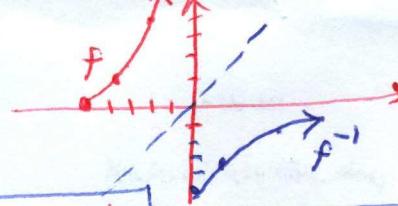
$$\frac{1}{2}x^3 = 3 - x$$

بالای من



$$(ا) f(u) = (u + \Delta)^r$$

$$\frac{-\Delta - \epsilon - u}{0 \ 1 \ \epsilon}$$



$$y = (u + \Delta)^r$$

$$y^r = u + \Delta$$

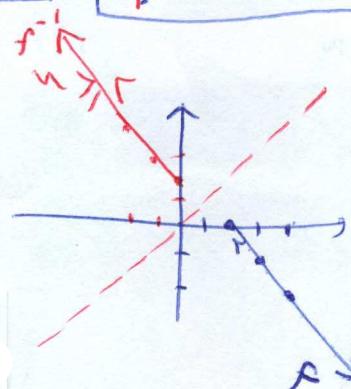
$$y^r - \Delta = u$$

$$f^{-1}(y) = y^r - \Delta$$

$$f^{-1}(u) = u^r - \Delta$$

$$(ب) f(u) = |u - 1| + 1$$

$$\frac{2 \ 3 \ r}{0 \ -1 \ -r}$$



$$y = -|u - 1| + 1$$

$$y - 1 = -|u - 1|$$

$$1 - y = |u - 1|$$

$$1 - y = u - 1$$

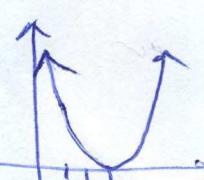
$$r - y = u$$

$$f^{-1}(y) = r - y$$

$$f^{-1}(u) = r - u$$

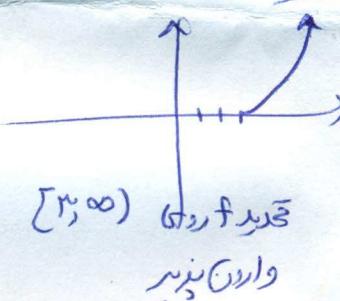
$$(ج) f(u) = (u - r)^r$$

این تابع دارای نزدیکی بازه
محدود است



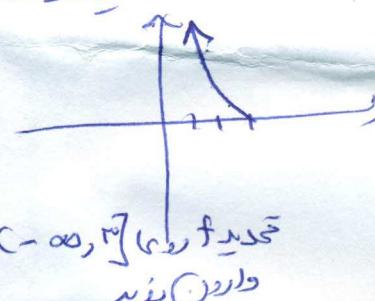
$$f^{-1}(u) = r - u$$

این خودکار طریق نزدیکی بازه را بدین



$$[r, \infty) \text{ محدود} f(u)$$

و از نزدیک



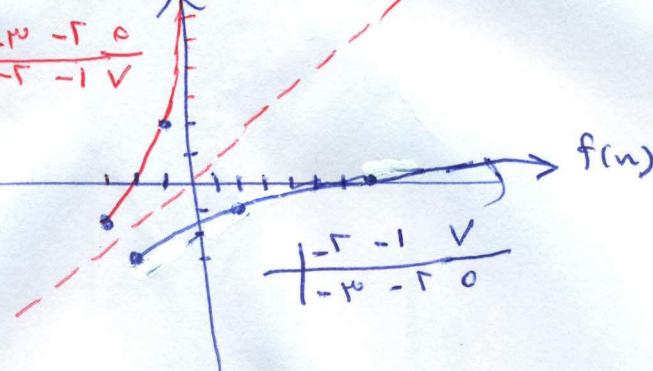
$$(-\infty, r] \text{ محدود} f(u)$$

طریق نزدیک

$$(د) f(u) = \sqrt{u+1} - r$$

$$\frac{-r - \epsilon - 1}{0 \ \epsilon \ v}$$

- تابع محدود دارای نزدیکی
بازه



$$y = \sqrt{u+1} - r$$

$$y + r = \sqrt{u+1} \rightarrow (y + r)^2 = u + 1$$

$$u = (y + r)^2 - 1$$

$$f^{-1}(y) = (y + r)^2 - 1$$

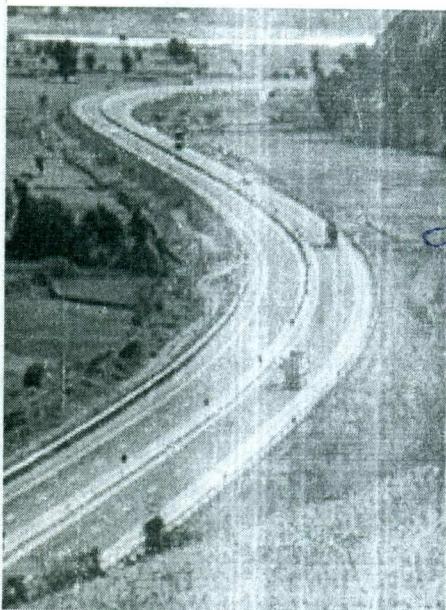
$$f^{-1}(u) = (u + r)^2 - 1$$

۴

درس

همان گونه که عمل های جمع و ضرب در مورد دو عدد یا دو چند جمله ای انجام پذیر است، برای دو تابع نیز چنین اعمالی قابل انجام است. در فعالیت زیر **مثال را قعی از این موضوع بررسی می شود.**

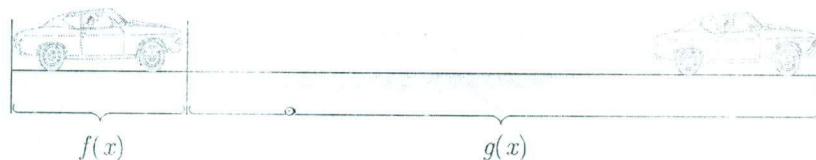
فاصله زمانی لحظه ای که راننده با یک مانع رو به رو می شود تا لحظه فشار دادن پدال ترمز را «زمان عکس العمل» می نامند.



مجموع فاصله طی شده در طول زمان عکس العمل و فاصله طی شده پس از ترمز کردن را «فاصله دید توقف» می نامند. این فاصله در طراحی جانه ها و بزرگراهها کاربرد دارد.

فرض کنید اتومبیلی با سرعت ثابت در بزرگراهی در حال حرکت است. اگر اتومبیل با سرعت x کیلومتر بر ساعت حرکت کند، مسافتی که در «زمان عکس العمل» طی می کند از تابع $f(x) = \frac{V}{10}x$ به دست می آید که در آن مقدار تابع بر حسب x است. همچنین مسافتی که اتومبیل پس از فشار دادن پدال ترمز تا توقف کامل طی می کند از تابع $g(x) = \frac{1}{100}x^2$ به دست می آید که در آن مقدار تابع بر حسب x سرعت اتومبیل بر حسب کیلومتر بر ساعت است.

(الف) اگر اتومبیلی با سرعت 100 کیلومتر بر ساعت حرکت کند، پس از دیدن مانع، تا توقف کامل جهه مسافتی طی می شود؟
 (ب) اگر سرعت اتومبیل x کیلومتر بر ساعت باشد، تابعی پژوهش که مسافت طی شده توسط اتومبیل پس از رؤیت مانع توسط راننده و ترمز کردن را نمایش دهد. این تابع را با $h(x) = f(x) + g(x)$ نمایش دهد.



(پ) اگر این اتومبیل پس از پیمودن 60 متر متوقف شود، با x سرعتی در حال حرکت بوده است:

$$40 = \frac{V}{10}x + \frac{1}{100}x^2$$

$$4000 = Vx + x^2 \rightarrow x^2 + Vx - 4000 = 0$$

$$\Delta = 4900 + 24000 = 24900$$

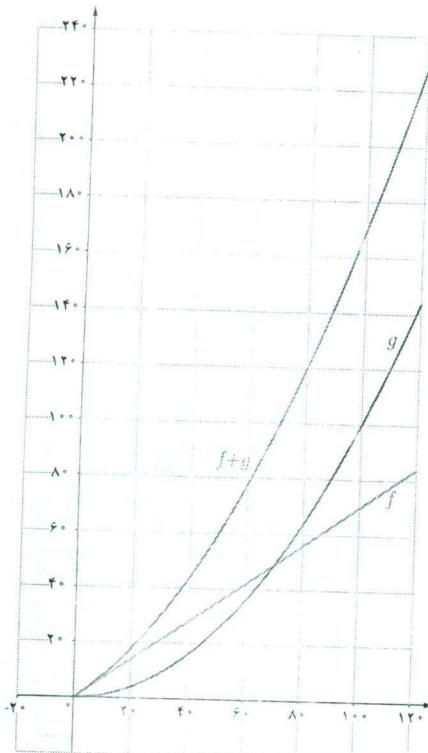
۱- برای تعیین فاصله دید توقف، فاصله عکس العمل ترمز مبنی بر زمان $2/5$ ثانیه و مسافت امداده 27 متر بر مبنی نایه مورد استفاده قرار می گرد.

$$x_1 = \frac{-V_0 + \sqrt{24900}}{2} \approx -\frac{V_0 + 170}{2} = 10 \text{ m/s}$$

$$x_2 = \frac{-V_0 - \sqrt{24900}}{2} \approx -\frac{V_0 - 170}{2} = -170 \text{ m/s}$$

اگر f و g دو تابع باشند، $f+g$ تابعی است که دامنه آن مجموعه $D_f \cap D_g$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad x \in D_f \cap D_g$$



در فعالیت قبل دامنه f و دامنه g در حالت کلی مجموعه \mathbb{R} است، ولی در این مسئله واقعی دامنه تابع مجموعه‌ای مانند $[-1, 12]$ است. بنابراین دامنه $f+g$ نیز چنین است. نمودارهای سه تابع f , g و $f+g$ ، فعالیت قبل، در شکل زیر رسم شده است.

رابطه بین این توابع را به کمک نمودار آنها توضیح دهید.

کارنر کلاس

$$(f+g)(x) = x + 1 + \sqrt{x-1}$$

$$D_{f+g} = \mathbb{R} \cap [1, \infty) \cap [1, \infty] = [1, \infty)$$

اگر $f+g$ را محاسبه کنید. دامنه تابع g را به دست آورید: $g(x) = \sqrt{x-1}$ و $f(x) = x + 1$

اگر $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ و $f = \{(1, 2), (-2, 5), (0, 7)\}$

$$D_{f+g} = \{1, 2\} \quad f+g = \{(0, 3), (1, 4), (2, 5)\}$$

ابتدا دامنه $f+g$ را به دست آورید و سپس g را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب تاییش دهید.

به طور کلی اگر f و g دو تابع باشند توابع $g \cdot f$, $f \cdot g$, $f-g$ و $f+g$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

فصل دوم: تابع ۶۵

مثال: اگر $\frac{f}{g}$ و gh , $g-h$, $f+g$ توابع $h(x) = \frac{x+2}{x+1}$ و $g(x) = \sqrt{3-x}$ و $f(x) = \sqrt{x+2}$ را محاسبه کنید و دامنه آنها را به دست آورید. کدامیک از مقادیر (۲) $(f+g)$ و (۵) $(f+g)(2)$ وجود دارد؟

حل: ابتدا دامنه هریک از توابع را به دست می‌آوریم:

$$D_h = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$D_g = (-\infty, 3]$$

$$D_f = [-2, \infty)$$

و لی $(f+g)(2) = 3$ وجود ندارد.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-2, 3]$$

$$(g.h)(x) = g(x)h(x) = (\sqrt{3-x})(\frac{x+2}{x+1})$$

$$D_{g.h} = D_g \cap D_h = (-\infty, 3]$$

$$(g-h)(x) = g(x) - h(x) = \sqrt{3-x} - \frac{x+2}{x+1}$$

$$D_{g-h} = D_g \cap D_h = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 3]$$

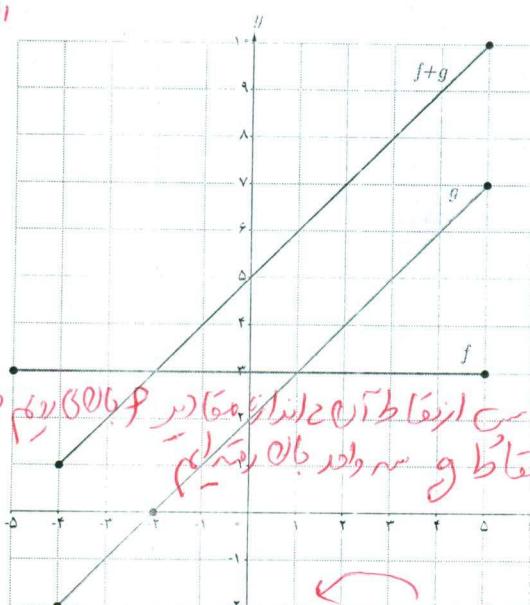
$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = [-2, 3] - \{3\}$$

$$D_g \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} & \text{نحوه از} \\ & (0, -1) \rightarrow m_2 = \frac{-1 - 0}{0 - (-1)} = -1 \\ & (-1, 0) \rightarrow m_1 = 1 \end{aligned}$$

$$D_h \longrightarrow$$



$$\begin{aligned} D_f &= [-5, 0] & f(n) &= 3 \\ D_g &= [-5, 0] & g(n) &\rightarrow g = -\frac{1}{n} (x+1) \end{aligned}$$

- در شکل رو به رو نمودارهای دو تابع f و g داده شده‌اند.

الف) دامنه f و دامنه g و ضابطه‌های f و g را بنویسید.

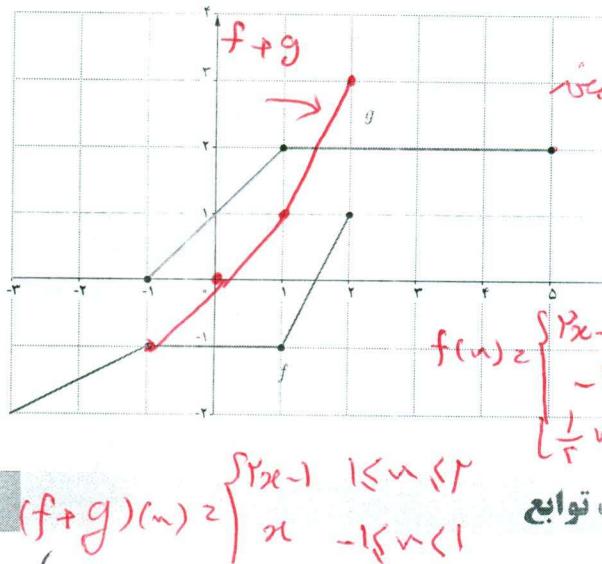
ب) دامنه و ضابطه توابع g , $f-g$, $f+g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

پ) نمودار $f+g$ در شکل رسم شده است. توضیح دهید چگونه این نمودار را رسم کرده‌ایم.

ت) توضیح دهید بقیه نمودارهای تابع داده شده در قسمت (ب) را چگونه می‌توان رسم کرد.

$$\begin{aligned} f(n) + g(n) &= -\frac{1}{n} n - 1 + n = -\frac{1}{n} n + 1 \\ f(n) - g(n) &= -\frac{1}{n} n - 1 - n = -\frac{1}{n} n - 1 \\ f(n) \times g(n) &= n(-\frac{1}{n} n - 1) \\ \frac{f(n)}{g(n)} &= \frac{n}{-\frac{1}{n} n - 1} \end{aligned}$$

$$\{ f(n) \cdot g(n) = 0 \}$$



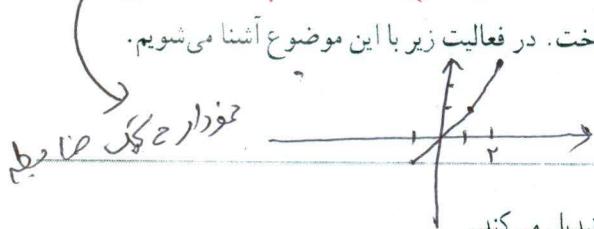
نمودارهای توابع f و g داده شده است.

- الف) مقادیر $(f+g)(1)$ و $(f+g)(-1)$ را به دست آورید. **بالا همچنان**
ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.

پ) ضابطه توابع $f+g$, f , g را به دست آورید.

- ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطه آن رسم کنید و با
(ب) مقایسه کنید.

ترکیب توابع



با داشتن دو تابع f و g به شیوه‌ای دیگر هم می‌توان تابع جدیدی ساخت. در فعالیت زیر با این موضوع آشنا می‌شویم.

حصقه نمودارهای با گرد غور از هر دو تابع
نمایه و تابع کمی رود

تابع $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی گراد تبدیل می‌کند.

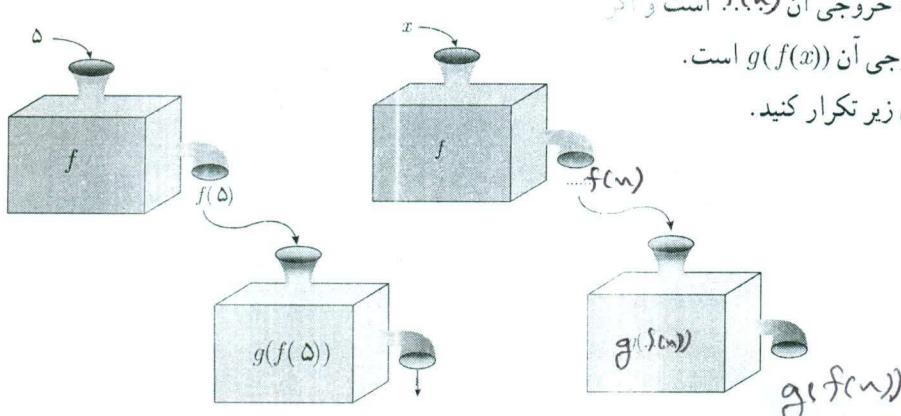
- الف) $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه فارنهایت چند درجه سانتی گراد است؟
بعضی از درجه فارنهایت مکافر درجه سانتی گراد معمولی
ب) تابع $g(x) = x + 273$ درجه سانتی گراد را به درجه کلوین تبدیل می‌کند.
برای برای
پ) مطابق نمودارهای داده شده می‌توانیم f و g را همانند دو ماشین درنظر بگیریم. یکی از ماشین‌ها فارنهایت را به سانتی گراد و
دیگری سانتی گراد را به کلوین تبدیل می‌کند. به کمک نمودارها نشان دهید که ۵ درجه فارنهایت معادل چند درجه کلوین است؟

$$f(5) = 10^{\circ}$$

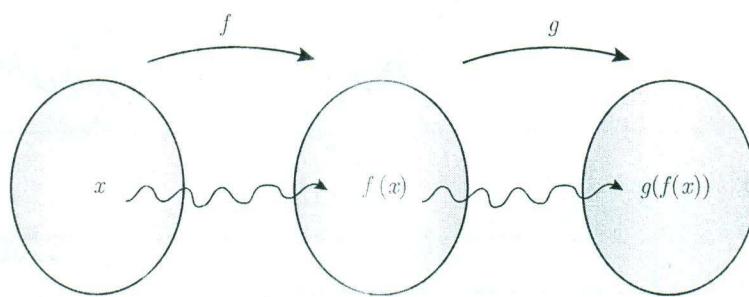
$$g(f(5)) = 273^{\circ}$$

ت) اگر x ورودی تابع f باشد، خروجی آن $f(x)$ است و اگر x ورودی تابع g باشد خروجی آن $g(f(x))$ است.

ث) ت را با تکمیل نمودارهای زیر تکرار کنید.



نماذارهای صفحه قبل را به صورت زیر هم می‌توان نمایش داد:

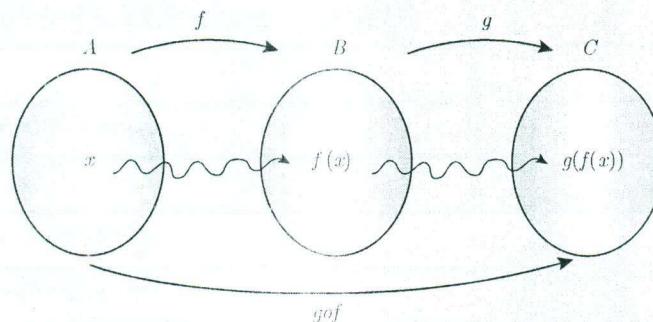


اما $g(f(x))$ را چگونه می‌توان محاسبه کرد؟ داریم:

$g(f(x)) = g\left(\frac{5}{9}(x - 32)\right)$ و می‌دانیم تابع g به هر ورودی ۲۷۳ واحد اضافه می‌کند. پس:

این یک تابع جدید است که درجه فارنهایت را به کلوین تبدیل می‌کند و به دلیل شیوه محاسبه آن با gof (بخوانید جی اواف) نمایش داده می‌شود. در حقیقت gof نیز همانند ماشینی عمل می‌کند که ورودی x را به $g(f(x))$ تبدیل می‌کند.

اگر f و g دو تابع باشند ترکیب g با f را با gof نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: به شرط آنکه مقادیر f در $(gof)(x) = g(f(x))$ دامنه g قرار داشته باشند:



به عبارت دیگر اگر $g: B \rightarrow C$ و $f: A \rightarrow B$ باشند آنگاه:

$$gof: A \rightarrow C$$

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به طور مشابه ترکیب f با g یعنی fog را می‌توان تعریف کرد.

$$D_f = \mathbb{R} \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{n \in \mathbb{R} \mid m+n \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \{n \in D_f \mid f(n) \in D_g\} = \{n \in \mathbb{R} \mid n+1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$g \circ f(n) = 2(n+1) + 3 = 2n + 5$$

$$f \circ g(n) = (2n+3)^2 + 1 = 4n^2 + 12n + 10$$

$$g(x) = 2x + 3, f(x) = x^2 + 1$$

الف) دامنه و ضابطه تابع های fog و fog را به دست آورید.

$$\forall x \quad f(n) \neq g(n) \quad \text{و } D_f = D_g$$

ب) آیا تابع های fog و fog مساوی اند؟ خبر حیرت

کار در کلاس

* مثال: اگر داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 + 3$ ، دامنه و ضابطه تابع fog و gof را به دست آورید.

حل: داریم،

$$D_g = \mathbb{R} \quad \text{و } D_f = [1, \infty)$$

$$(fog)(x) = f(x^2 + 3) = \sqrt{x^2 + 3 - 1} = \sqrt{x^2 + 2}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [1, \infty)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3 \geq 1\} = \{x \mid x^2 \geq -2\} = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1, \infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, \infty)$$

$$(gof)(x) = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 3$$

توجه کنید که gof برای اعداد کمتر از 1 تعریف نشده است. به طور مثال $(\frac{1}{2})(gof)(\frac{1}{2})$ یا $((gof))(\frac{1}{2})$ معنی ندارد. با این شرط $(gof)(x)$ را به صورت زیر هم می‌توان نمایش داد:

$$(gof)(x) = x - 1 + 3$$

$$(gof)(x) = x + 2 \quad x \in [1, \infty)$$

کار در کلاس

اگر $\{(2, 1), (4, -2), (6, 3), (3, 2)\}$ و $\{(1, 7), (-2, 4), (3, -5), (2, -6)\}$ دامنه و سپس تابع D_{gof} و D_{fog} را محاسبه کنید.

$$D_{fog} = \{2, 4, 6, 3\} \quad fog(n) = \{(2, 1), (4, -2), (6, 3), (3, 2)\}$$

$$gof(n) = \{(-2, 4), (3, -5), (2, -6)\}$$

$$D_{gof} = \{1, 7\}$$

$$\text{نمونه سوال}$$

$$\text{گام به گام}$$

$$\frac{f}{g}(n) = \frac{f_n}{n} \quad (D_f \cap D_g) \neq \emptyset \quad \text{و} \quad g(n) \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(n) \in \mathbb{R}$$

$$(f-g)(n) = f_n - g_n = ax - b \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$fog(n) = f(g(n)) = 1 - f_n \quad D_{fog} = \{n \in D_g \mid g \in D_f\} = \{n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

فصل دوم: تابع ۶۹

$$fog(n) = \frac{1}{n-3} = \frac{1}{\frac{1}{n-3}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{n-3}}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{n-3}}}} = \dots$$

$$D_{fog} = \{n \in D_g \mid g \in D_f\} = \{n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = R - \{n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} - \{n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

اگر $f(x) = 2x$ و $g(x) = 2 - x$ ، توابع $f-g$ و fog را به همراه دامنه آنها بدست آورید. **بالای صفحه**

برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = 4$ تابع fog و دامنه آن را بدست آورید. **بالای صفحه**

کدامیک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(7) = 7$ و $g(4) = 4$ آن‌گاه $(fog)(4) = 35$

ب) اگر $\frac{f}{g}(2) = 1$ آن‌گاه $f(x) = x + 2$

پ) اگر $f(g(5)) = f(9) = 3 = g(2)$ آن‌گاه $f(x) = \sqrt{x}$

ت) برای هر دو تابع f و g داریم $fog = gof$

ث) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ آن‌گاه $fog = gof$

ج) برای هر دو تابع f و g داریم $fg = gf$

فرض کنیم $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ و $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود:

$$\begin{cases} f(n) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\} \\ g(n) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\} \end{cases}$$

$gof(n) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ توابع gof و $f+g$ را بدست آورید.

اگر $f = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (2, 0), (5, 2), (9, 6)\}$ و $g = \{(-4, 13), (-1, 7), (0, 5), (\frac{5}{2}, 0), (3, -5)\}$

توابع $f+g$ و $f-g$ را بدست آورید.

$(f-g)(n) = \{(-2, 4), (0, 2), (2, 0), (5, -8)\}$

$(f+g)(n) = \{(-4, 16), (0, 8), (2, 2), (5, 18)\}$

$\frac{f}{g}(n) = \{\text{محدود نموده}\}$

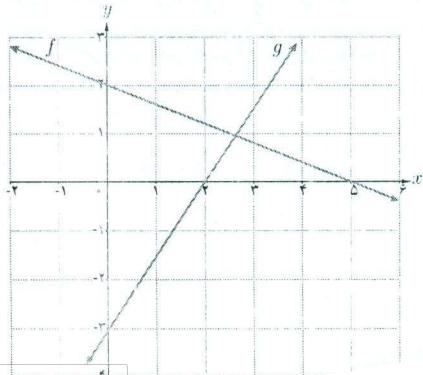
اگر $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x^2+5}$ دامنه و ضابطه توابع fog و gof را بدست آورید.

اگر $f(x) = x+3$ و $g(x) = x+2$ ، ضابطه $f-g$ و $f+g$ را بدست آورید.

حاجمه تتمیم کل از ماده سند محاسن من سود

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 9}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = x-3, \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}$$

اگر $f(x) = 2x+5$ و f^{-1} of f و $f^{-1}(x)$ را بدست آورید.



نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f-g$ و $f+g$ را محاسبه کنید.

$$D_f = \mathbb{R} \quad \text{and} \quad D_g = [-5, 5]$$

(4)

$$fog(n) = \sqrt{(\sqrt{n})^2 + a} = \sqrt{n+a}$$

$$D_{fog}(n) = \{n \in D_g \mid g \in D_f\} = \{n \in [-5, 5] \mid \sqrt{n+a} \in \mathbb{R}\} = [-5, 5]$$

$$gof(n) = \sqrt{n - (\sqrt{n+a})^2} = \sqrt{n-a} = \sqrt{-a-1}$$

$$D_{gof} = \{n \in D_f \mid f \in D_g\} = \{n \in \mathbb{R} \mid \sqrt{n+a} \in [-5, 5]\} = \emptyset$$

$$\text{لأن } -a-1 \geq 0 \Leftrightarrow n+a \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sqrt{n+a} \leq 1 \text{ ممكنا}$$

$$f(n) = kn + a$$

$$y = kn + a \rightarrow y - a = kn$$

$$n = \frac{y-a}{k} \quad f(n) = \frac{y-a}{k}$$

(1)

$$f \circ f^{-1} = k\left(\frac{x-a}{k}\right) + a = x - a + a = x$$

$$f_0^{-1} f = \frac{(kn+a)-a}{k} = n$$

$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} y_1 \quad \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} y_1 \quad m = \frac{r}{s}$$

$$y = kx - \frac{r}{s}x$$

$$y = -\frac{r}{s}x + k$$

f بـ

$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} y_1 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -r \end{bmatrix} y_1 \quad m = -\frac{r}{s} = \frac{r}{r} = 1 \quad y = \frac{r}{r}(x-k)$$

$$y = \frac{r}{r}x - r$$

g بـ

$$(f+g)(n) = -\frac{r}{s}n + k + \frac{r}{r}n - r = \frac{11}{10}n - 1$$

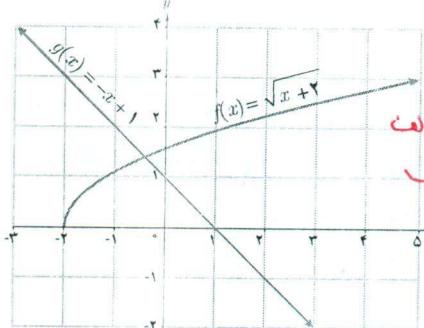
$$(f-g)(n) = \frac{r}{s}n + k - \frac{r}{r}n + r = -\frac{11}{10}n + 1$$

$$(fxg)(n) = (-\frac{r}{s}n + k)(\frac{r}{r}n - r)$$

$$y = ax + b \quad \frac{y-b}{a} = x \quad f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \quad -11$$

۷۰

۱۰ با توجه به نمودار مقابل، هر کدام از عبارت‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.



الف) $(fg)(\frac{1}{2})$ ب) $(f+g)(-3)$ ج) $(f+g)(2)$

د) $(gof)(-1)$ ه) $(\frac{f}{g})(0)$ و) $(fog)(-4)$

تقریب مسده وجود ندارد

الف) $f(2) + g(2) = 2 + 1 = 3$

ب) $f(-3) + g(-3) = -(-3) + 1 = 4$

ج) $f(\frac{1}{2}) \times g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

د) $f(g(-4)) = f(1) = \sqrt{3}$

ه) $\frac{f(0)}{g(0)} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

و) $g(f(-1)) = g(1) = 0$

۱۱ نشان دهد که وارون (معکوس) یک تابع خطی به صورت $y = ax + b$ ($a \neq 0$) باز هم یک تابع خطی است.

۱۲ تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی گراد تبدیل می‌کند. تابعی بنویسید که درجه سانتی گراد را به

عنوان ورودی دریافت کند و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحويل دهد.

۱۳ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پر فروش در حوزه خاطرات دفاع مقدس را می‌بینید:

یکی از این کتاب‌ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های دیگر ۷ هزار نسخه تولید شده است.

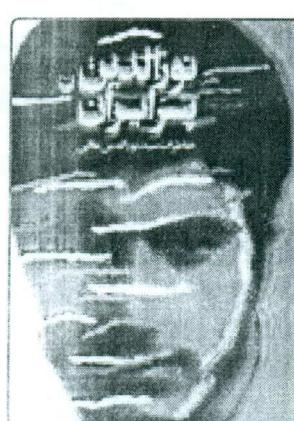
کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های بعدی ۹ هزار نسخه به چاپ رسیده است.

الف) تابع‌هایی بنویسید که تعداد نسخه‌های چاپ شده هر یک از این دو کتاب را بر حسب شماره چاپ نمایش دهند.

صادر نیز

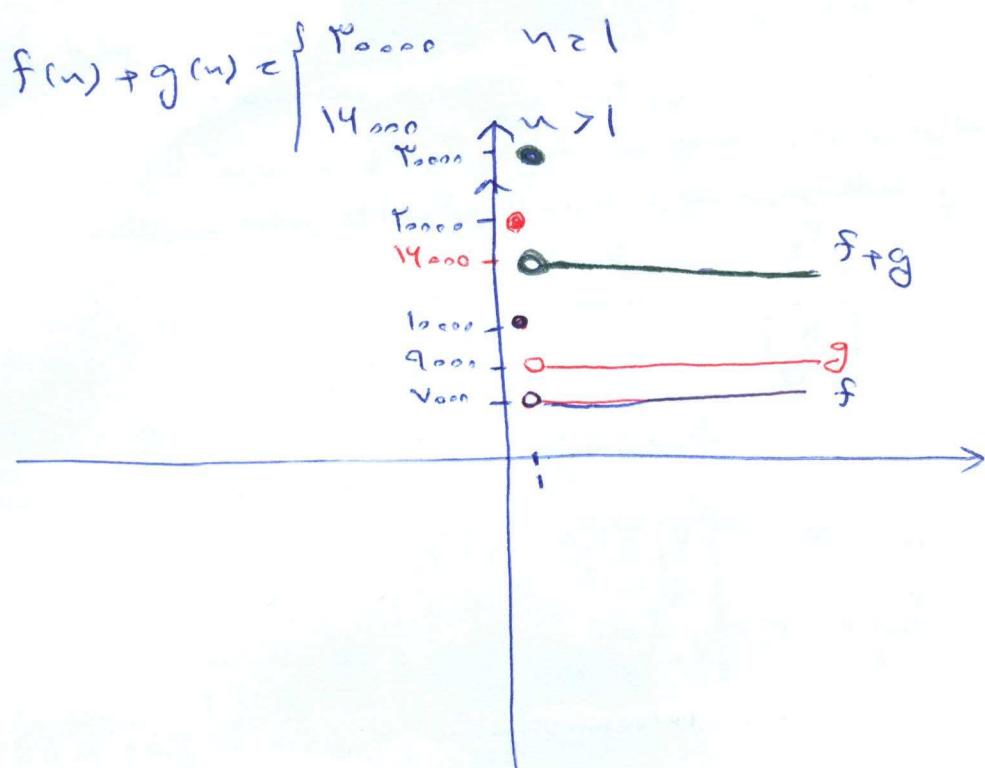
ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه‌های چاپ شده هر دو کتاب را نمایش دهد.

ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.



$$f(n) = \begin{cases} 10000 & n=1 \\ 9000 & n>1 \end{cases}$$

$$g(n) = \begin{cases} 10000 & n=1 \\ 9000 & n>1 \end{cases}$$



۱ درس

تابع نمایی

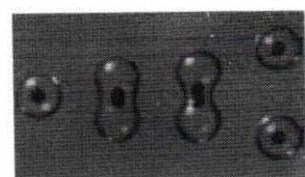
آیا تاکنون با خود فکر کرده‌اید که دانشمندان چگونه قدمت یک شیء باستانی یا یک فسیل را پیدا می‌کنند؟ در بدن هر موجود زنده کرین ۱۴ موجود است که با مرگ آن موجود، کرین ۱۴ شروع به از بین رفتن می‌کند. بنابراین با اندازه‌گیری مقدار کرین باقی‌مانده، می‌توان سن آن شیء یا موجود را پیدا کرد. در حل این گونه مسائل از تابع نمایی استفاده می‌شود.

فعالیت

یک توده باکتری را در محیط کشت در نظر بگیرید. فرض کنید با نمونه‌گیری از این جامعه، مشخص شده است که جرم باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر جرم باکتری‌ها را پس از t ساعت با $m(t)$ نشان دهیم و با ۱ گرم شروع کیم یعنی $m(0) = 1$ ، آن‌گاه با توجه به جدول، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

جدول (۱)

زمان (ساعت)	جرم باکتری‌ها $m(t)$
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
۵	۳۲?
۶	۶۴?
۷	۱۲۸:
۱۰?	۱۰۲۴



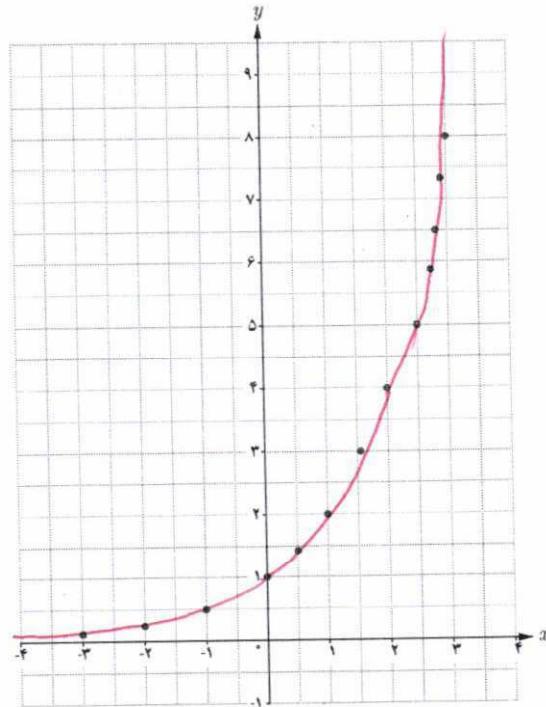
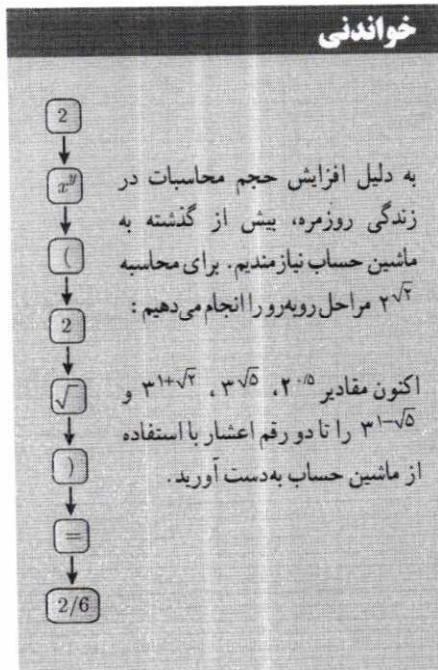
تفصیل دوتایی نوعی تولید مثل است که به تولید زاده‌های یکسان منجر می‌شود.

الف) در زمان‌های ۶ و ۵ $t=5$ و $t=6$ جرم باکتری‌ها به دست آورید.

ب) پس از چند ساعت جرم باکتری‌ها ۲۵۶ گرم می‌شود؟ پس از چند ساعت به ۱۰۲۴ گرم می‌رسد؟ $t=8$ و $t=10$

پ) آیا از اعداد این جدول می‌توان الگویی را برای محاسبه جرم باکتری‌ها در هر زمان به دست آورد؟ بله $m(t) = 2^t$

ب) نقاط به دست آمده را در یک صفحهٔ شطرنجی مشخص کنید
(برخی از نقاط در دستگاه مشخص شده‌اند).



همان‌طور که ملاحظه می‌شود دامنه تابع $y = 2^x$ همه اعداد حقیقی و برد آن همواره اعداد مثبت است.

اگر تعداد نقاط خیلی زیاد شوند، شکلی شبیه نمودار روی برو حاصل می‌شود.

پ) چرا نمودار روی برو یک تابع است؟ *اگرچه موادی محوی معمولی هم از این نمودار را در آن داشتند*
ت) نقطه $x = \sqrt{2}$ را روی محور x ها مشخص کنید، سپس مقدار

تفصیلی $\sqrt{2}$ را با استفاده از نمودار پیدا کنید.

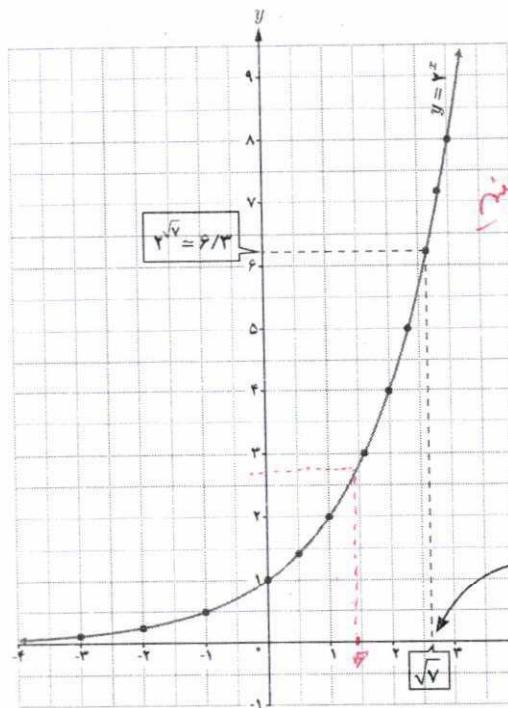
ث) کدام یک از اعداد زیر، بین دو عدد 2^3 و 2^4 قرار دارد؟

۲۲ **۲۳** **۲۴** **۲۵** **۲۶**

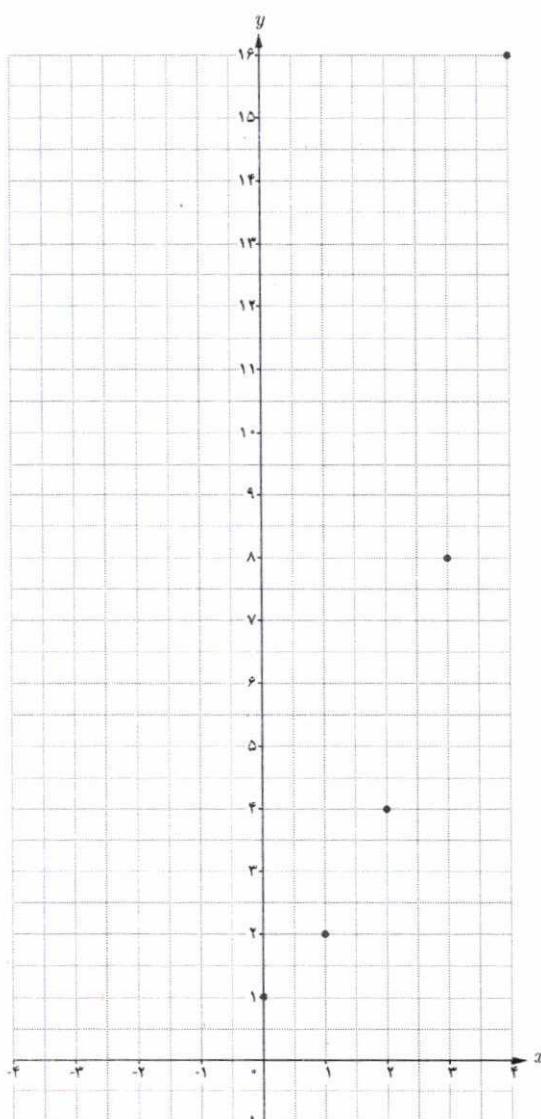
ج) چرا نمودار تابع $y = 2^x$ محور x ها را قطع نمی‌کند؟

با کافی نقاط قطع محور x ها ندارد

توجه کنید دامنه $y = 2^x$ شامل اعداد اصم مثل $\sqrt{7}$ است.



۷۳ فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتم



اگر بخواهیم جرم باکتری‌ها را در مرحله بازدهم با مرحله‌ای بالاتر پیدا کنیم، قطعاً محاسبات، خیلی دشوارتر و وقت‌گیر خواهد شد. برای ساده‌تر شدن محاسبات، جدول (۱) را براساس توان‌های ۲، بازنویسی می‌کنیم تا جدول (۲) حاصل شود. در جدول (۲) به جای علامت سوال ها اعداد مناسب قرار دهید.

جدول (۲)

t	$m(t)$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
4	$2^4 = 16$
5	$2^5 = 32$
6	$2^6 = 64$
7	$2^7 = 128$
8	$2^8 = 256$
9	$2^9 = ?$

نمودار رو به رو رابطه بین زمان و جرم باکتری‌ها را نشان می‌دهد. با توجه به فعالیت صفحه قبل، جرم باکتری‌ها در پایان ساعت اول، دوم، ... و n ام از دنباله زیر به دست می‌آید:

$$2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n.$$

به عبارت دیگر، جرم باکتری‌ها بر حسب زمان t ، از رابطه $m(t) = 2^t$ به دست می‌آید.

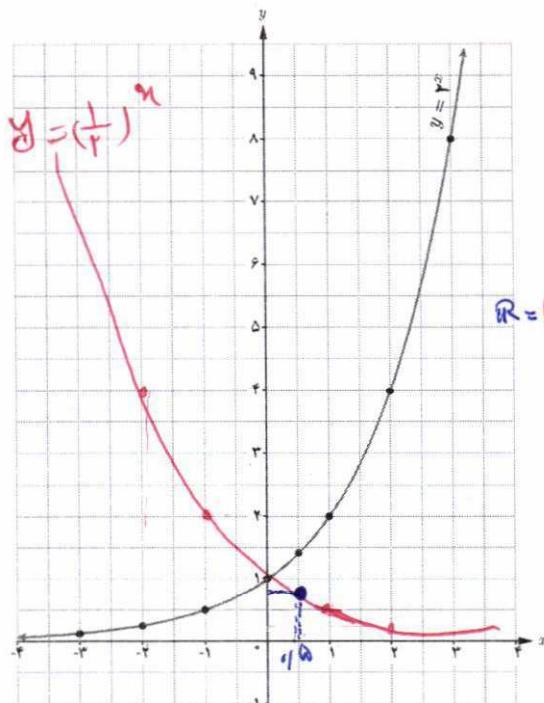
فعالیت

در نمودار فعالیت قبل، نقاط مشخص شده اعداد صحیح نامنفی هستند. می‌توان نقاطی از آن نمودار، با طول اعداد گویا را نیز به دست آورد.

الف) جاهای خالی جدول را با قرار دادن اعداد مناسب پر کنید.

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲	۳
2^x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	$2^{\frac{1}{2}}$	$2^{\frac{1}{4}}$	$2^{\frac{2}{3}}$	2^1	$2^{\frac{3}{2}}$	2^2	2^3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\sqrt[3]{2} = 1/2\sqrt{3}$	$\sqrt{2} = 1/\sqrt{4}$	$\sqrt[3]{4} = 1/\sqrt[3]{56}$	$\sqrt{3} = 1/\sqrt{8}$	$\sqrt[3]{8} = 2/\sqrt[3]{83}$	$\sqrt{2} = 2/\sqrt{8}$	$\sqrt{3} = 3/\sqrt{8}$

کاردکلاس



الف) نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کید و آن را با نمودار $y = 2^x$ مقایسه کنید.

ب) دامنه و برد تابع را به دست آورید.

ویرایش (۱۴۰۰)

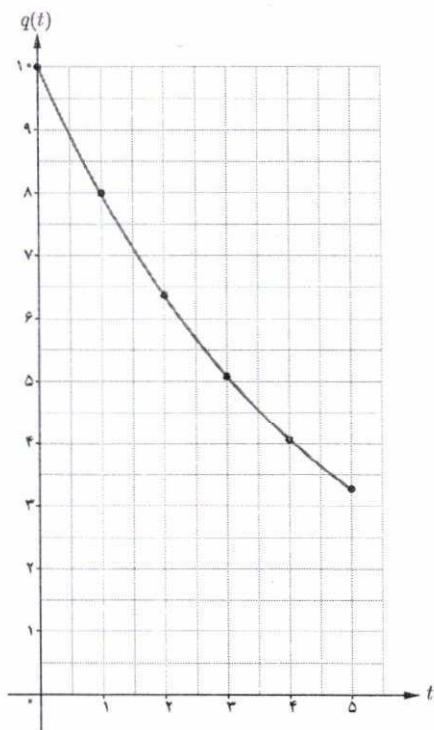
هر تابع با ضابطه $f(x) = a^x$, که در آن a عددی مثبت و مخالف یک است را یک تابع نمایی می‌نامیم.

پ) نقطه $\left(0, \frac{1}{5}\right)$ را روی نمودار مشخص کنید.

مثال: تابع زیر همگی نمایی هستند:

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x, f(x) = (3/14)^x$$

تذکر: در حالت کلی هر تابع با ضابطه $h(x) = ka^x$ رفتار نمایی دارد. بعنوان مثال، تابع $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}$ یا $f(x) = 3 \times 2^x$ رفتار نمایی دارند.



مثال: اگر ۱۰ گرم نمک را به مقدار کمی آب اضافه کنیم، مقدار نمک حل نشده در آب پس از t دقیقه از رابطه $q(t) = 10 \left(\frac{4}{5}\right)^t$ بدست می‌آید. بنابراین پس از مثلاً ۴ دقیقه، مقدار نمک حل نشده در آب برابر است با:

$$q(4) = 10 \left(\frac{4}{5}\right)^4 \approx 4.096 \text{ gr}$$

نمودار این تابع برای $t \leq 5$ در شکل رویه رو رسم شده است.

مثال: فرض کنید Q جرم یک مقدار کریم 14 برحسب گرم با نیمه عمر 5730 سال باشد (یعنی پس از 5730 سال نصف

مقدار معینی از آن از بین می‌رود). مقدار این کریم بعد از t سال از رابطه $Q(t) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ به دست می‌آید.

(الف) در لحظه $t=0$ داریم $Q(0) = 1$ و بعد از 2000 سال داریم

$$Q(2000) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2000}{5730}} \approx 0.85 gr$$

(ب) اگر $t=5730$, آن‌گاه $Q(5730) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5730}{5730}} = 0.5 gr$ یعنی بعد از 5730 سال، مقدار کریم 14 نصف می‌شود.

کار در کلاس

۱ نمودارهای سه تابع $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$ و $h(x) = 5^x$ در شکل (۱) رسم شده‌اند. ضابطه هر تابع را روی نمودار آن بنویسید.

۲ دامنه و برد هر تابع را بنویسید

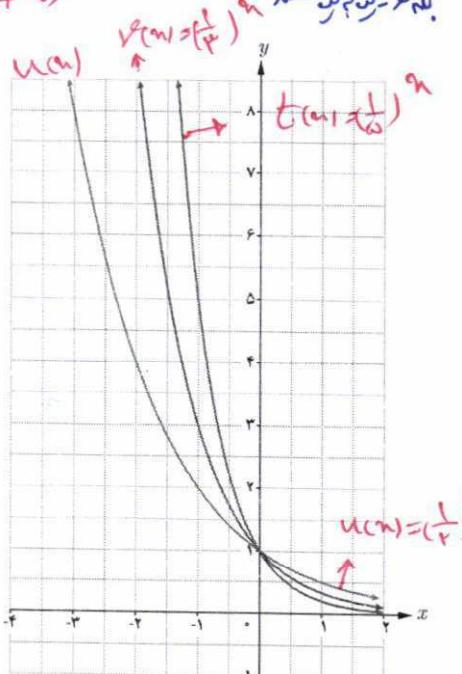
آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟ چرا؟

نمودارهای توابع $t(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $v(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $u(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ در شکل (۲) رسم شده‌اند. ابتدا ضابطه هر یک را روی

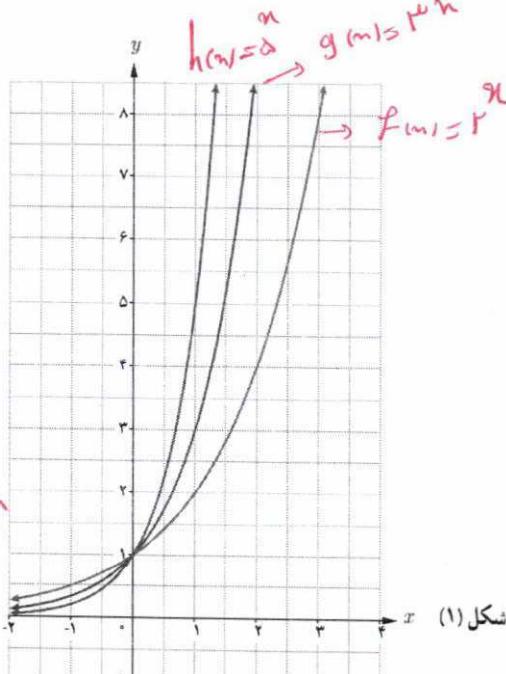
$$D = (-\infty, \infty)$$

$$R = (0, +\infty)$$

نمودار آن بنویسید و سپس دامنه و برد آنها را به دست آورید. آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟



شکل (۲)



شکل (۱)

۴

الف) اعداد مقابله کوچک به بزرگ مرتب کنید:

$$2^4, \left(\frac{1}{2}\right)^2, 2^2, 2^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^4 < 2^2 < 2^3 < 2^4$$

ب) جاهای خالی را پر کنید:

در تابع $f(x) = a^x$

- اگر $a > 1$, با افزایش مقدار x , مقادیر f از $\underline{\text{از}}^{\text{از}} \underline{\text{از}}^{\text{از}}$ می‌یابند.

- اگر $0 < a < 1$, با افزایش مقدار x , مقادیر f $\underline{\text{با}}^{\text{با}} \underline{\text{با}}^{\text{با}}$ می‌یابند.

در سال‌های قبل، توان‌های طبیعی، صحیح و گویای اعداد حقیقی را تعریف کرده و با ویژگی‌های مقدماتی آنها آشنا شده‌ایم. این قوانین برای توان‌های حقیقی نیز برقرارند. اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک و x و y دو عدد حقیقی باشند، آنگاه داریم:

$$1) a^0 = 1$$

$$2) a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$3) a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

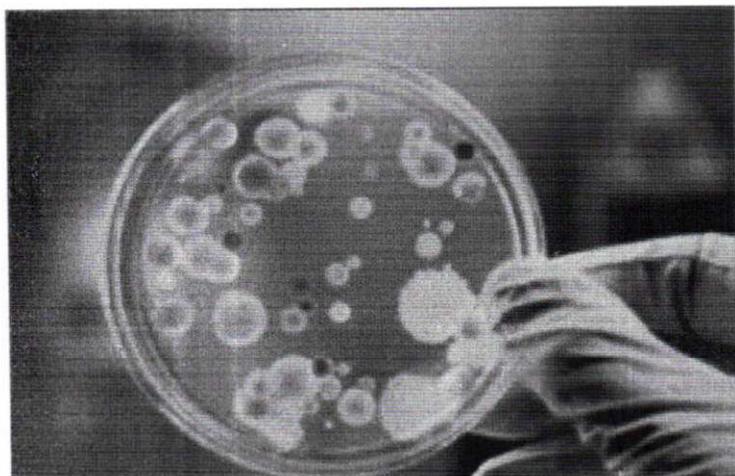
$$4) (a^x)^y = a^{xy}$$

$$5) (ab)^x = a^x b^x$$

$$6) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$7) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

تمرین



۱) تحت شرایط ایده‌آل، جرم یک توده معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا 100 میلی‌گرم باکتری وجود دارد.

$$m(t) = 2^{\frac{t}{100}} \text{ میلی‌گرم}$$

الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

$$m(t) = 2^{\frac{t}{100}}$$

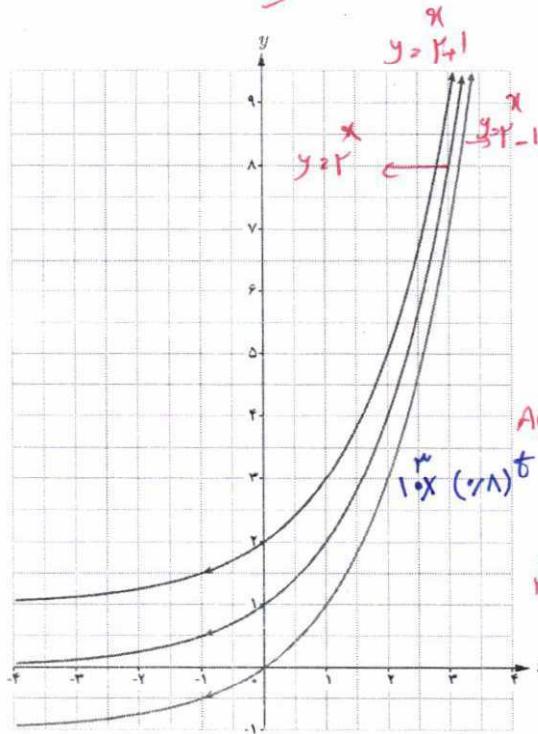
ب) جرم توده را پس از 20 ساعت برآورد کنید.

$$m(20) = 2^{\frac{20}{100}} = 2^{0.2} = 1.12$$



اصل نمودار $y = a^x$ رسم شده و بعد روی محور x صافاله می‌شود که از $y = a^x + 2$ و اس $y = a^x - 2$ داشته باشد. نمودار $y = a^x$ رسم شود.

۷۸



- ۱) نمودار توابع $y = 2^x + 2$ و $y = 2^x - 1$ در شکل روبرو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y = a^x + 2$ و $y = a^x - 2$ با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ($a > 1$)

- ۲) داروها در بدن با ادرار دفع می‌شوند. فرض کنید ۱۰ میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t) = 10 \cdot (1/8)^t$ بدست می‌آید.

(الف) مقدار دارو پس از ۸ ساعت چقدر است؟

- ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می‌رود؟

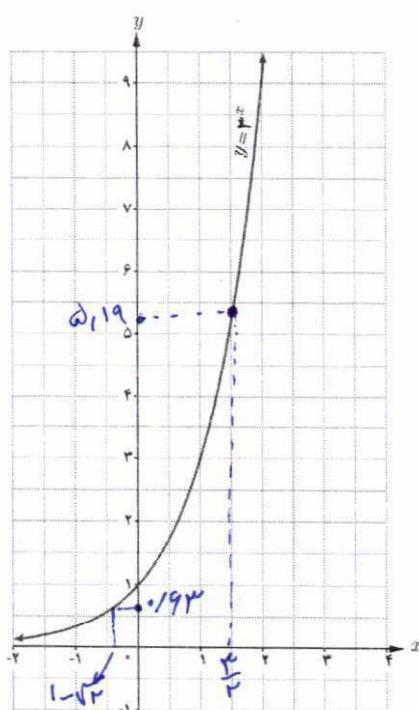
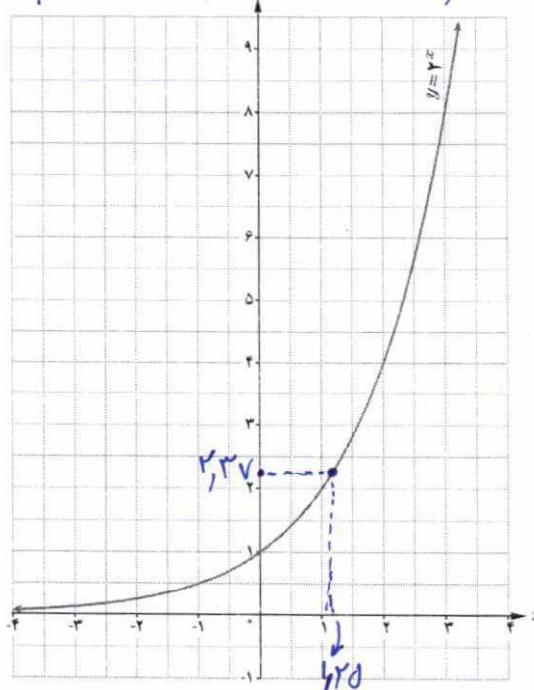
۳) (الف) سه عدد بین اعداد $3^{2/5}$ و $3^{7/5}$ پیدا کنید.

- ب) نامعادله توانی $\frac{1}{1024} < 4^{2x-1} < 2^{\sqrt{3}}$ را حل کنید.

- پ) اگر x, y و z سه عدد حقیقی باشند، به طوری که $a^x > a^y > a^z$ آن‌گاه چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟ ($a > 1$). $x > y > z$

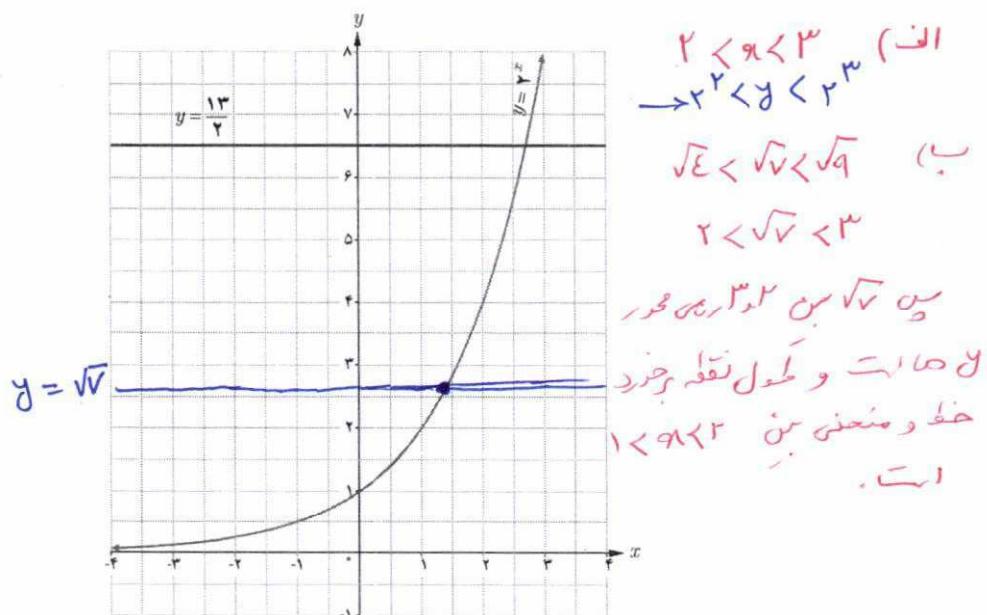
- ۴) ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

$$\begin{array}{l} 3^{\frac{3}{5}} \\ \text{ب) } \approx 1.9 \\ \text{الف) } \approx 2.37 \end{array}$$



ع) الف) در شکل زیر خط $y = 2x$ را قطع کرده است. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟ چرا؟

ب) خط $\sqrt{7} = y$ را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار $y=2$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟



۷ در تصفیه آب، داخل فیلترها، لایه تمیز کننده‌ای قرار دارد که حدود ۳۰ درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند و در نتیجه ۷۰ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اگر داخل این فیلترها، دو لایه قرار دهیم، آنگاه $\frac{30}{70} \times 70 = 49\%$ یا ۴۹ درصد از

ناخالصی‌ها باقی می‌ماند.

الف) عدم خالص هام وحدد آثاره كلام ايجي مستمد من المقدمة

الف) درصد نااحالصی های موجود در اب از دام رابطه بدست می آید؟

$$\frac{\sqrt{n}}{n-1} < \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \Rightarrow$$

$$\gamma V^{n-p} \times V^r < R \rightarrow$$

$$\log_{\frac{1}{N}} n^{-r} > \log_{\frac{1}{N}} \frac{\epsilon}{3q}$$

$$n-r > \log_{\frac{r}{r-1}} a \longrightarrow$$

$$ny \log \frac{N}{\epsilon_{\text{er}}} + r$$



$$\rightarrow n \times r + r \log_{1/r} \frac{r}{n}$$



درس

تابع لگاریتمی و لگاریتم

بار دیگر، مسئله افزایش جرم توده باکتری در محیط کشت را که در ابتدای این فصل مطرح شد، در نظر بگیرید. می خواهیم بدانیم در چه زمانی وزن باکتری ها 512 گرم است، یعنی اگر $m(t) = 512$ ، می خواهیم t را بیابیم. چون تابع $m(t) = 2^t$ یک تابع یک به یک است، پس وارون پذیر است و از این رو $(512) = m^{-1}(t)$. به جدول های زیر نگاه کنید:

t (زمان)	$m(t) = p$, جرم باکتری ها در زمان t
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
۵	۳۲

p (زمان)	$m^{-1}(p) = t$, زمان رسیدن به جرم p
۱	۰
۲	۱
۴	۲
۸	۳
۱۶	۴
۳۲	۵

خواندنی

جان نپیر (John Napier)

جان نپیر ریاضیدان اسکاتلندی مفهوم لگاریتم را پایه زنی کرد. لگاریتم برای ساده کردن محاسبات ابداع شد و در قرن 16 و 17 بزرگ ترین پیشرفت در علم حساب بود. لگاریتم در علوم زیادی کاربرد دارد. متلاً در زلزله بر حسب رشته اندازه گیری شدت زلزله بر حسب رشته کاربرد دارد. لگاریتم در حسابداری و مسائل مالی تقریباً کاربردهای زیادی دارد.

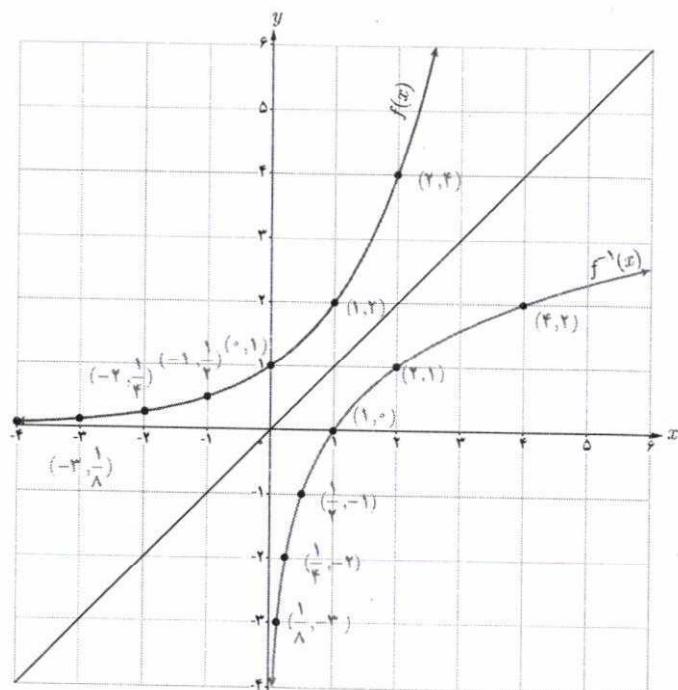
نمودارهای تابع $y = f(x) = 2^x$ و تابع وارون آن در شکل رویه رو رسم شده اند. دقت کنید که برای رسم تابع وارون $y = 2^x$ کافی است قرینه نقاط روی تابع را نسبت به خط $y = x$ پیدا کنیم. به عنوان مثال، نقطه $(2, 4)$ روی تابع $y = 2^x$ و نقطه $(4, 2)$ که قرینه آن نسبت به خط $y = x$ است، روی تابع وارون آن (تابع لگاریتمی) قرار دارد. می توان دید:

$$D_f = (-\infty, +\infty), R_f = (0, +\infty)$$

$$D_{f^{-1}} = (0, +\infty), R_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty)$$

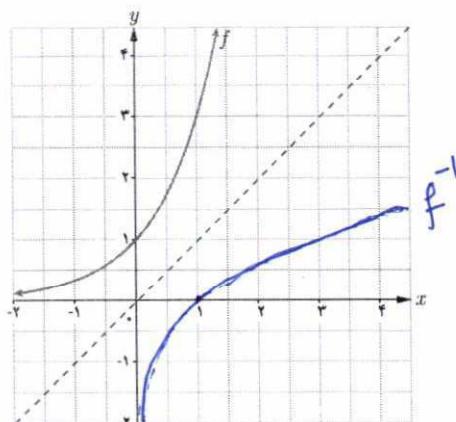
توجه کنید که دامنه f با برد f^{-1} برابر است و برد

$$\text{دامنه } f \text{ با دامنه } f^{-1}$$



فعالیت

۱) با توجه به نمودار تابع $f(x) = 3^x$ نمودار تابع f^{-1} را رسم کنید و جدول زیر را کامل کنید.



$f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$	\Leftrightarrow	$f^{-1}\left(\frac{1}{9}\right) = -2$
$f(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$	\Leftrightarrow	$f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = -1$
$f(0) = 3^0 = 1$	\Leftrightarrow	$f^{-1}(1) = 0$
$f(1) = 3^1 = 3$	\Leftrightarrow	$f^{-1}(3) = 1$
$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$	\Leftrightarrow	$f^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2}$
$f(2) = 3^2 = 9$	\Leftrightarrow	$f^{-1}(9) = 2$

۲) گزینه درست را با ✓ و گزینه غلط را با ✗ علامت بزنید.

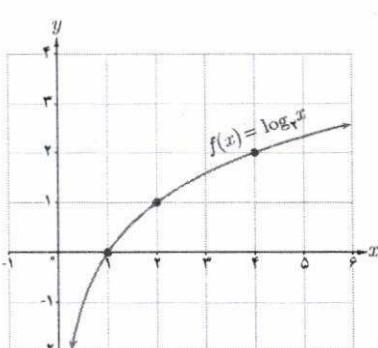
- نقطه $(\frac{1}{9}, -2)$ روی نمودار f قرار دارد. ✗
- نقطه $(\frac{1}{3}, -1)$ روی نمودار f^{-1} قرار دارد. ✓
- نقطه $(0, 1)$ روی نمودار f قرار دارد. ✗
- نقطه $(1, 3)$ روی نمودار f^{-1} قرار دارد. ✓
- تابع f^{-1} یک به یک است. ✓

فرض کنید داریم $f(x) = 3^x$ و $f^{-1}(x) = y$. در این صورت y را لگاریتم x در پایه ۳ می‌خوانیم و آن را با نماد $y = \log_3 x$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم لگاریتم x در پایه ۳.

اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد، تابع نمایی $f(x) = a^x$ یک به یک است و از این رو دارای تابع وارون f^{-1} است که تابع لگاریتمی پایه a نامیده می‌شود و با نماد $y = \log_a x$ نشان داده می‌شود.

مثال: وارون تابع $f(x) = \log_5 x$ تابع $f^{-1}(x) = 5^x$ است.

همچنین وارون تابع $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ تابع $g^{-1}(x) = (\frac{1}{3})^x$ است.

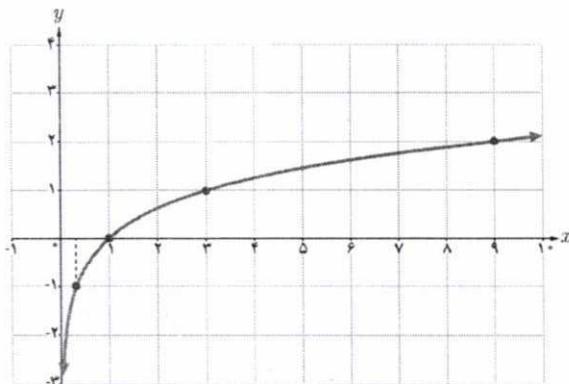


مثال: با توجه به نمودار $f(x) = \log_2 x$ ، می‌توان دید:

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 1$$

$$f(4) = 2$$



مثال : مقادیر زیر با استفاده از نمودار $f(x) = \log_{10} x$ به دست آمده‌اند.

$$f(1) = 0$$

$$f(10) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = -1$$

$$f(0.01) = -2$$

به‌طور کلی

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

به عنوان مثال، $z = 3 = \log_{10} 1000$ و یا $z = 2 = \log_{10} 100$.

$$\text{همچنین } z = -2 = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}, \text{ زیرا } \log_{10} \frac{1}{100} = -2.$$

خواندنی



مثال : فرض کنید $f(x) = \log_{10} x$. مقدار تابع f را در هر یک از نقاط زیر در صورت وجود، حساب کنید.

$$\text{الف) } x=10 \quad \text{ب) } x=100$$

$$\text{ت) } x=1000 \quad \text{پ) } x=-2$$

حل :

$$\text{الف) } f(10) = \log_{10} 10 = 1, \text{ زیرا } 10^1 = 10$$

$$\text{ب) } f(100) = \log_{10} 100 = 2, \text{ زیرا } 10^2 = 100$$

پ) $f(-10)$ موجود نیست، زیرا لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

$$\text{ت) } f(1000) = \log_{10} 1000 = 3, \text{ زیرا } 10^3 = 1000$$

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتم ۸۳

مثال: با توجه به تعریف لگاریتم، جدول زیر را داریم:

$2^5 = 32$	$6^2 = 36$	$5^3 = 125$	$2^{10} = 1024$	$3^4 = 81$
$\log_2 32 = 5$	$\log_6 36 = 2$	$\log_5 125 = 3$	$\log_2 1024 = 10$	$\log_3 81 = 4$

مثال: تساوی‌های زیر را به صورت توانی بیان کنید.

ب) $\log_2 \frac{1}{27} = -3$

الف) $\log_7 1 = 0$

حل:

الف) اگر $\log_7 1 = 0$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $1 = 7^0$.

ب) اگر $-3 = \log_2 \frac{1}{27}$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $\frac{1}{27} = 2^{-3}$.

مثال: مقادیر زیر را محاسبه کنید:

ب) $\log_4 1$

ب) $\log_6 6$

الف) $\log_2 8$

حل:

الف) اگر $a = \log_2 32$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $2^a = 32$ و از این رو $a = 5$.

ب) اگر $b = \log_6 6$ ، آن‌گاه $6^b = 6$ و در نتیجه $b = 1$.

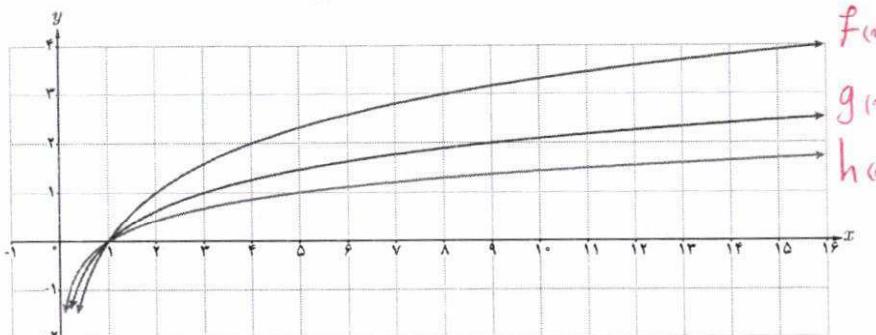
پ) اگر $c = \log_4 1$ ، آن‌گاه $4^c = 1$ و در نتیجه $c = 0$.



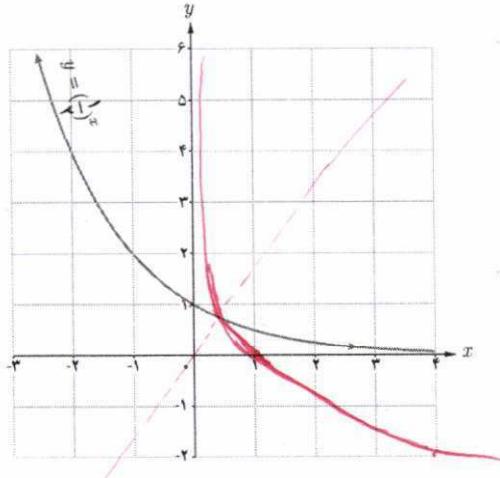
الف) نمودار سه تابع $h(x) = \log_5 x$ ، $f(x) = \log_2 x$ و $g(x) = \log_3 x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. ضابطه هریک را روی نمودار آن بنویسید.

ب) محل دقیق هریک از نقاط زیر را روی نمودار متناظرش نشان دهید.

$h(2) \in \text{_____}$ و $(5, 1) \in f(\text{_____})$ و $(16, 4) \in g(\text{_____})$



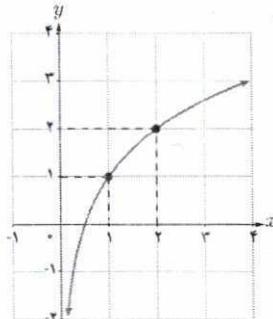
پ) با توجه به نمودار $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید. سبّت ب خط $y = x$ در نمودار



با بررسی نهای طریق سنجشی خواهیم یافت که هر دو از این دو نمودار

ساده‌تر است.

$$(ب) y = (\frac{1}{2})^{x-1}$$



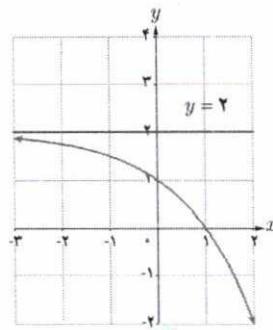
مشخص کنید که هر دو از این دو نمودار

$$y = (\frac{1}{2})^{x-1}$$

$$y = -2^x + 2$$

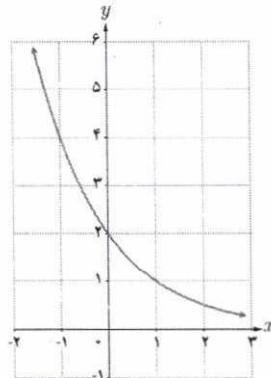
ساده‌تر است.

$$(ب) y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$$



$$(الف) y = -2^x + 2$$

$$(الف) y = -2^x + 2$$



$$(الف) y = (\frac{1}{2})^{x-1}$$

حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

$$(ب) \log_{\frac{1}{2}} 8$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 3^4 = 4 \log_{\frac{1}{2}} 3 = 1$$

$$(ب) \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{6}$$

$$= 1$$

$$(الف) \log_{\frac{1}{2}} 81$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 3^4 = 4 \log_{\frac{1}{2}} 3 = 1$$

۱ با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را باید:

$$\log_{10} 10 = 1, \quad \log_6 \frac{1}{6} = -1, \quad \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}, \quad \log_7 \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3}$$

۲ نمودار تابع $y = \log_a x$ را برای دو حالت $a > 1$ و $0 < a < 1$ با هم مقایسه کنید.

۳ (الف) خط $y = 2x$ نمودار تابع $y = 3^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

(ب) خط $y = 1$ نمودار تابع $y = 10^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۴ نمودار دو تابع $f(x) = 4^x$ و $g(x) = x^4$ رارسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.

۵ عبارت درست را با ✓ و عبارت غلط را با ✗ علامت بزنید.

- لگاریتم اعداد مثبت کمتر از 1 همواره عددی منفی است. ✗ صنایع اسلامی تبرده است

- لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود. ✓

- تابع لگاریتم، تابعی یک به یک است ✓

- تابع لگاریتم محور y را قطع می‌کند. ✗

- اگر نقطه (b, d) روی نمودار $y = a^x$ قرار داشته باشد، آنگاه (d, b) روی نمودار $y = \log_a x$ قرار دارد. ✓

- اگر $a > b > 0$ آنگاه $\log_a b < \log_a a$. ✗ در صنایع اسلامی تبرده است

۶ نمودار تابع‌های زیر رارسم کنید.

$$y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$y = -3^{-x} - 2$$

$$y = 1 + \log_2 x$$

ویرگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی

درس

ویژگی های لگاریتم

برای حل یک مسئله واقعی که در بیان ریاضی آن لگاریتم به کار رفته است، نیازمند استفاده از روابطی هستیم که بین لگاریتم‌ها برقرار است. به همین جهت در این قسمت به بیان و اثبات روابط و ویژگی‌های لگاریتم می‌پردازیم. پرخی از ویژگی‌های ساده لگاریتم به صورت زیر هستند:

$$b=a, \log_a b=1$$

مثال:

مثال: نشان دهد برای اعداد حقیقی، مشت a , b و c ، که $c \neq 1$ ، همواره داریم:

$$\log ab = \log a + \log b$$

❖ حل : فرض کنیم $a = c^x$, $c^y = c^{x+y}$. پس طبق تعریف، $a = c^x$ و $b = c^y$. در نتیجه $\log_c ab = \log_c a + \log_c b = x + y$. طبیعی لگاریتم داریم $y = \log_c b$.

* مثال : با توجه به مثال قبل، $\log_a b^r = \log_a(b \times b) = \log_a b + \log_a b = 2\log_a b$. به طور مشابه $\log_a b^r = \log_a(b^r \times b) = (\log_a b + \log_a b) + \log_a b = 3\log_a b$ و به طور کلی اگر $a \neq 1$ ، $a, b > 0$ باشد، آنگاه n یک عدد حقیقی باشد، آنگاه

$$\log b^n = n \log b$$

$\log_a a^n = n$

قرار داد: همواره منظور از $\log a$ عبارت است از $a^{\log x}$. همچنین، لگاریتم در پایه 10 را لگاریتم اعشاری می‌نامیم.

مثال: فرض کنیم $a = \log_2 5$. نشان دهد $a - 1 < a$.

پس طبق مثال بالا، $\log_{10} 1 = \log 2 + \log 5$ و در نتیجه $\log 5 = 1 - \log 2 = 1 - a$



$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b = \log_c a + \log_c b^{-1} = \log_c a + \log_c b =$$

مودع

$$(ii) \log \gamma_{\text{NO}} = \log \frac{P}{C} = \log P - \log C = \log P - 1$$

سوال ۲

$$\therefore \mu \log (r)^{\frac{1}{\mu}} - \log \frac{1000}{e} = \mu \left(\frac{1}{\mu}\right) \log r - \log$$

٨٧ فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتم

$$\therefore \log \frac{a}{1000} = \log a - \log 1000 = \log \frac{a}{r} - \log 10^3 =$$

کار در کلاس

$$\log b - \log r - k = 1 - a - k = -r - a$$

نیز دهید که اگر $a, b, c > 0$ و $c \neq 1$ ، آنگاه

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

اگر $a = \log_2 b$ و $b = \log_3 c$ ، حاصل عبارت‌های زیر را پر حسب a و b بنویسید.

log °/°° ५ (८)

$$3 \log \sqrt[3]{4} - \log 25. \quad (\text{C})$$

٧٥ / ﻋـ

معادلات لوگاریتمی

در برخی از مدل‌سازی‌ها به یک معادله شامل عبارت‌های لگاریتمی می‌رسیم؛ مانند محاسبه شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن یا آستانه شنوایی، یعنی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص و محاسبه نیمه عمر عناصر رادیوакتیو. در حل بسیاری از این معادلات، جواب‌ها با استفاده از خواص لگاریتم به دست می‌آیند که به این معادلات، معادلات لگاریتمی می‌گوییم. منظور از حل معادله لگاریتمی، یافتن مقدار یا مقادیری از متغیر است که در معادله صدق کند.

$$\log(x+1) = 2, \quad \log_r x = \log_r r, \quad \log_r x + \log_r(x-1) = \log_r 12$$

در حالت کلی داریم:

گردد و $a \neq 1$ ، آنگاه از تساوی $\log_a x = \log_a y$ می‌توان نتیجه گرفت $x=y$ و بالعکس، اگر $x=y$ و $a \neq 1$ باشد، آنگاه $\log_a x = \log_a y$ است.

مثال : معادله لگاریتمی $\log_5(x-2) = \log_5 x$ را حل کنید.

❖ حل : به سادگی می توان دید $x^2 - x - 2 = 0$ و از این رو $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. از طرفی $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$ و در نتیجه ریشه های معادله $x^2 - x - 2 = 0$ برابر با $x_1 = -1$ و $x_2 = 2$ هستند. قسمت مهم حل یک معادله لگاریتمی آزمایش کردن جواب هاست. در این مثال، چون لگاریتم اعداد -1 و 2 ممکن نیست، جواب $x = -1$ نامعتبر است و تنها جواب $x = 2$ است (حریم).

مثال : معادله $\log_3 x - \log_3 4 = \log_3 16$ را حل کنید.

$$\text{حل : می دانیم } \log_5 \left(\frac{x^3}{4} \right) = \log_5 16 , \text{ بنابراین } 3 \log_5 x - \log_5 4 = \log_5 \left(\frac{x^3}{4} \right)$$

$$x^3 = 16 \times 4 = 64 \quad \text{نباران} \quad x = 4 \quad \text{با جایگذاری} \quad x=4 \quad \text{در معادله بالا می توان دید این جواب قابل قبول است.}$$

الف) $\log_{\frac{1}{n}}(n-1) = \log_{\frac{1}{n}}n$ ابتدا دامنه را تعریف کنیم $n > 1$ و $n \in \mathbb{N}$. از نظر اکسپونانس $n^{1/n} < 1$

حل $n-1 = n \rightarrow n = 1$ در دامنه ممکن است

$$\text{ب) } \log_{\frac{1}{n}}(n-1)(\frac{n}{n-1}) = 2 \rightarrow (n-1)(\frac{n}{n-1}) = 4 \rightarrow (n-1)(n+3) = 18 \rightarrow n^2 + n - 18 = 0 \rightarrow$$

$$n^2 + n - 18 = 0 \rightarrow (n+6)(n-3) = 0 \quad \begin{cases} n = -6 \\ n = 3 \end{cases}$$

$$\text{ب) } n(n+3) = 1 \rightarrow n^2 + 3n - 1 = 0 \rightarrow (n+6)(n-3) = 0 \quad \begin{cases} n = -6 \\ n = 3 \end{cases}$$

فعالیت

معادله های لگاریتمی زیر را حل کنید :

$$\log x + \log(x+3) = 1$$

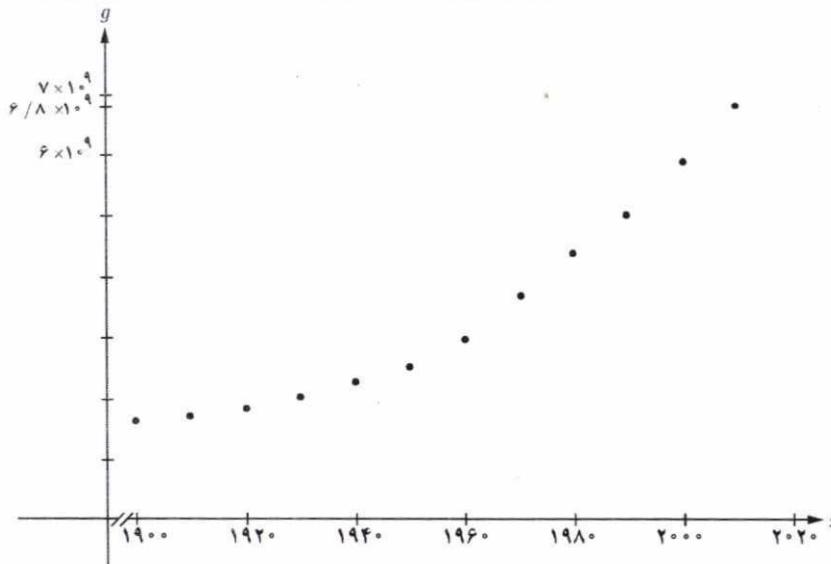
$$\log_2(x-1) + \log_2\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2$$

$$\log_5(2x-1) = \log_5 x$$

کاربردهای لگاریتم

مثال : جدول زیر، جمعیت جهان را در قرن بیستم و پایان دهه اول قرن بیست و یکم نشان می دهد.

سال	۱۹۰۰	۱۹۱۰	۱۹۲۰	۱۹۳۰	۱۹۴۰	۱۹۵۰	۱۹۶۰	۱۹۷۰	۱۹۸۰	۱۹۹۰	۲۰۰۰	۲۰۱۰
جمعیت (میلیون)	۱۶۵	۱۷۵	۱۸۶	۲۰۷	۲۳۰	۲۵۶	۳۰۴	۳۷۱	۴۴۵	۵۲۸	۶۰۸	۶۸۰



الف) با توجه به جدول، نمودار جمعیت جهان بر حسب سال به صورت زیر است :

ب) اگر محور x هایانگ سال و محور y هایانگ جمعیت باشد^۱، تابع جمعیت در انتهای هر سال به صورت $g(x) = 1.376 \times 10^8 \times 1.016^x$ برآورد می شود. به سادگی دیده می شود که جمعیت در پایان سال ۲۰۱۶ تقریباً برابر است با :

$$g(2016) = 1.376 \times 10^8 \times 1.016^{2016} \approx 7,385,745,120$$

در اینجا می توان حدس زد که در چه سالی جمعیت جهان به ۸ میلیارد خواهد رسید، زیرا داریم :

$$g(x) = 8 \times 10^9 = 1.376 \times 10^8 \times 1.016^x$$

$$\Rightarrow 1.376^x = 1.016^{12} \Rightarrow x \log 1.376 = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{\log 1.376} \approx 20.21$$

$$(\log 1.376 \approx 0.095935)$$

۱- دقت کنید که نقطه ابتدایی دامنه تابع $g(x)$ نقطه ۱۹۰۰ است.

مثال: ریشر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین لرزه و نماد میزان انرژی آزاد شده در زلزله است. اگر بزرگی زمین لرزه برابر M در مقیاس ریشر باشد، مقدار انرژی آزاد شده بر حسب ارج (Erg) از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\log E = 11/8 + 1/5 M.$$

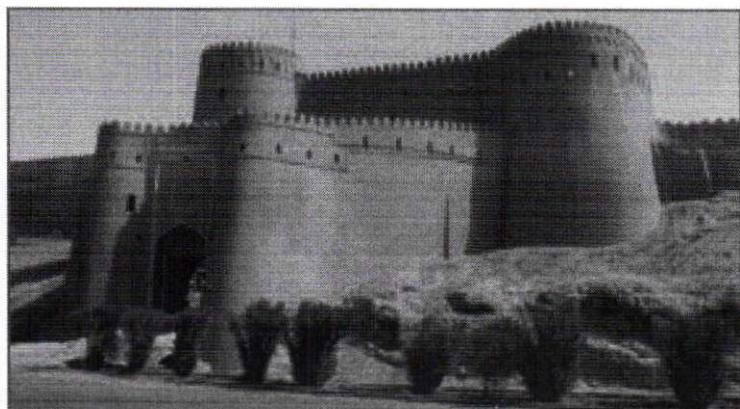
از این رابطه می‌توان محاسبه کرد که مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله ۶/۶ ریشری برابر است با:

$$\log E = 11/8 + 1/5 (6/6) = 21/8 \Rightarrow E = 10^{21/8} \text{ Erg.}$$

خواندنی

جالب است بدانید که:

در زلزله ۶/۶ ریشری به (۱۳۸۲) ۹۰ درصد از سازه‌های این شهر که پیش از ۲۵۰۰ سال قدمت داشت ازین رفت. با توجه به اینکه انرژی آزاد شده در یک زلزله ریشری معادل انفجار یک میلیارد تن TNT است، بنابراین انرژی آزاد شده در زلزله به معادل انفجار $10^{6/6 \times 10^9} = 825 \times 10^9 = 825$ میلیون تن TNT بوده است.



مثال: نیمه عمر یک نوع ماده هسته‌ای حدود ۲۵ سال است. اگر جرم نمونه‌ای از این ماده، ۲۴ میلی‌گرم باشد جدول زیر تغییرات جرم نمونه پس از t سال را نشان می‌دهد.

با توجه به جدول جرم باقی‌مانده از این نمونه بعد از گذشت t سال از رابطه $m(t) = 24 \times 2^{-\frac{t}{25}}$ به دست می‌آید.

بنابراین، به عنوان مثال جرم باقی‌مانده پس از ۴۰ سال برابر است با:

$$m(40) = 24 \left(2^{-\frac{40}{25}} \right) \approx 7/9 \text{ میلی‌گرم}$$

t (زمان بر حسب سال)	(جرم بر حسب میلی‌گرم) $m(t)$
۲۴	۲۴
۲۵	$\frac{1}{2}(24) = 12$
۵۰	$\frac{1}{2^2} \times 24 = 6$
۷۵	$\frac{1}{2^3} \times 24 = 3$
۱۰۰	$\frac{1}{2^4} \times 24 = 1/5$

$$\text{الف} \quad 2\log_4^m - \log_4^m - 3 = 0 \rightarrow \log_4^m = 3 \rightarrow m = 4^3 = 64$$

$$\text{ب) } \log_r \frac{12b-21}{b-3} = 2 \rightarrow \frac{12b-21}{b-3} = r^2 \rightarrow 12b-21 = rb^2-12r \rightarrow rb^2-12b+9 = (rb-3)^2 = 0.$$

$$\therefore x^2 - 1 = 16 \rightarrow n^2 = 11 \rightarrow n = \pm \sqrt{11} \quad \checkmark$$

۹۰

تمرین

۱ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_4 m^2 - \log_4 m - 3 = 0$

ب) $\log_r (12b - 21) - \log_r (b^2 - 3) = 2$

پ) $\log_{\frac{1}{x}} (x^2 - 1) = -1$

۲ الف) در فعالیت ۱ از درس اول این فصل، دیدیم که جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t) = 2^t$ به دست می‌آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

ب) با استفاده از وارون تابع (t) ، برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۵۰۰۰ گرم می‌شود؟

$$m(t) = 2^t = 5000 \rightarrow \log_2 5000 = t \Rightarrow \log_2^{5000} = \log_2^{5 \times 10^3} = 3 + \log_2 5 = 3 + \log_2 \frac{10}{2} = 3 + \log_2 10 - \log_2 2 = 3 + \log_2 10 - 1 = 3 + 3.32 = 6.32$$

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $\log_d abc = \log_d a + \log_d b + \log_d c$ ب) $a^{\log_b a} = a$

ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است. خ) $\log x \log y = \log x + \log y$

۳ نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن بک گرم است.

الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می‌ماند، باید.

ب) طی چند روز، این جرم به ۱۰٪ گرم کاهش می‌یابد؟

۴ عبارات زیر را ساده کنید. $(\log 3 = 0.4771, \log 2 = 0.3010)$

$$\begin{aligned} \log_r^{\frac{1}{4}} - \log_r^{\frac{1}{4}} &= \log_r \frac{\sqrt{r}}{\sqrt[4]{r}} \quad (\text{ب}) & \left\{ \begin{array}{l} \log \left(\frac{3}{e}\right)^{\frac{1}{2}} = \log \sqrt{3/e} \\ = \frac{1}{2} \left(\log 3 - \log e \right) = \frac{1}{2} (0.4771 - 0.4343) = 0.0214 \end{array} \right. \quad (\text{ب}) \\ = \log_r^{\frac{1}{4}} - \log_r^{\frac{1}{4}} &= \frac{1}{4} \times 1 - \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} & \left\{ \begin{array}{l} \log (18 \times 375)^{\frac{1}{3}} = \log 18 + \log 375 \\ = \log 18 + 3 \log 375 = \log 18 + 3 \log 18 - 3 \log 2 = 3(0.2585) - 3(0.3010) = -0.6445 \end{array} \right. \quad (\text{الف}) \end{aligned}$$

۵ گزینه‌های درست را با ✓ و گزینه‌های نادرست را با ✗ علامت بزنید.

✗ $\log 5 = \log 3 + \log 2$ ■

✓ $\log_b a \times \log_a b = 1$ ■

۶ نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰ سال باقی

می‌ماند چقدر است؟

$$m(t) = 128 \times 2^{-\frac{t}{30}} \quad t = 30$$

$$m(30) = 128 \times 2^{-\frac{30}{30}} = 128 \times 2^{-1} = 128 \times \frac{1}{2} = 64$$

جم بقای ماده بعد از ۳۰ سال

مثلثات



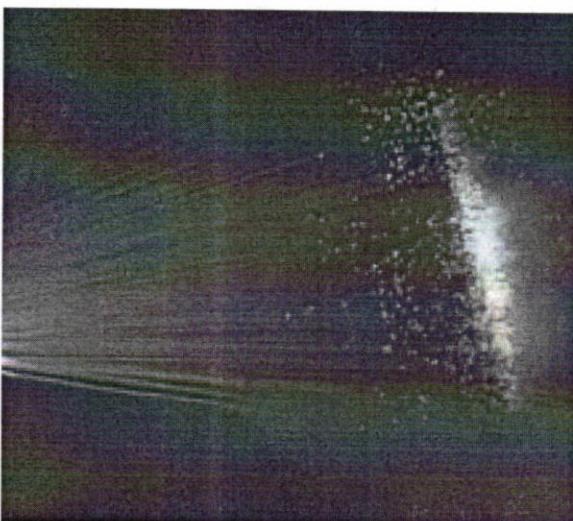
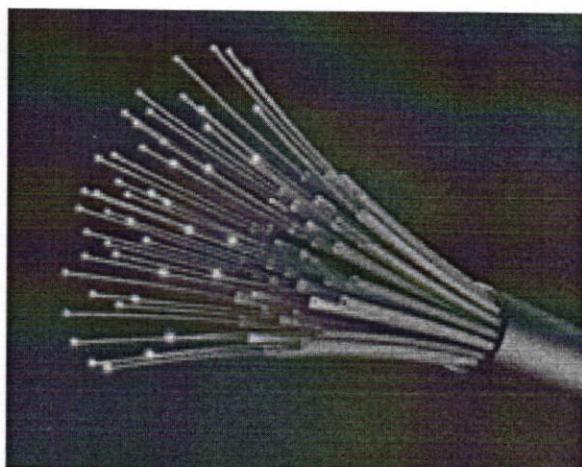
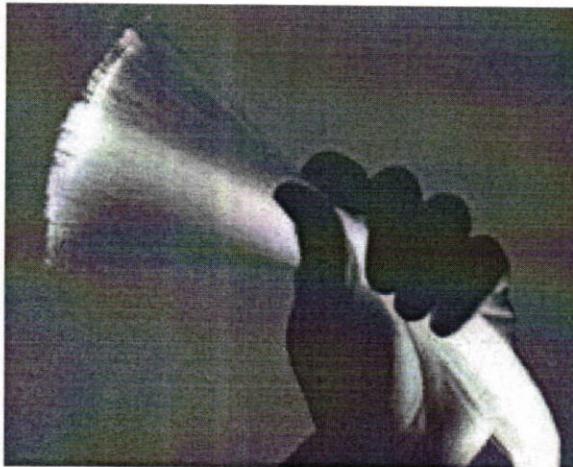
رادیان

۲ نسبت‌های مثلثاتی برخی زوايا

۳ توابع مثلثاتی

۴ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوايا

فصل



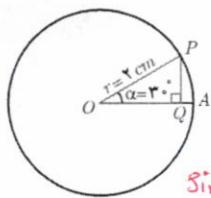
فیبرهای نوری برای انتقال داده‌ها با سرعت بسیار بالا بهویژه در خطوط اینترنت استفاده می‌شوند. برای طراحی این فیبرها نیاز است تا امواج نوری به کمک امواج سینوسی تسبیه‌سازی شوند. معمولاً چندین رشته از فیبرهای نوری در یک غلاف پلاستیکی محافظت می‌شود.

رادیان

درس

تاکنون زاویه‌ها را بر حسب «درجه» اندازه‌گیری می‌کردیم. استفاده از واحد «درجه» برای اندازه‌گیری زوایا در هندسه بسیار متداول است. اما در برخی محاسبات فنی بهتر است از واحدهای دیگری استفاده شود. در ادامه با یک واحد دیگر اندازه‌گیری زوایا، به نام رادیان، آشنا می‌شویم.

فعالیت



۱) دایره مقابل به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر داده شده است.

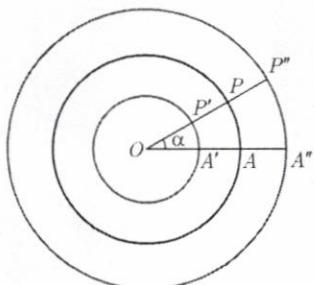
اندازه ضلع PQ در مثلث OPQ را با استفاده از نسبت های

$$\sin \alpha = \frac{PQ}{OP} \rightarrow \sin 30^\circ = \frac{PQ}{2} \Rightarrow PQ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

۲) با توجه به اینکه کمان 30° برابر $\frac{1}{12}$ کل محیط دایره است (چرا؟) می‌توان طول کمان روبرو به زاویه α (یعنی \widehat{PA}) را به صورت زیر به دست آورد.

$$\widehat{PA} = \frac{1}{12} \times 2\pi \times 2 = \frac{1}{12} \times 4\pi = \frac{\pi}{3} \text{ cm}$$

اکنون به مرکز O دایره‌های دیگری به شعاع‌های ۱ و ۳ سانتی‌متر رسم می‌کنیم (شکل رویه‌رو).



الف) مطابق فرمول بالا طول کمان‌های $\widehat{P'A'}$ و $\widehat{P''A''}$ را که روبرو به زاویه $\alpha = 30^\circ$ هستند به دست آورد.

$$\widehat{P'A'} = \frac{1}{12} \times 2\pi \times 1 = \frac{\pi}{6} \text{ cm}$$

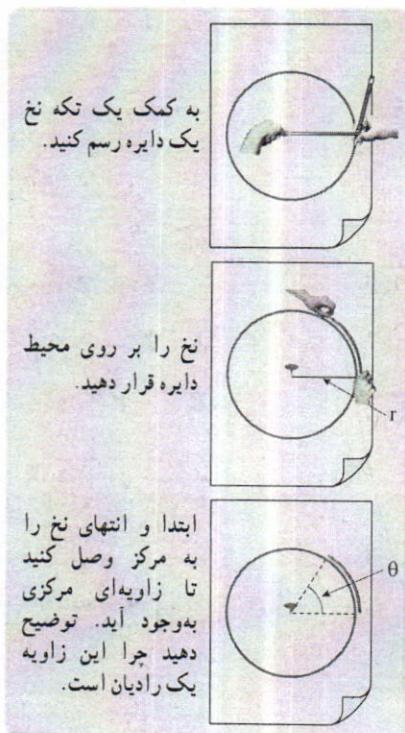
$$\widehat{P''A''} = \frac{1}{12} \times 2\pi \times 3 = \frac{\pi}{2} \text{ cm}$$

ب) در هر دایره نسبت طول کمان روبرو به زاویه α به شعاع آن دایره را محاسبه کنید. این نسبت‌ها با هم چه رابطه‌ای دارند؟

$$\frac{\widehat{PA}}{OP} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\widehat{P'A'}}{OP'} = \frac{\frac{\pi}{6}}{1} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\widehat{P''A''}}{OP''} = \frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{6}$$



پ) اگر در شکل صفحه قبل دایره‌ای به شعاع r و به مرکز O در نظر بگیریم، آیا نسبت فوق در آن دایره تغییری می‌کند؟ چرا؟ با تکمیل رابطه زیر، به این سؤال پاسخ دهید.

$$\frac{\frac{1}{12} \times 2\pi \times r}{r} = \dots \frac{\pi}{4}$$

در سؤال قبل دیدیم که نسبت طول کمان رو به رو به زاویه 30° به شعاع، در همه دایره‌ها برابر مقدار ثابت $\frac{\pi}{6}$ است. اکنون در سؤال زیر به این می‌پردازیم که این نسبت چه زمانی برابر ۱ است.

۲ در یک دایره به شعاع r ، مانند شکل زیر، طول کمان رو به رو به زاویه θ (کمان ℓ) برابر طول شعاع دایره است. نسبت طول کمان به شعاع چقدر است؟

$$\frac{\ell}{r} = 1 \text{ rad}$$

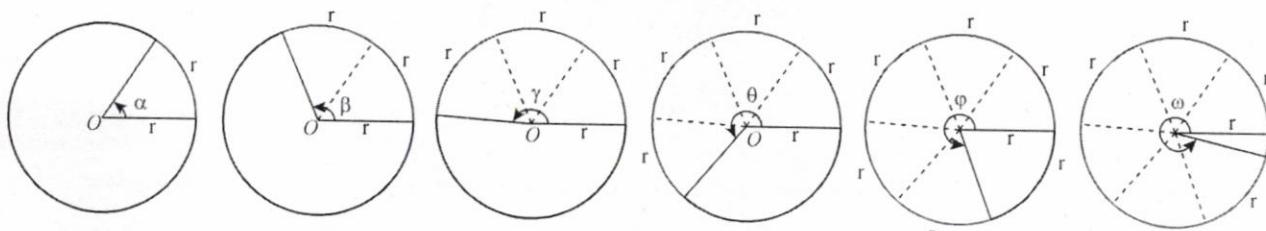
$$1 \text{ rad} = 57,3^\circ \text{ deg}$$

همان‌طور که در فعالیت قبل مشاهده کردید نسبت طول کمان رو به رو به یک زاویه به شعاع دایره همواره مقداری ثابت است. از این مقدار ثابت برای بیان اندازه زاویه می‌توان استفاده کرد؛ مثلاً در سؤال ۳ فعالیت قبل، این نسبت برای زاویه θ برابر یک است. در این صورت می‌گویند اندازه زاویه θ برابر ۱ رادیان است.

یک رادیان، در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه‌ای مرکزی است که طول کمان رو به رو به آن برابر طول شعاع دایره است.

معمولآً از نماد rad برای نمایش اندازه یک زاویه بر حسب رادیان استفاده می‌شود.

در زیر زاویه‌های ۱ تا ۶ رادیان در دایره‌ای به شعاع دلخواه r رسم شده‌اند. در هر شکل به نسبت طول کمان رو به رو به هر زاویه به شعاع دقت کنید.



$$\alpha = \frac{r}{r} = 1 \text{ rad}$$

$$\beta = \frac{2r}{r} = 2 \text{ rad}$$

$$\gamma = \frac{3r}{r} = 3 \text{ rad}$$

$$\theta = \frac{4r}{r} = 4 \text{ rad}$$

$$\varphi = \frac{5r}{r} = 5 \text{ rad}$$

$$\omega = \frac{6r}{r} = 6 \text{ rad}$$

مثال: اندازه یک زاویه نیم صفحه (180°) و نیز یک زاویه قائم (90°) بر حسب رادیان چقدر است؟

حل: می‌دانیم که طول کمان رو به رو به زاویه نیم صفحه، نصف محیط دایره است. بنابراین داریم:

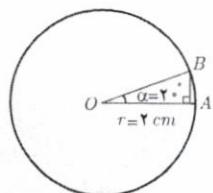
$$\frac{\frac{2\pi r}{2}}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi \text{ rad}$$

پس یک زاویه 180° برابر π رادیان می‌باشد. به طور مشابه طول کمان رو به رو به یک زاویه قائم، ربع محیط دایره است. پس:

$$\frac{\frac{2\pi r}{4}}{r} = \frac{\frac{\pi r}{2}}{r} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

همواره بین اندازه یک زاویه مانند θ بر حسب رادیان و طول کمان l رو به رو به آن در یک دایره به شعاع r رابطه زیر برقرار است.

$$\theta = \frac{l}{r}$$



مثال: در شکل مقابل اندازه زاویه α را بر حسب رادیان به دست آورید، سپس طول \widehat{AB} را پیدا کنید.

حل: از مثال قبل می‌دانیم که هر زاویه 18° برابر π رادیان است. بنابراین داریم:

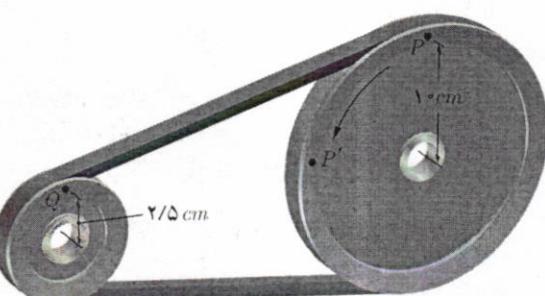
$$\frac{2^\circ}{(\text{بر حسب رادیان})} = \frac{18^\circ}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{2^\circ \pi}{18^\circ} = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$$

پس زاویه α برابر $\frac{\pi}{9}$ رادیان است. اکنون برای به دست آوردن طول \widehat{AB} داریم:

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{9} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{2\pi}{9} \text{ cm}$$

$$\frac{D}{18^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

اگر D اندازه زاویه‌ای بر حسب درجه و R اندازه آن بر حسب رادیان باشد، آنگاه:



مثال: در شکل مقابل، یک تسمه دو فرقه به شعاع‌های 1° cm و $\frac{\pi}{2/5 \text{ cm}}$ را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی فرقه بزرگ تر رادیان می‌چرخد (یعنی نقطه P در موقعیت P' قرار می‌گیرد) فرقه کوچک تر چند رادیان می‌چرخد. ($\pi \text{ rad} = 3/14 \text{ rad}$).

حل: ابتدا مسافتی را که نقطه P بر روی محیط فرقه بزرگ تر طی می‌کند به دست می‌آوریم.

$$\theta = \frac{\widehat{PP'}}{r} \Rightarrow \widehat{PP'} = r\theta = 1^\circ \times \frac{\pi}{\frac{2}{5}} = 5\pi \text{ cm} \approx 15.7 \text{ cm}$$

چون هر دو قرفه با یک سمه به هم متصل هستند پس قرفه کوچک تر نیز $5\pi \text{ cm}$ حرکت می‌کند. برای این قرفه داریم:

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{\omega \pi}{\gamma / \omega} = \frac{\omega \pi}{\gamma} = \gamma \pi \text{ rad}$$

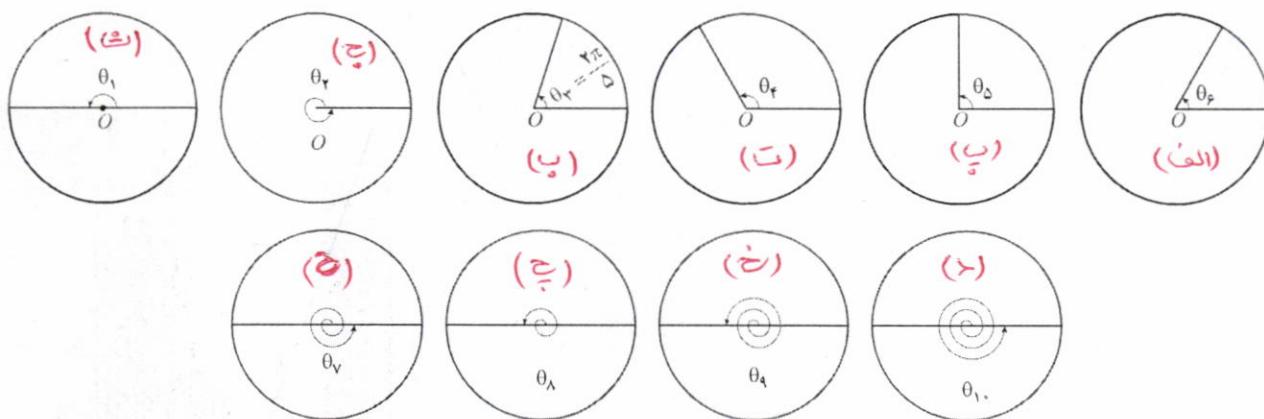
بنابراین وقتی قرقره بزرگ‌تر ربع دور می‌چرخد، قرقره کوچک‌تر یک دور کامل می‌چرخد و نقطه ۰ به مکان خود بازمی‌گردد.

کار در کلاس

زاویه بر حسب درجه	${}^{\circ}$	30°	45°	60°	90°	118°	270°	39°	29°	42°
زاویه بر حسب رادیان	$^{\circ}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$

۷ در زیر، اندازه برخی از زاویه‌ها بر حسب رادیان داده شده است. مانند نمونه، آنرا با زوایای داده شده در دایره‌های مثلثاتی زیر نظری کنید.

الف) $\frac{2\pi}{4}$ ب) $\frac{2\pi}{5}$ ج) $\frac{2\pi}{3}$ د) $\frac{2\pi}{6}$ ح) $\frac{2\pi}{7}$ ت) $\frac{2\pi}{2}$ خ) $\frac{2\pi}{5}$ ي) $\frac{2\pi}{3}$ ز) $\frac{2\pi}{4}$ س) $\frac{2\pi}{6}$

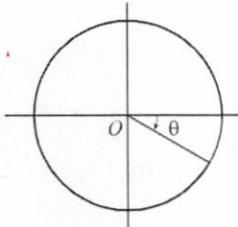


نسبت θ (رادیان)	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	π
$\sin \theta$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	-۱	۰	-۱
$\cos \theta$	-۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۰	۱	-۱
$\tan \theta$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	کوتاه نشده	میگزینه	۰	۰
$\cot \theta$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	۰	میگزینه	میگزینه



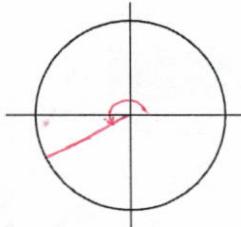
تمرین

- ۱ برای هر یک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد و سپس شکل تقریبی زاویه را همانند نمونه رسم کنید.



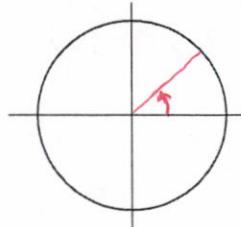
$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

انتهای کمان در ربع چهارم است.



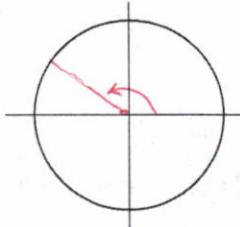
$$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} =$$

انتهای کمان در ربع سوم است.



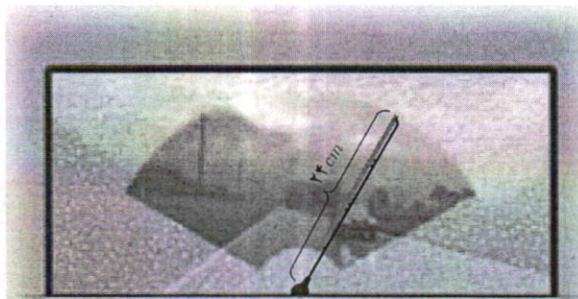
$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} =$$

انتهای کمان در ربع چهارم است.



$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{6} =$$

انتهای کمان در ربع سوم است.



- ۲ طول برف پاک کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است.
فرض کنید برف پاک کن، کمانی به اندازه 120° طی می‌کند. ($\pi = 3/14$)

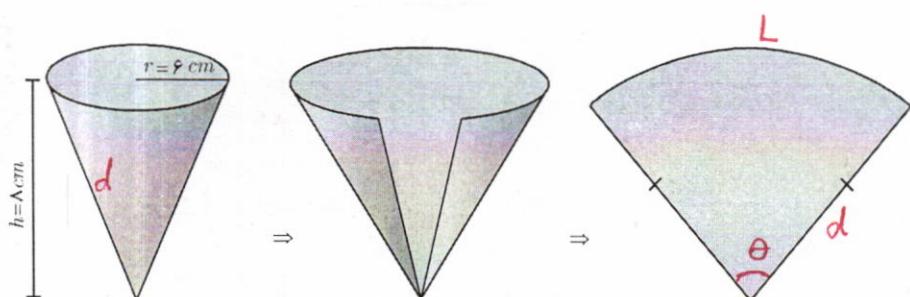
(الف) اندازه کمان را بر حسب رادیان بدست آورید.

(ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک کن چند سانتی‌متر است؟

$$(الف) \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{120}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{2\pi}{3}$$

$$(ب) \frac{120}{360} = \frac{L}{24} \quad \theta = \frac{L}{r} \\ \rightarrow L = \frac{2\pi \times 24}{3} = 16\pi \approx 50.24 \text{ cm}$$

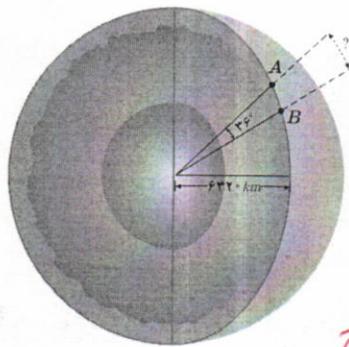
- ۳ شکل فضایی و نیز شکل گستردۀ یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r=6 \text{ cm}$ و ارتفاع آن $h=8 \text{ cm}$ می‌باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گستردۀ این مخروط چند رادیان است؟



۱- به قسمتی از سطح دایره که بین دو شعاع و کمانی از دایره است قطاع گفته می‌شود.

$$d^2 = r^2 + h^2 \\ \rightarrow d^2 = 36 + 64 = 100 \\ \rightarrow d = 10$$

$$\theta = \frac{L}{d} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6}{5}\pi \text{ rad}$$



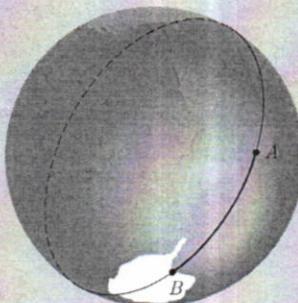
۴ فاصله دو نقطه A و B از کره زمین، که بر روی یک نصف النهار قرار دارند، مطابق شکل رو به رو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازه شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطه داده شده را بیابید.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{36}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{\pi}{\alpha} \text{ rad}$$

اندازه را بحسب طبقه بگیر

$$\theta = \frac{\widehat{AB}}{r} \rightarrow \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\widehat{AB}}{6320} \rightarrow \widehat{AB} = \frac{\pi}{\alpha} \times 6320 = 3968,96 \approx 3969 \text{ Km}$$

خواندنی

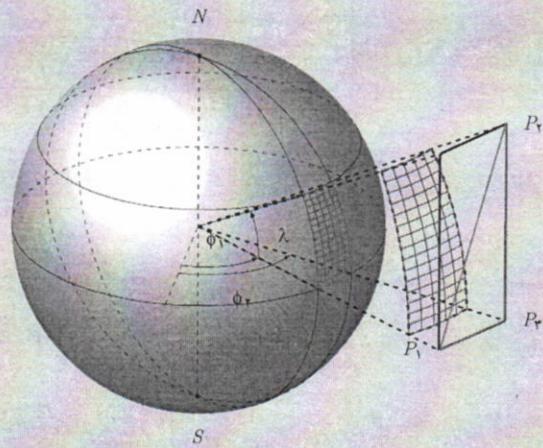


فاصله ژئودزیک دو نقطه از کره زمین



نصف النهارها دایره‌های عظیمه‌ای روی کره زمین تشکیل می‌دهند.

به فاصله بین دو نقطه داده شده در تمرین ۴ در اصطلاح فنی «فاصله ژئودزیک» دو نقطه گفته می‌شود. برای محاسبه فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین لزومی ندارد که آن دو نقطه بر روی یک نصف النهار باشند. در عمل با استفاده از سیستم مکان‌یابی جهانی (*GPS*) موقعیت جغرافیایی آن دو نقطه را بحسب طول و عرض جغرافیایی آنها بدست می‌آورند و سپس با استفاده از محاسبات پیچیده‌ای فاصله ژئودزیک بین آن دو نقطه را محاسبه می‌کنند. در تمام این محاسبات که در آن از مثلثات کروی استفاده می‌شود باید زوایا بحسب رادیان در نظر گرفته شوند، در غیر این صورت محاسبات به مراتب پیچیده‌تر می‌گردد. فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین کوتاه‌ترین فاصله‌ای است که بین آن دو نقطه می‌توان پیدا کرد. این فاصله، طول کمانی از بزرگ‌ترین دایره‌ای است که از آن دو نقطه می‌گذرد و به آن «دایره عظیمه» می‌گویند. محاسبه فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین در طراحی مسیرهای هوایی و دریایی و نیز هدایت ماهواره‌ها بسیار اهمیت دارد. بررسی کنید که چرا برای دو نقطه از کره زمین که روی یک نصف النهار قرار دارند، دایره عظیمه همان نصف النهار گذرنده از آن دو نقطه می‌باشد.



مثلثات کروی در طراحی مسیرهای هوایی و دریایی و نیز محاسبه سطوح و خم‌ها بسیار کاربرد دارد.

نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایای



درس

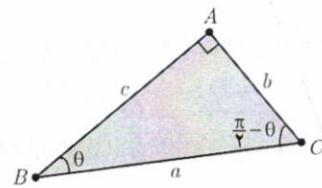
در سال گذشته به مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای برخی از زوایای تند (مانند $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$) و نیز زوایای مرزی ($90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$) پرداختیم. همچنین علامت نسبت‌های مثلثاتی را در چهار ربع دایره مثلثاتی یاد گرفتیم. اکنون به مقدار این نسبت‌ها برای برخی دیگر از زوایا و رابطه بین آنها می‌پردازیم.

نسبت‌های مثلثاتی زوایایی متمم

می‌دانید که به هر دو زاویه‌ای که مجموع اندازه آنها 90° باشد زاویه‌های متمم می‌گویند. نسبت‌های مثلثاتی چنین زاویه‌هایی با هم ارتباط دارند. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا این روابط را پیدا کنید.

فعالیت

یک مثلث قائم الزاویه دلخواه مانند شکل زیر را در نظر بگیرید.



با توجه به شکل، دو ستون روبرو را همانند نمونه کامل و سپس مقادیر مساوی در دو ستون را با هم نظری کنید.

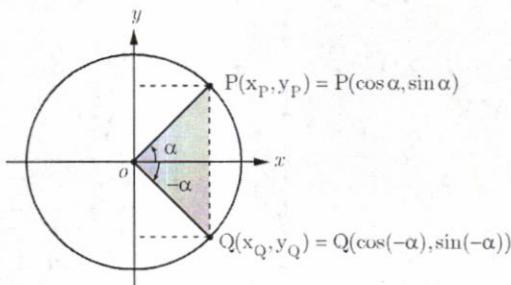
$\sin \theta = \frac{b}{a}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{c}{a}$
$\cos \theta = \frac{c}{a}$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{b}{a}$
$\tan \theta = \frac{b}{c}$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{c}{b}$
$\cot \theta = \frac{c}{b}$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{b}{c}$

در فعالیت قبل زاویه‌های مورد بحث تند بودند. روابط بدست آمده در آنجا در حالت کلی نیز برقرار است. به طور کلی برای دو زاویه متمم θ و $\frac{\pi}{2} - \theta$ همواره روابط روبرو برقرار است.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cot \theta \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \tan \theta\end{aligned}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه

فعالیت



در دایره مثلثاتی رو به رو نقطه P انتهای کمان رو به رو به زاویه α است. مختصات نقطه P بر حسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه α که در سال گذشته آموختید، داده شده است. همچنین با توجه به دستگاه مختصات واضح است که قرینه نقطه $P(x_P, y_P)$ نسبت به محور x نقطه $Q(x_Q, y_Q) = Q(x_P, -y_P)$ می‌باشد.

الف) با توجه به رابطه بین مختصات نقاط P و Q روابط مثلثاتی زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = x_P \Rightarrow \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$y_Q = -y_P \Rightarrow \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

ب) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط بدست آمده از قسمت الف کامل کنید.

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha$$

دو زاویه α و $-\alpha$ قرینه یکدیگرند. برای دو زاویه قرینه روابط مثلثاتی زیر برقرار است.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

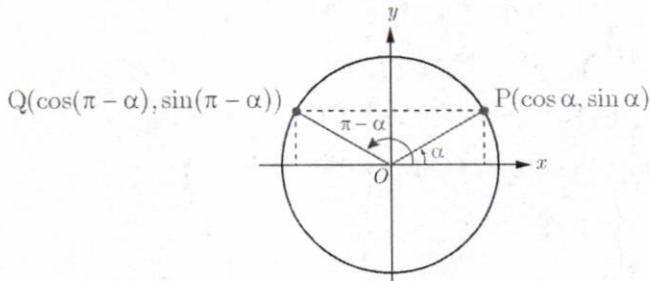
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

دو زاویه را مکمل گوییم اگر مجموع آنها 180° باشد. در فعالیت بعد روابط بین مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای چنین زاویه‌هایی را بدست خواهیم آورد.

فعالیت



در دایره مثلثاتی زیر نقطه $P(x_P, y_P)$ انتهای کمان روبرو به زاویه α است. با توجه به دستگاه مختصات واضح است که نقطه $Q(x_Q, y_Q) = Q(-x_P, \cancel{y_P})$ قرینه نقطه P نسبت به محور y هاست.

الف) با توجه به مختصات نقاط P و Q روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = -x_P \Rightarrow \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$y_Q = y_P \Rightarrow \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

ب) با توجه به روابط قسمت الف، تساوی های زیر را تکمیل کنید.

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = \frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\cot \alpha$$

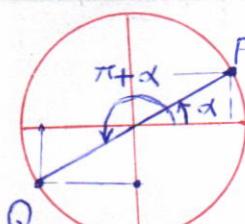
از فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت که بین هر دو زاویه مکمل α و $\pi - \alpha$ روابط زیر برقرار است.

	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$
	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$
	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$
	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$

زواياي α و $\pi + \alpha$ را در یک دایره مثلثاتی رسم کنید و نقاط انتهایی کمان های روبرو به این دو زاویه را به ترتیب $Q(x_Q, y_Q)$ و $P(x_P, y_P)$ بنامید. از دستگاه مختصات واضح است که نقطه Q قرینه نقطه P نسبت به مبدأ مختصات است و این را $Q(x_Q, -y_P)$ نویسید. اکنون با استدلالی مشابه به فعالیت بالا نشان دهید که روابط روبرو برقرار است.

مثال: مقدار نسبت های مثلثاتی برخی زوايا در زیر محاسبه شده است.



$$\sin(-\frac{\sqrt{\pi}}{6}) = -\sin(\frac{\sqrt{\pi}}{6}) = -\sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

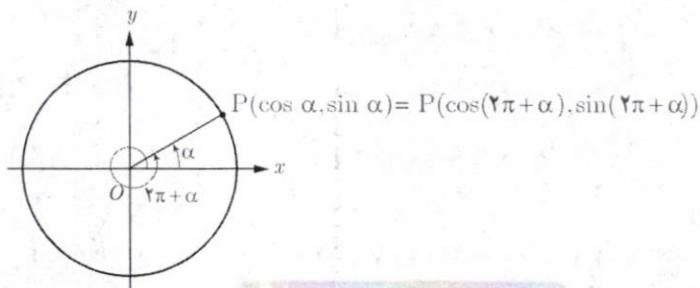
$$\tan(225^\circ) = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cos(120^\circ) = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$Q(-\cos(\pi - \alpha), -\sin(\pi - \alpha))$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان

زاویه‌های مانند α و $2\pi + \alpha$ در شکل زیر که انتهای کمان‌های آنها برهم منطبق می‌شود را زوایای هم انتها گویند. از آنجا که نقطه P انتهای هر دو کمان می‌باشد لذا نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه باهم برابرند.



$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

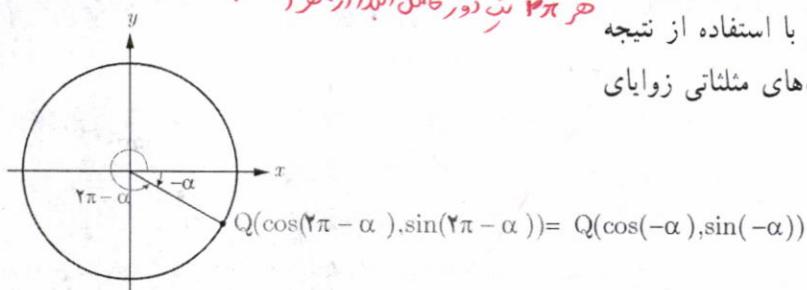
$$\tan(2\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$
 $\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$
 $\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$
 $\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$

این حالت برای بیش از یک دوران کامل، یعنی زوایای به صورت $2k\pi + \alpha$ ، نیز برقرار است. ($k \in \mathbb{Z}$).

از آنجا که زوایای $-\alpha$ و $2k\pi - \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) نیز هم انتها هستند (چرا؟)، با استدلالی مشابه بالا و با استفاده از نتیجه فعالیت صفحه قبل نشان دهید که نسبت‌های مثلثاتی زوایای $2k\pi - \alpha$ به صورت زیر برقرارند.



$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin \alpha$
 $\cos(2k\pi - \alpha) = \cos \alpha$
 $\tan(2k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
 $\cot(2k\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

مثال: مقدار نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا در زیر محاسبه شده است.

(الف) $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \tan(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

(ب) $\sin(40^\circ 5') = \sin(36^\circ + 45') = \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

کار در کلاس

۱) مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

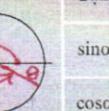
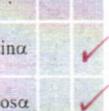
(الف) $\sin(21^\circ) = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

(ب) $\tan(-\frac{7\pi}{4}) = \tan(-2\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

(پ) $\cot(125^\circ) = \cot(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$

(ت) $\sin(\frac{3\pi}{4}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۲) جدول زیر را همانند نمونه کامل کنید. (${}^{\circ} < \theta < \frac{\pi}{4}$)

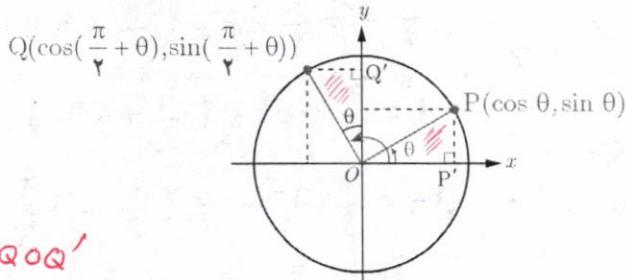
نسبت	زاویه	$\alpha = \pi - \theta$		$\alpha = \pi + \theta$		$\alpha = 2k\pi - \theta$		$\alpha = 2k\pi + \theta$	
		ربع دوم	سوم	چهارم	اول	سنت	-	سنت	+
انتهای کمان									
ترسیم زاویه α و تشخص علامت نسبت‌ها									
		نسبت + -	نسبت + -	نسبت + -	نسبت + -	نسبت + -	نسبت + -	نسبت + -	نسبت + -
		$\sin\alpha$ ✓ /	$\sin\alpha$ ✓ /	$\sin\alpha$ ✓ /	$\sin\alpha$ ✓ /	$\sin\alpha$ ✓ /	$\sin\alpha$ ✓ /	$\sin\alpha$ ✓ /	$\sin\alpha$ ✓ /
		$\cos\alpha$ ✓ /	$\cos\alpha$ ✓ /	$\cos\alpha$ ✓ /	$\cos\alpha$ ✓ /	$\cos\alpha$ ✓ /	$\cos\alpha$ ✓ /	$\cos\alpha$ ✓ /	$\cos\alpha$ ✓ /
		$\tan\alpha$ ✓ /	$\tan\alpha$ ✓ /	$\tan\alpha$ ✓ /	$\tan\alpha$ ✓ /	$\tan\alpha$ ✓ /	$\tan\alpha$ ✓ /	$\tan\alpha$ ✓ /	$\tan\alpha$ ✓ /
		$\sin\alpha$	$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$	$\sin(2k\pi - \theta) = -\sin\theta$	$\sin(2k\pi + \theta) = \sin\theta$			
		$\cos\alpha$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$	$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$	$\cos(2k\pi - \theta) = \cos\theta$	$\cos(2k\pi + \theta) = \cos\theta$			
		$\tan\alpha$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$	$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$	$\tan(2k\pi - \theta) = -\tan\theta$	$\tan(2k\pi + \theta) = \tan\theta$			
		$\cot\alpha$	$\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$	$\cot(\pi + \theta) = \cot\theta$	$\cot(2k\pi - \theta) = -\cot\theta$	$\cot(2k\pi + \theta) = \cot\theta$			

۳) برای زوایای قرینه ($\alpha = -\theta$) از کدام ستون جدول بالا می‌توان کمک گرفت؟ چرا؟

$$\alpha = 2k\pi - \theta \xrightarrow{k=0} \alpha = -\theta$$



در دایره مثلثاتی رو به رو زاویه های θ و $\frac{\pi}{2} + \theta$ رسم شده اند.



$$\left\{ \begin{array}{l} OP = OQ \\ \angle pop' = \angle QQQ' \end{array} \right.$$

الف) با توجه به شکل، نشان دهید دو مثلث OQQ' و OPP' هم نهشت هستند. و درست را بحث کنید.

ب) از تساوی اضلاع نظیر در دو مثلث فوق روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = -y_p \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$y_Q = x_p \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

پ) طرف دوم تساوی های زیر را با استفاده از روابط قسمت ب کامل کنید.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

به طور کلی برای دو زاویه θ و $\frac{\pi}{2} + \theta$ روابط زیر برقرار است.

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$
$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta$

تمرین

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

(الف) $\sin(30^\circ) =$

(ب) $\cot(75^\circ) =$

(پ) $\cos(-\frac{\pi}{6}) =$

(ت) $\cos(-\frac{23\pi}{4}) =$

(ث) $\sin(-\frac{5\pi}{4}) =$

(ج) $\tan(-84^\circ) =$

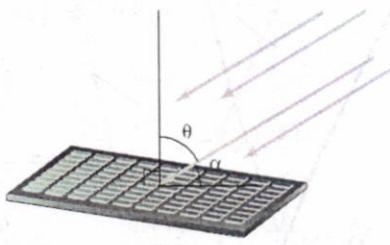
(ج) $\tan(-15^\circ) =$

(ح) $\cos(-\frac{9\pi}{4}) =$

(خ) $\tan(\frac{10\pi}{3}) =$

۲ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر). اگر شدت نور را با I نشان دهیم،

رابطه $I = k \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را به دست می‌دهد.



(الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.

(ب) شدت نور را برای زاویه‌های $\theta = 0^\circ$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ بر حسب k به دست آورید.

(پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی: از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).

۳ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید (زوايا بر حسب رادیان است).

(الف) $\cos \theta + \cos(\pi - \theta) = 0$

(ب) $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) + \cos \theta = 1$

(ج) $\cos(V) = \cos(-V)$

(د) $\tan(\pi - \theta) = \tan \pi - \tan \theta$

حل کار در کلاس صفحه ۹ (حسابان ۱)

: ۱

الف) $\sin(30^\circ) = \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب) $\cot(75^\circ) = \cot(2\pi + \frac{\pi}{6}) = \cot(4\pi + \frac{\pi}{6}) = \cot(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$

پ) $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ت) $\cos(-\frac{23\pi}{4}) = \cos(\frac{23\pi}{4}) = \cos(6\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ث) $\sin(\frac{5\pi}{4}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ج) $\tan(-84^\circ) = -\tan(84^\circ) = -\tan(5\pi - \frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$

ز) $\tan(-15^\circ) = -\tan(15^\circ) = -\tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ح) $\cos(\frac{9\pi}{4}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

خ) $\tan(\frac{10\pi}{3}) = \cos(3\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

: ۲

الف) $I = k \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = k \cos \alpha = k \sin \theta$

ب) $I = k \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = k \sin \theta \rightarrow \begin{cases} \theta = \cdot \rightarrow I = \cdot \\ \theta = \frac{\pi}{6} \rightarrow I = \frac{k}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow I = \frac{k\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

پ) $I = k \xrightarrow{I=k \sin \theta} \sin \theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

د) درست

ج) درست

ب) نادرست

۳ : الف) درست

۱۰۴, ۱



درس

توابع مثلثاتی

در درس‌های قبل مقدار نسبت‌های مثلثاتی را برای برخی زوایا به دست آوردیم. اکنون این سؤال به ذهن می‌رسد که آیا می‌توان این نسبت‌ها را برای یک عدد حقیقی تعریف کرد؟ مثلاً عبارات \sin^3 یا \cos^3 چه معنی‌ومفهومی دارند؟ فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا پاسخ این سؤالات را بیابید.

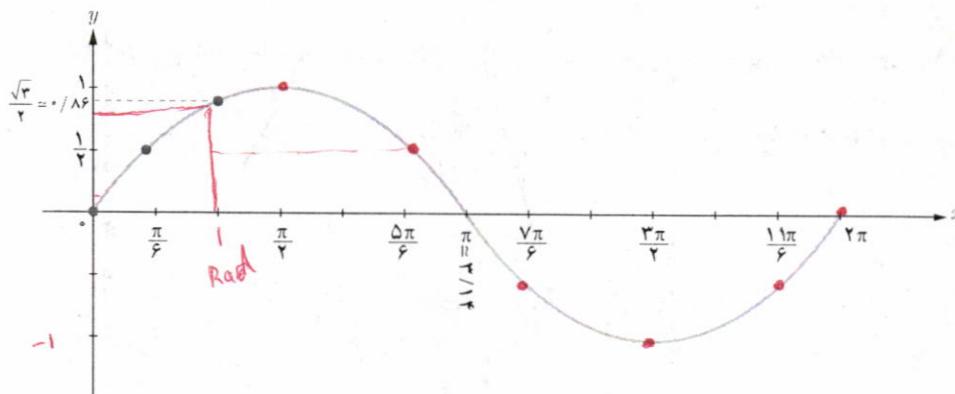
فعالیت

- ۱ در جدول زیر نسبت سینوس به ازای برخی مقادیر در بازه $[0^\circ, 2\pi]$ مشخص شده است. این جدول را تکمیل کنید.

x (رادیان)	0°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin x$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.86$	۱	$\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	-۱	$-\frac{1}{2}$	۰

- ۲ جدول بالا به صورت زوج مرتب در زیر داده شده است. با توجه به جدول فوق مجموعه زوج مرتب‌ها را تکمیل و سپس نقاط به دست آمده را در دستگاه مختصات زیر پیدا کنید. آیا نقاط متناظر با زوج‌های مرتب روی منحنی داده شده قرار می‌گیرند؟ آیا این منحنی تابع است؟ (با رسم خطوط موازی محور y ها بررسی کنید).

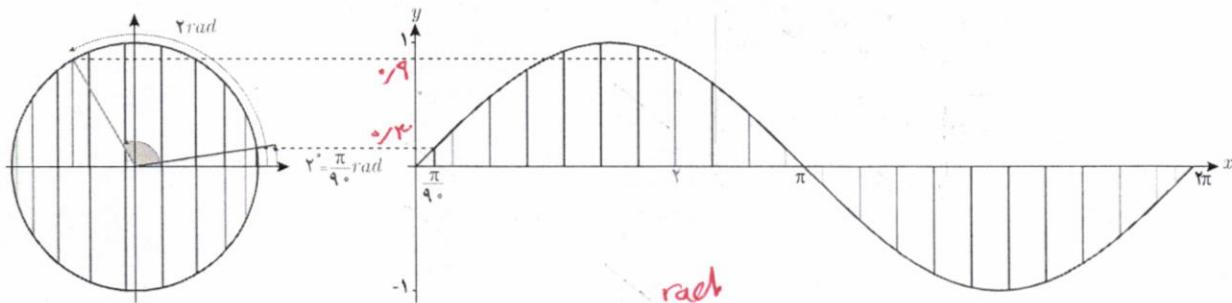
$$f = \left\{ \left(0^\circ, 0 \right), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{\pi}{2}, 1 \right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2} \right), \left(\pi, 0 \right), \left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2} \right), \left(\frac{3\pi}{2}, -1 \right), \left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2} \right), \left(2\pi, 0 \right) \right\}$$



- ۳ نمودار داده شده در سؤال قبل منحنی تابع $y = \sin x$ در بازه $[0^\circ, 2\pi]$ می‌باشد. با توجه به نمودار مقدار $\sin 1$ کجای محور y ها قرار می‌گیرد؟ **بازی محور طوفانی روشیست بنی صفو و گامی و تکریتی**

$$\sin 1 \approx 0.84$$

در تابع $y = \sin x$ ، همیشه x را بر حسب رادیان در نظر می‌گیرند مگر آنکه صریحاً گفته شود x بر حسب درجه است یا از نماد x° استفاده شود. با توجه به ارتباط دایره مثلثاتی و نمودار تابع سینوس که در زیر داده شده، تفاوت $\sin 2$ و $\sin 2^\circ$ را بیان کنید.



$$\sin \frac{2}{\text{rad}} = 0.91$$

$$\sin 2^\circ = \sin \frac{\pi}{90} = 0.03$$

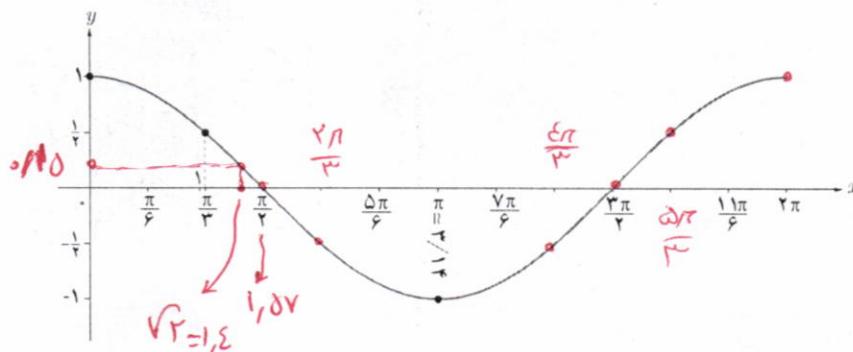
فعالیت

۱ همانند فعالیت قبل، تابع $y = \cos x$ در زیر رسم شده است. مجموعه زوج‌های مرتب داده شده از این تابع را تکمیل کنید و نقاط بدست آمده را مانند نمونه بر روی نمودار نمایش دهید.

$$f = \left\{ (0, 1), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right), (\pi, -1), \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right), (2\pi, 1) \right\}$$

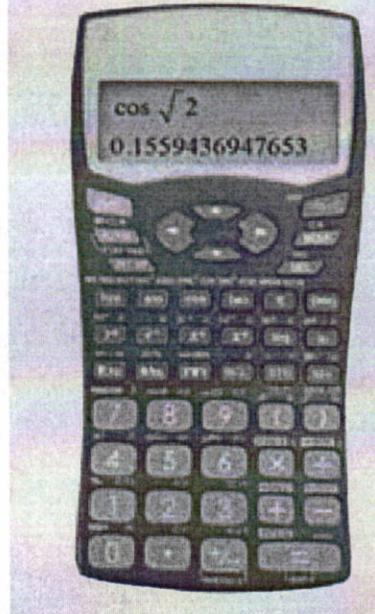
خواندنی

در همه ماشین حساب‌های پیشرفته، برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی می‌توان از دو حالت استفاده کرد که یک حالت بر حسب درجه (DEG) و حالت دیگری بر حسب رادیان (RAD) است. هنگام استفاده از ماشین حساب باید ابتدا آن را در حالت مورد نظر قرار داد. در ماشین حساب زیر آن را در حالت رادیان قرار داده و سپس مقدار $\cos \sqrt{2}$ را حساب کرده‌اند.



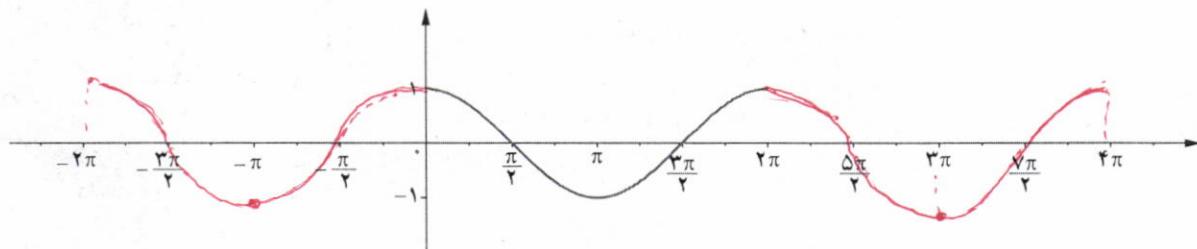
۲ در نمودار بالا ابتدا نقطه نظیر $\sqrt{2}$ رادیان را بر روی محور x باید و سپس مکان $\cos \sqrt{2}$ را بر روی محور y با به طور تقریبی پیدا کنید. درستی پاسخ خود را با ماشین حساب بررسی کنید.

$$\cos \frac{\sqrt{2}}{\text{rad}} = \cos 1.41 = 0.1559436947653$$



از درس‌های قبل می‌دانیم که $\cos(-x) = \cos x$ و نیز $\cos(x+2k\pi) = \cos x$. با استفاده از این روابط مقدار تابع $y = \cos x$ را در دیگر نقاط داده شده بر روی محور x ها به دست آورید و نمودار تابع را از دو طرف ادامه دهید. آیا نمودار این تابع در بازه‌های $[4\pi, 2\pi]$ و $[2\pi, 0]$ و $[0, -2\pi]$ با هم متفاوت هستند؟

خیر، مقادیر براید یکنواخت.



با توجه به نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[4\pi, -2\pi]$ به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) آیا می‌توان بر روی محور x ها عددی مانند x_0 یافت که برای آن $\cos x_0 = \frac{1}{3}$ باشد؟ **بله، وجود دارد.**

ب) آیا می‌توان بر روی محور x ها عددی مانند x_0 یافت که برای آن $\cos x_0 = 2$ باشد؟ **خیر**

پ) بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = \cos x$ در این بازه چقدر است؟

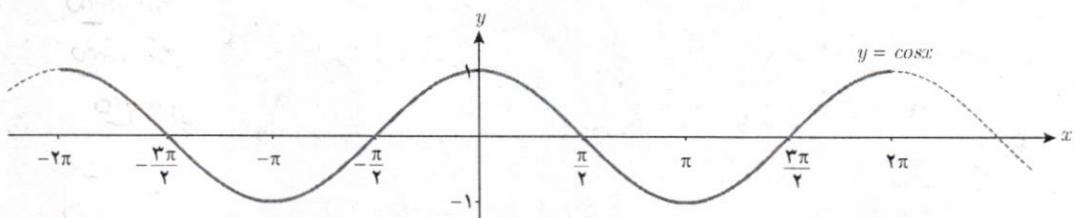
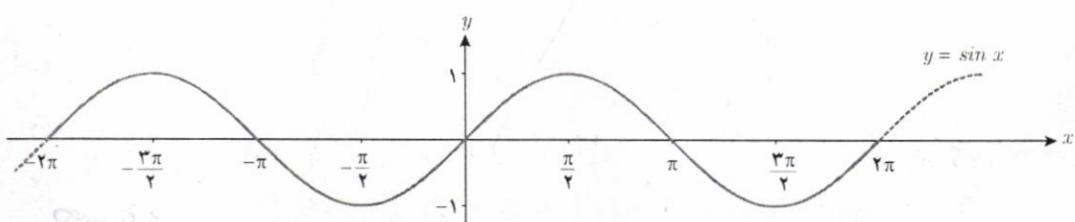
$$y_{\max} = 1 \quad y_{\min} = -1$$

تابع‌های $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را مثلثاتی گویند. دامنه این توابع مجموعه اعداد حقیقی و برد آنها بازه $[-1, 1]$ است.

گاهی به نمودار تابع $y = \sin x$ موج سینوسی و به نمودار تابع $y = \cos x$ موج کسینوسی نیز می‌گویند.

همان‌طور که در فعالیت ۲ بررسی شد تابع $y = \cos x$ در بازه‌های به طول 2π تکرار می‌شود. این وضعیت برای تابع $y = \sin x$ نیز برقرار است (چرا؟). با توجه به این ویژگی در توابع مثلثاتی بالا، می‌توان نمودار آنها را به صورت زیر رسم کرد.

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

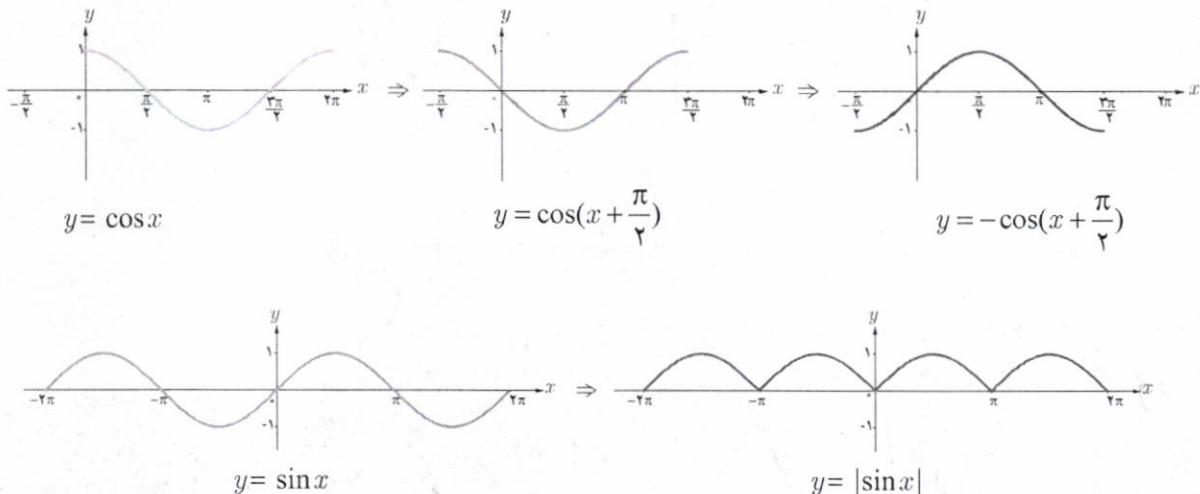


کاردر کلاس

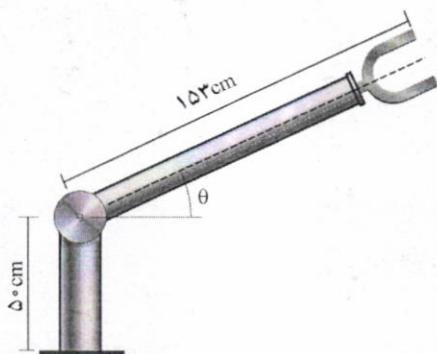
درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

- الف) $\sin x$ یعنی سینوس زاویه‌ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن x درجه باشد. **نادرست**
- ب) $\sqrt{5}$ یک عدد حقیقی است. **درست**.
- ت) اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ آنگاه $\cos x < -1$ است. **نادرست**.
- ج) $x = \pi$ صفر تابع $f(x) = \cos x$ است. **نادرست**.

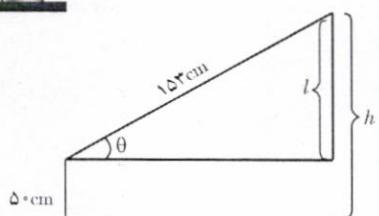
مثال: با توجه به نمودار توابع مثلثاتی $y = \cos x$ و $y = \sin x$ ، نمودار توابع $y = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$ و $y = |\sin x|$ در زیر رسم شده است.



مثال: روبات‌ها در زمینه‌های مختلف کاربرد دارند. در طراحی انواع روبات‌ها از توابع مثلثاتی استفاده می‌شود. در شکل روبرو یک روبات صنعتی را که در صنایع خودروسازی کاربرد دارد مشاهده می‌کنید. با توجه به مقادیر داده شده، ارتفاع نوک گیره روبات را از سطح زمین به کمک یک تابع مثلثاتی مدل‌سازی کنید. ($0^\circ \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)



حل: کافی است وضعیت روبات را به صورت زیر ترسیم کنیم. اکنون کل ارتفاع نوک گیره از سطح زمین (h) به صورت زیر به دست می‌آید:

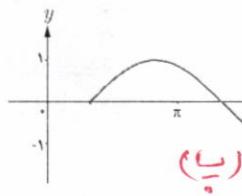


$$\sin \theta = \frac{l}{153} \rightarrow l = 153 \sin \theta$$

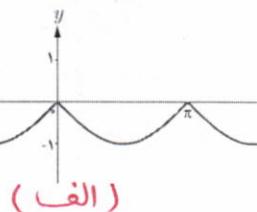
$$\Rightarrow h = 5 + l = 5 + 153 \sin \theta$$

sin

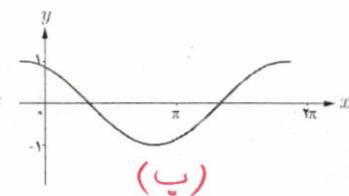
$$y = \sin(x + \frac{\pi}{3}) \quad (ب)$$



$$y = \cos(x + \frac{\pi}{6}) \quad (ب)$$



$$y = -|\sin x| \quad (الف)$$



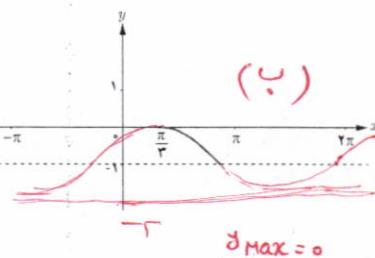
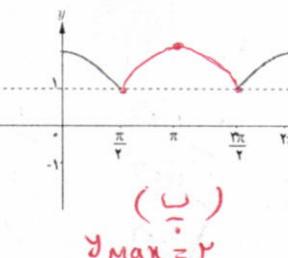
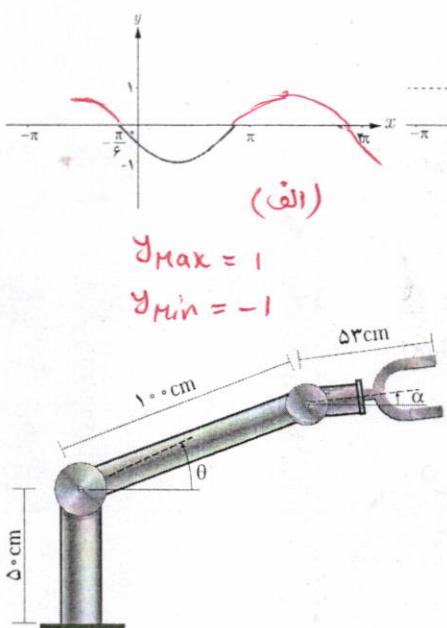
۱ توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

$$y = 1 + |\cos x| \quad (ب)$$

$$y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1 \quad (ب)$$

$$y = -\sin(x + \frac{\pi}{6}) \quad (الف)$$



۲ با توجه به نمودارهای بالا در سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در آن در چه نقاطی رخ می‌دهد؟

۳ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، کدام یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن

سؤال در بازه $(\pi, 2\pi)$ یک به یک است؟

۴ در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف پیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت رو به رو در نظر می‌گیرند.

الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید. $(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0^\circ \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع $22/5 \text{ cm}$ مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -3^\circ$ قرار داده است.

تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟

$$\sin \theta = \frac{h_2}{100} \rightarrow h_2 = 100 \sin \theta \quad (الف)$$

$$\sin \alpha = \frac{h_3}{83} \rightarrow h_3 = 83 \sin \alpha$$

$$h = h_1 + h_2 + h_3 = 80 + 100 \sin \theta + 83 \sin \alpha$$

$$22/5 = 4.4 = 80 + 100 \sin \theta + 83 (-\frac{1}{2})$$

$$4.4 = 80 + 100 \sin \theta - 41.5 \rightarrow \sin \theta = \frac{4.4 - 80 + 41.5}{100} = \frac{1}{4} \rightarrow \theta = 15^\circ$$

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

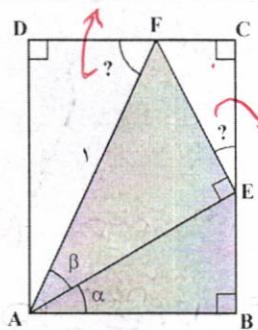
۲۰

دروس

در سال گذشته با تعدادی از اتحادهای مثلثاتی مانند $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ و $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ آشنا شدید. این اتحادها تنها شامل یک زاویه هستند. اکنون در این درس، روابطی را که در آنها دو زاویه مختلف به کار رفته است فرا می‌گیرید.



فَعَالَتْ



- ۱ در شکل رو به رو، چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است. اندازه پاره خط AF برابر ۱ و زوایای α و β داده شده است.

الف) با تکمیل روابط زیر اندازه \hat{AFD} و \hat{FEC} را بر حسب α و β دست آورید.

$$\begin{aligned} B & \quad \text{زاویه } E \text{ نیم صفحه است.} \\ ABE & \quad : \text{مجموع زوایای داخلی} \quad \alpha + 9^\circ + \hat{AEB} = 180^\circ \end{aligned} \Rightarrow \hat{FEC} = \dots \textcolor{red}{\cancel{\alpha}}$$

اصلان AB و DC باهم موازی و پاره خط AF به صورت مورب آن را قطع کرده است. $\Rightarrow \hat{AFD} = \alpha + \beta$

ب) اندازه اضلاع AD و DF از $\triangle ADF$ را با توجه به اینکه $AF = 1$ ، بر حسب نسبت های سینوس و کسینوس \hat{DFA} بنویسید.

ب) اضلاع AE و EF از مثلث قائم الزاویه AEF را، که وتر آن پرایر ۱ است، بر حسب نسبت‌های سینوس

$$\sin \beta = EF$$

$$SS\beta = AE$$

و کسینوس زاویه β بنویسید.

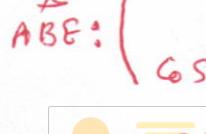
ن) اندازه پاره خط های AB , FC , EC , BE را بر حسب نسبت های سینوس و کسینوس زاویه α به دست

$$\sin \alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{GS\beta} \rightarrow BE = \sin \alpha GS\beta$$

$$CS\alpha = \frac{AB}{AF} = \frac{AB}{CS\beta} \rightarrow AB = CS\alpha CS\beta$$

$$\sin \alpha = \frac{FC}{EF} = \frac{FC}{\sin \beta} \rightarrow FC = \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\frac{65\text{da}}{EF} = \frac{EC}{\sin\beta} \rightarrow EC = 65 \text{da} \sin\beta$$



4

www.dourkhiz.com

$$\underline{\text{durch } 65 \text{ auf }} = \underline{\underline{EF}} - \sin \beta$$

ث) از تساوی اضلاع رو به رو در مستطیل صفحه قبل روابط زیر به دست می آید. آنها را با توجه به قسمت های الف تا δ کامل کنید.

$$AD = BE + EC \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$DF = AB - FC \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Y توضیح دهد چرا اگر اندازه پاره خط AF برابر یک نباشد کما کان روابط فوق برقرار است. باز نسبت δ برقرار هستند.

در فعالیت فوق زوایایی به کار رفته همگی تند بودند. می توان با استفاده از خواص توابع مثلثاتی نشان داد که این روابط برای همه زوایا برقرار است. بنابراین همواره داریم :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

همچنین با تبدیل β به $-\beta$ و استفاده از نسبت های مثلثاتی زوایایی قرینه می توان به دست آورد :

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

و نیز

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

پس همواره داریم :

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

مثال : مقدار $\sin 75^\circ$ در زیر محاسبه شده است.

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

مثال : درستی رابطه $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = -\cot \theta$ را نشان دهد.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)} = \frac{\overbrace{\sin \frac{\pi}{4} \cos \theta + \cos \frac{\pi}{4} \sin \theta}^1}{\overbrace{\cos \frac{\pi}{4} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta}^1} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\cot \theta$$

$$\sin 10\alpha = \sin(\pi_0 + \varepsilon\alpha) = \sin\pi_0 \cos\varepsilon\alpha + \cos\pi_0 \sin\varepsilon\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 10\alpha = \cos(\pi_0 + \varepsilon\alpha) = \cos\pi_0 \cos\varepsilon\alpha - \sin\pi_0 \sin\varepsilon\alpha = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\tan 10\alpha = \frac{\sin 10\alpha}{\cos 10\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}$$

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

$$1) \cos 15^\circ = \cos(\pi_0 - \varepsilon\alpha) = \cos\pi_0 \cos\varepsilon\alpha + \sin\pi_0 \sin\varepsilon\alpha$$

$$2) \tan 15^\circ = \dots$$

$$3) \sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4}$$

۲ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos\beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \sin\beta = \frac{5}{13}$$

الف) مقدار دقیق $\cos(\alpha - \beta)$ و $\sin(\alpha + \beta)$ چیست؟

ب) انتهای زاویه $\alpha + \beta$ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

۳ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که :

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) \\ &= \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha \cos\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) \\ &= \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha \\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \quad | \text{ (نمودار)} \\ &= \frac{3}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{4}{5} \times \left(\frac{5}{13}\right) = \frac{-36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{-16}{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \\ &= \frac{4}{5} \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{3}{5} \left(\frac{5}{13}\right) \\ &= \frac{-48}{65} + \frac{15}{65} = \frac{-33}{65} \end{aligned}$$

حد و پیوستگی

- ۱ مفهوم حد و فرایندهای حدی
- ۲ حد های یک طرفه (حد چپ و حد راست)
- ۳ قضایای حد
- ۴ محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)
- ۵ پیوستگی



فصل

جاده نهیندان - شهداد



دانشگاه حسرو

مفهوم حد و فرایندهای حدی

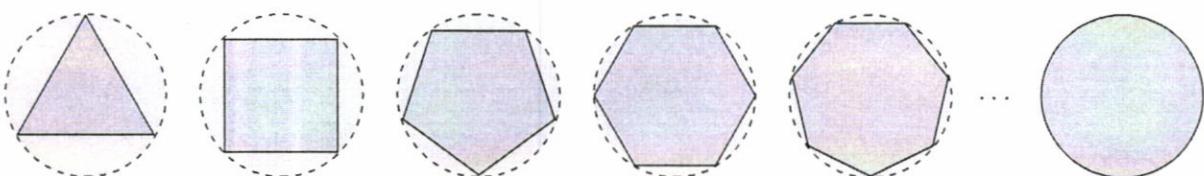
درس

بیشتر پدیده‌های طبیعی و مسائل محیط پیرامون را می‌توان مدل‌سازی نمود و مدل ریاضی بسیاری از این پدیده‌ها، به صورت یک تابع در می‌آید.

گاهی اوقات لازم است، برای تحلیل یک پدیده، رفتار تابع متناظر آن را در نزدیکی یک نقطه مورد ارزیابی قرار دهیم. مفهوم «حد» ابزار مناسبی است که می‌تواند در تحلیل رفتار تابع به ما کمک شایانی بنماید.

فعالیت

در شکل زیر، شعاع دایره‌ها، برابر ۱ واحد است.



۱ با افزایش اضلاع چندضلعی‌های محاط در دایره، مساحت چندضلعی به مساحت چه‌شکلی نزدیک می‌شود؟ **دایره**

$$\pi(1)^2 = \pi$$

۲ مساحت دایره‌ای به شعاع ۱ چقدر است؟

۳ اگر مقدار تقریبی عدد π تا ۵ رقم اعشار را برابر $\pi = 3/14159$ در نظر بگیریم و مساحت n -ضلعی منتظم واقع در درون دایره را با A_n نشان دهیم، جدول زیر مقادیر A_n را به ازای برخی $n \in \mathbb{N}$ نشان می‌دهد:

n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
A_n	$1/29903$	۲	$2/377642$	$2/59807$	$2/72688$	$2/82842$	$2/89254$	$2/93892$	$2/14107$	$2/14126$	$2/14146$	$2/14150$	$2/14157$

۴ با توجه به این جدول، هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های داخل دایره زیاد می‌شود، جملات دنباله A_n (مساحت n -ضلعی درون دایره) به عدد π که برابر مساحت دایره است نزدیک می‌شوند.

مساحت چندضلعی‌های منتظم درون دایره (محاطی) را به هر اندازه که بخواهیم، می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط

آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

خواندنی

عدد π (بی) سرگذشتی حداقل ۳۷۰ ساله دارد. بی کی از مشهورترین عدها در دنیای ریاضی است و بانماد، π ، یکی از حروف الفبای یونانی نشان داده می‌شود. ساده‌ترین و بهترین راه معرفی π این است:

$$\pi = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}}$$

π پک عدد گنگ است و در طول این ۳۷ قرن، دانشمندان زیادی سعی کرده‌اند مقدار دقیق آن را حساب کنند. قدیمی‌ترین محاسبه بدست آمده، به ۱۷۰۰ سال قبل از میلاد مربوط می‌شود. این محاسبات روی پایپرسی نوشته شده است که در حال حاضر، در موزه‌ای در «مسکو» نگهداری می‌شود. حدود ۲۴۰ سال قبل از میلاد، ارشمیدس اولین روش کلاسیک را برای تعیین مقدار تقریبی عدد π ارائه داد.

ارشمیدس با استفاده از چند ضلعی‌های محاطی و محاطی درون و پیرون پک دایره به شعاع واحد به محاسبه تقریبی عدد π پرداخت. او یا ۶ ضلعی منتظم شروع و مرتبآً عدد اضلاع را دو برابر کرد و با استفاده از ۹۶ ضلعی‌های منتظم محاطی و محاطی مقدار π را با تقریب سیار خوبی ($3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{7}$) بدست آورد. غیاث‌الدین جمشید کاشانی معروف به «الکاشی» در کتاب رساله محیطیه π را نا ۱۷ رقم پس از معیز حساب کرده است.



اگر می‌خواهید عدد π را تا ده رقم اعشار به خاطر بسپارید تعداد حروف کلمات، در بیت دوم این شعر به شما کمک خواهد کرد:

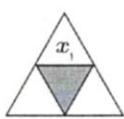
گر کسی از تو برسد ره داشتن	π
خود و داش و آگاهی دانشمندان	۲ ۶ ۵ ۱ ۴ ۱ ۳
پاسخی ده که هنمند نور آموزد	۵ ۳ ۶ ۹ ۵ ۱ ۴

$$\pi = 3\frac{1415926535 \dots}{21415926535}$$

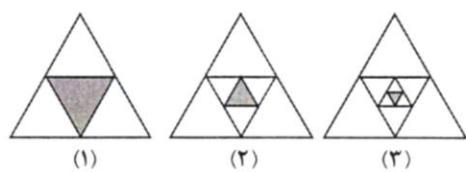
فعالیت

یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲ را در نظر بگیرید، اندازه محیط این مثلث برابر ۶ می‌باشد.

۱ مطابق شکل، وسط اضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث جدیدی ایجاد شود، اندازه ضلع مثلث جدید را x و اندازه محیط آن را P می‌نامیم.



۲ اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهیم و در مرحله n ام طول ضلع مثلث به وجود آمده را با x_n و محیط آن را با P_n نمایش دهیم، با توجه به شکل‌های زیر، جدول داده شده را تکمیل کنید:



x_n	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$...	$\frac{1}{2^n}$
P_n	۳	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$...	$\frac{3}{2^n}$

۳ اندازه اضلاع مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ **صفر**

۴ اندازه محیط این مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ **صفر**

در فعالیت قبل، اگر طول ضلع اولیه را x در نظر بگیریم و f تابعی باشد که محیط مثلث را بر حسب ضلع آن بیان می‌کند، آن‌گاه داریم $f(x) = 3x$.

همان‌طور که مشاهده کردیم، وقتی طول ضلع مثلث‌ها (مقدار متغیر x) به عدد صفر نزدیک می‌شود، محیط مثلث‌ها، یعنی مقادیر $f(x)$ ، نیز به عدد صفر نزدیک می‌شوند.



مثال: رفتار تابع f , با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ را در اطراف نقطه $a = 2$ بررسی نماید.

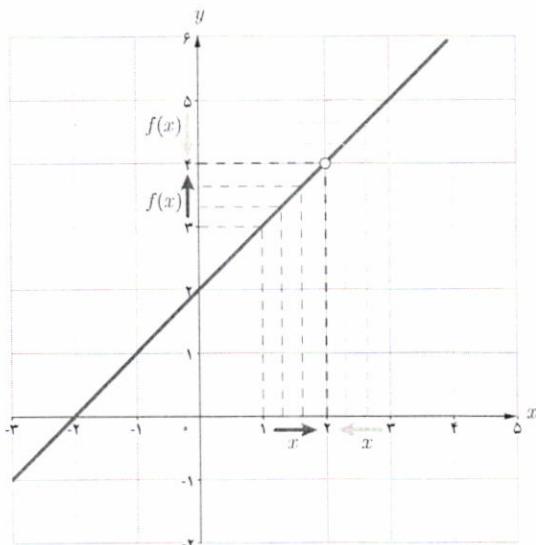
حل: تابع f , به ازای هر عدد حقیقی $x \neq 2$ تعريف شده است. به ازای هر $x \neq 2$, ضابطه تابع را می‌توان ساده کرد و به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

در جدول زیر، مقادیر تابع f را به ازای برخی مقادیر کوچک‌تر از ۲، که به تدریج از سمت چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شوند، و نیز برخی مقادیر بزرگ‌تر از ۲، که به تدریج از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شوند، محاسبه کرده‌ایم:

	از چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود	x از راست به عدد ۲ نزدیک می‌شود
x	۱ ۱/۵ ۱/۹ ۱/۹۹ ۱/۹۹۹ \rightarrow ۲ \leftarrow ۲/۰۰۰۱ ۲/۰۰۱ ۲/۰۱ ۲/۵ ۳	
$f(x)$	۳ ۳/۵ ۳/۹ ۳/۹۹ ۳/۹۹۹ \rightarrow ? \leftarrow ۴/۰۰۰۱ ۴/۰۰۱ ۴/۰۱ ۴/۵ ۵	$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود

با توجه به جدول فوق، مشاهده می‌کنیم که، با نزدیک شدن x به عدد ۲ (از راست و از چپ) مقادیر $f(x)$, به عدد ۴ نزدیک می‌شوند.



درستی این مطلب را از روی نمودار تابع نیز می‌توان دید: نمودار تابع f , خط راست $y = x + 2$ است که یک نقطه از آن، یعنی نقطه $(2, 4)$ حذف شده است.

با وجود اینکه مقدار تابع در نقطه ۲ تعريف نشده است ولی با توجه به نمودار تابع، وقتی x را با مقادیر بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر از ۲ (اما مخالف ۲) به عدد ۲ نزدیک می‌کنیم، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. به عبارت دیگر وقتی $x \rightarrow 2$ (یعنی x به سمت ۲ میل می‌کند)، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. در این صورت می‌گوییم، حد تابع f وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود برابر ۴ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

در مثال بالا، رفتار تابعی مانند f را در اطراف نقطه‌ای مانند a بررسی و مشاهده کردیم که وقتی متغیر x به a نزدیک می‌شود مقادیر تابع f نیز به یک عدد مشخص، نزدیک می‌شوند. این مفهوم را «حدگیری» از تابع f در نقطه a می‌نامیم.

کارد در کلاس

تابع f ، g و h با ضابطه‌های $f(x) = x+3$ و $g(x) = \frac{x^3 - 9}{x - 3}$ را در نظر بگیرید:

$$f(3) = \dots \quad g(3) = \dots \quad h(3) = \dots$$

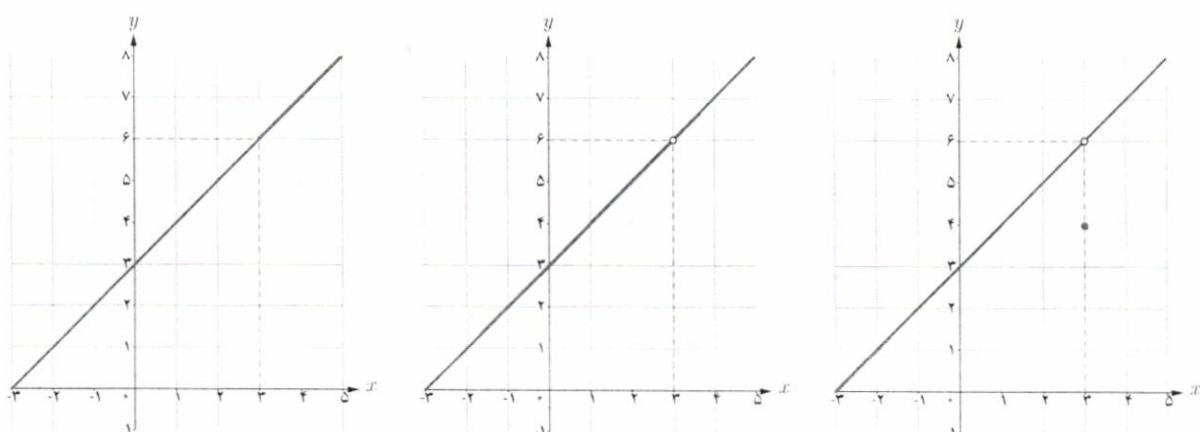
تعریف نشوند

۱ مقادیر زیر را در صورتی که تعریف شده باشند به دست آورید:

۲ با تکمیل جدول زیر، حدس بزنید که وقتی مقادیر x را به عدد ۳ تزدیک می‌کنیم، مقادیر توابع f ، g و h هر کدام به چه عددی تزدیک می‌شوند؟

x	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	\rightarrow	۳	\leftarrow	۲/۰۰۰۰۱	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱
$f(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	\rightarrow	?	\leftarrow	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱
$g(x)$	۵,۹	۵,۹۹	۵,۹۹۹	۵,۹۹۹۹	\rightarrow	?	\leftarrow	۶,۰۰۰۰۱	۶,۰۰۰۱	۶,۰۰۱	۶,۰۱	۶,۱
$h(x)$	۵,۹	۵,۹۹	۵,۹۹۹	۵,۹۹۹۹	\rightarrow	?	\leftarrow	۶,۰۰۰۰۱	۶,۰۰۰۱	۶,۰۰۱	۶,۰۱	۶,۱

۱ نمودارهای توابع f ، g و h به صورت زیر رسم شده است.
از روی نمودار، توضیح دهید که وقتی مقادیر x را به ۳ تزدیک می‌کنیم، مقادیر $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ هر کدام به چه عددی تزدیک می‌شوند.

نمودار f نمودار g نمودار h

همسایه اعداد ۳ تزدیک نشوند.

۴ حد هر سه تابع وقتی x به عدد ۳ نزدیک می‌شود برابر ۶ است به عبارت دیگر :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 6.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 6.$$

۵ با توجه به جدول صفحه قبل و نمودار و ضابطه سه تابع، تفاوت‌ها و شباهت‌های این سه تابع را بیان کنید.

تعاریف در مقادیر دیگر و شباهت در برابر بودن مقادیر آنها در $x=3$
لذا در برای بروز تفاوت مقدار تابع با حد تابع در $x=3$ از کار در کلاس قبل نتیجه می‌گیریم که :

(الف) ممکن است یک تابع در نقطه a تعریف نشده باشد، اما حد این تابع وقتی x به a نزدیک می‌شود موجود باشد. (مانند تابع g در نقطه ۳)

(ب) ممکن است یک تابع در نقطه a تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد نیز باشد، ولی مقادیر این حد با مقادیر تابع در a برابر نباشد. (مانند تابع h در نقطه ۳).

در حقیقت با اینکه سه تابع دارداده شده از نظر مقادیر در نقطه ۳ با هم متفاوت‌اند و حتی تابع g در نقطه ۳ تعریف نشده است ولی در اطراف نقطه ۳ رفتار کاملاً یکسانی دارند، یعنی حد هر سه تابع وقتی x به ۳ نزدیک می‌شود برابر با ۶ است.

با توجه به مفهوم حد، به نظر می‌رسد برای آنکه بتوان مقادیر متغیر را از دو طرف (چپ و راست) به عددی مانند a ، نزدیک نمود، کافی است تابع موردنظر در یک بازه باز شامل a تعریف شده باشد. البته در محاسبه حد تابع در نقطه a ، رفتار تابع در دو طرف نقطه a اهمیت دارد، پس لزومی ندارد خود a در دامنه تابع باشد. بنابراین لازم است به تعریف همسایگی یک نقطه که یکی از مفاهیم اساسی برای تعریف حد تابع در یک نقطه می‌باشد بپردازیم :

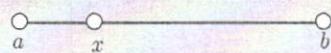
تعریف

اگر x یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x را یک همسایگی x می‌نامیم.

بنابراین اگر $x \in (a, b)$ ، آن‌گاه بازه (a, b) یک همسایگی x است.



اگر نقطه x را از این بازه حذف کنیم، مجموعه $\{x\} - (a, b)$ را همسایگی محدود x می‌نامیم.

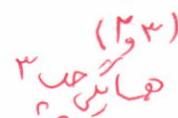
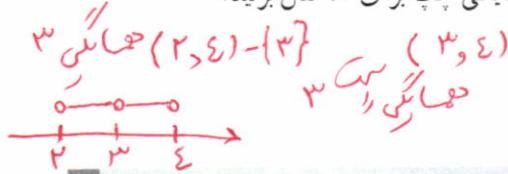


به همین ترتیب :

اگر $r > 0$ در این صورت بازه $(x_-, x_+ + r)$ را یک همسایگی راست و بازه (x_-, r, x_+) را یک همسایگی چپ می‌نامیم.

کارد در کلاس

۱) یک همسایگی، یک همسایگی محدود، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای ۳، مثال بزنید.



آیا بازه $(2, 3)$ یک همسایگی ۲ می‌باشد؟ چرا؟
طبق تعریف بازه $(2, 3)$ همسایگی راست 3 نماید.

تعریف حد یک تابع

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. می‌گوییم «حد تابع f وقتی x به a نزدیک می‌شود برابر عدد حقیقی L است»، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به شرط آنکه متغیر x (با مقادیر مخالف a از دو طرف) به قدر کافی به a نزدیک شود.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

در این صورت می‌نویسیم:

عدد L را حد تابع f در a می‌نامیم.

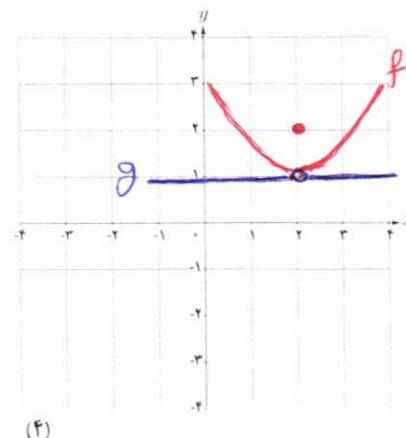
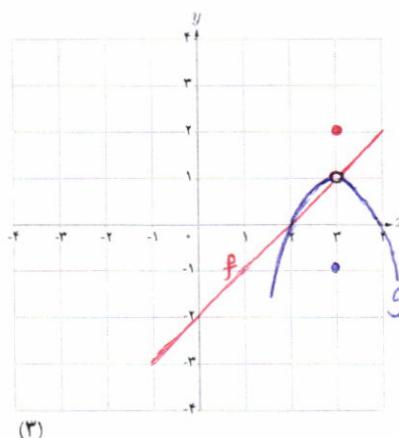
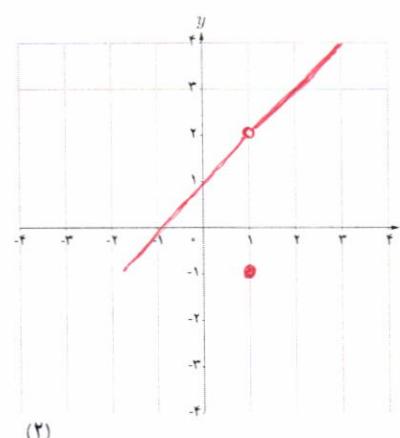
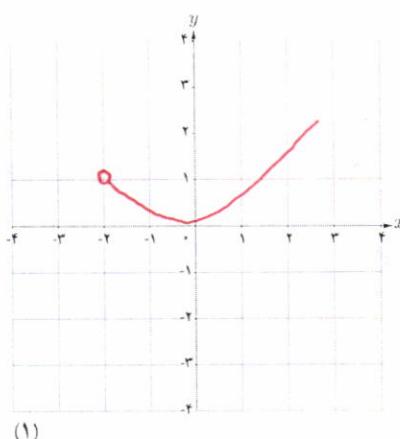
کارد در کلاس

۱) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همسایگی راست نقطه ۲- تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده باشد.

۲) نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۱ دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

۳) نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هردو در یک همسایگی نقطه ۳ تعریف شده باشند و $f(3) \neq g(3)$.

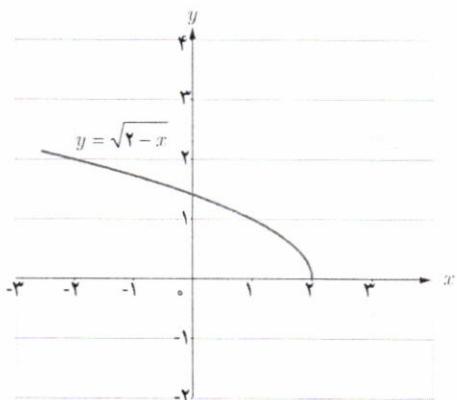
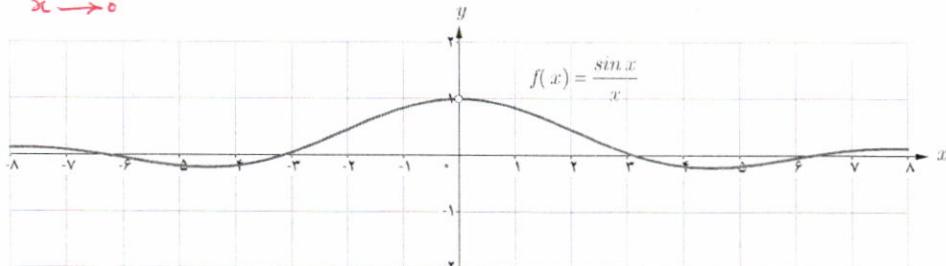
۴) نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در نقطه ۲ دارای حد یکسان باشند و f در ۲ تعریف شده باشد اما تابع g در ۲ تعریف نشده باشد.



x	$\frac{\sin x}{x}$
± 1	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.992324665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99958239
± 0.01	0.99998223
± 0.005	0.99999583
± 0.001	0.99999983

۵ تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ در نقطه صفر تعریف نشده است. در جدول رویه را برخی مقدار این تابع در اطراف صفر داده شده است. با توجه به جدول و نمودار تابع f ، مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ را به دست آورید. (محور x ها بر حسب رادیان است).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

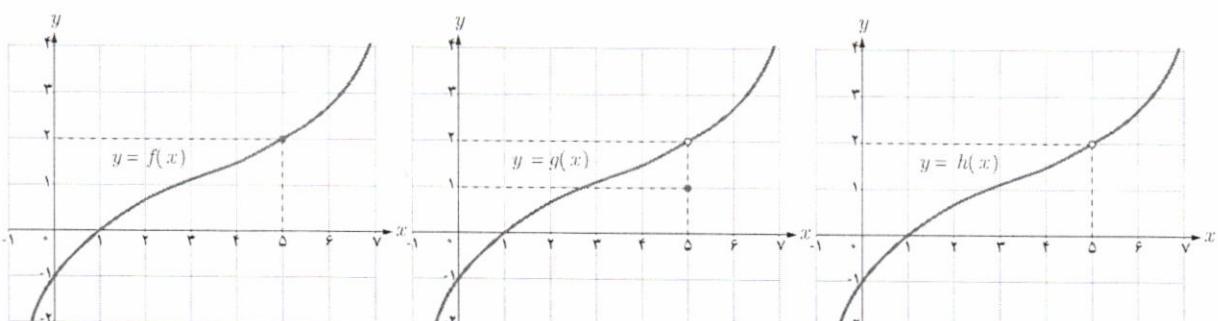


مثال: آیا تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ در نقطه $x=2$ حد دارد؟ چرا؟

حل: می‌دانیم دامنه تابع به صورت $D_f = (-\infty, 2]$ می‌باشد. چون تابع f در هیچ همسایگی محدود 2 ، تعریف نشده است (مقدار بیشتر از 2 در دامنه تابع نیست) بنابراین، تابع f در نقطه $x=2$ حد ندارد.

تمرین

۱ نمودار سه تابع f ، g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطه $x=5$ مشخص کنید.



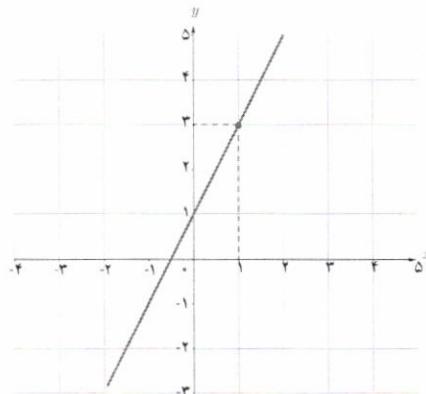
$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 1$$

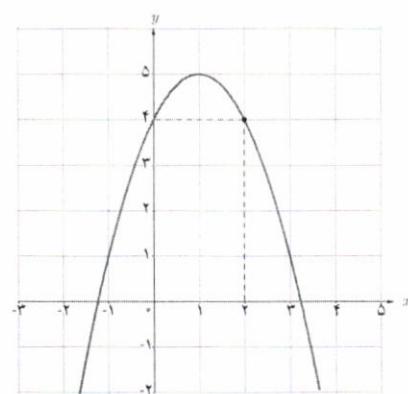
$$\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = 1$$

۱۲۱ فصل پنجم: حد و پیوستگی

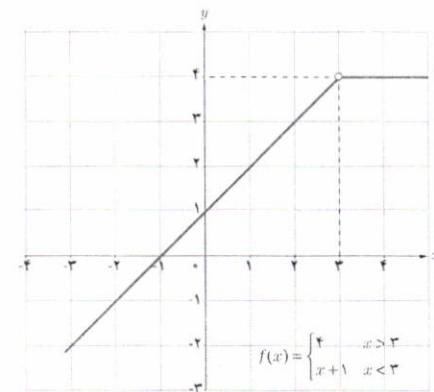
۱ با استفاده از نمودار، مقدار حد تابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



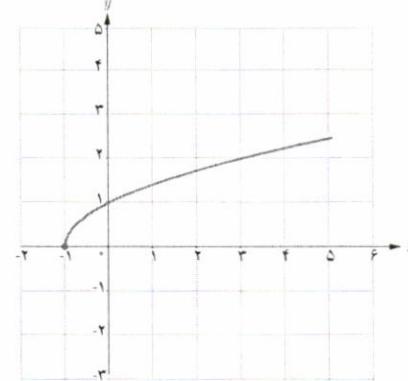
$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 2x + 4) = 3$$



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$$



$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+1} = 1$$

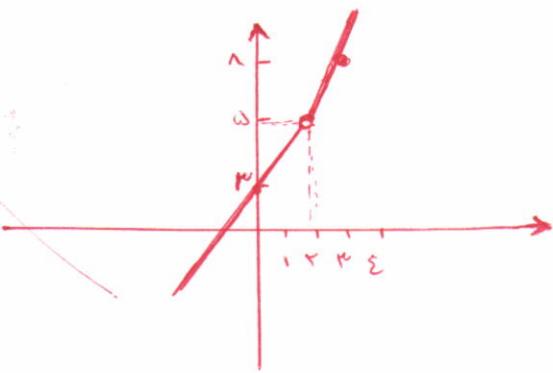
۲ با تکمیل هر یک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطه مورد نظر بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x + 4) = \dots$

x	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \dots$

x	-2	-1.5	-1.4	-1.3	-1.2	-1.1	-1.01	-0.99	-0.98	-0.97	-0.96	-0.95	-0.94	-0.93	-0.92	-0.91	-0.9	-0.89	-0.88	-0.87	-0.86
$f(x)$



۴ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x > 2 \\ x + 3 & x < 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

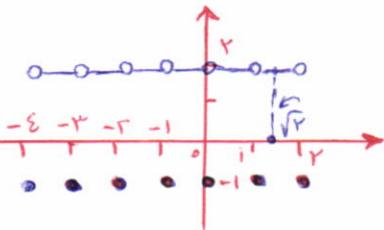
خواهش

الف) آیا تابع f در نقطه $x=2$ ، تعریف شده است؟

ب) با رسم نمودار f و یا نوشتتن جدول مقادیر f در همسایگی محدود 2 مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

$x \rightarrow 2$



۵ تابع g با ضابطه $g(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Z} \\ 2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) نمودار g را در فاصله $[4, 2]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g ، حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x) = \dots$$

۶۱) $1-x^2 \leq 0 \rightarrow x^2 \geq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$

$$D_f = [-1, 1] - \{0\}$$



۶ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ را در نظر بگیرید:

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محدود کدام نقطه است؟ خواهش

پ) آیا این تابع در همسایگی $0/9$ تعریف شده است؟ بله

ت) آیا تابع f در همسایگی 1 تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x=1$ چطور؟ خواهش

بله

۷ اگر بازه $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی 2 باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

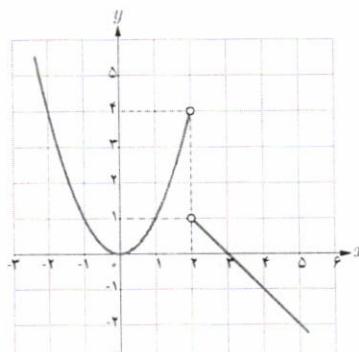
$$\begin{aligned} x-1 < 2 &\rightarrow x < 3 \\ 2x+3 < 2 &\rightarrow 2x < -1 \rightarrow x < \frac{-1}{2} \\ -\frac{1}{2} < x < 3 \end{aligned}$$



حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست)

در درس قبل دیدیم که تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ در نقطه ۲ حد ندارد. (چون در هیچ همسایگی راست ۲ تعریف نشده است). ولی با توجه به اینکه دامنه این تابع بازه $[-\infty, 2)$ می‌باشد می‌توانیم رفتار تابع را در همسایگی چپ ۲ بررسی نماییم. گاهی لازم است، رفتار تابع را وقتی متغیر x با مقادیر بزرگ‌تر از a به a نزدیک می‌شود یا وقتی متغیر x با مقادیر کوچک‌تر از a به a نزدیک می‌شود بررسی و توصیف نماییم.

فعالیت

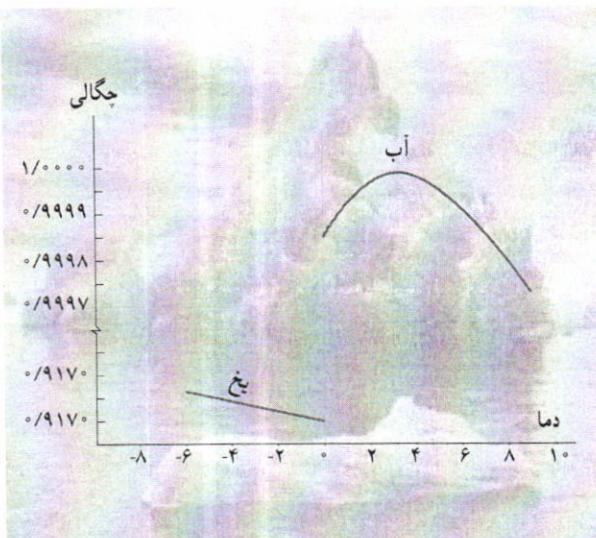


$$\text{نمودار تابع } f(x) = \begin{cases} -x + 3 & x > 2 \\ x^2 & x < 2 \end{cases} \text{ به صورت رو به رو است:}$$

(الف) اگر متغیر x با مقادیر بزرگ‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۱ نزدیک می‌شوند.

(ب) اگر x با مقادیر کوچک‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شوند.

پ) آیا تابع f در نقطه $x=2$ حد دارد؟
در هر دو حالت وحایگاه چیز ۲ متعاقب است.



حتیاً متوجه شده‌اید که بخ همیشه بر روی آب شناور است. توده بخ هرچقدر بزرگ باشد، باز هم در آب غرق نمی‌شود؛ مانند کوههای بزرگ بخ که بر روی آب دریاها و اقیانوس‌ها شناورند. آیا می‌دانید جرا بخ در آب غرق نمی‌شود؟
به طور کلی وقتی مایعی به شکل جامد درمی‌آید، منقبض می‌شود و مولکول‌هایش به هم نزدیک‌تر می‌شوند. به همین دلیل حجم ماده، کم می‌شود و جگالی آن افزایش می‌یابد.
بناراین مواد در حالت جامد سنگین‌تر از زمانی‌اند که به شکل مایع درآمده‌اند.
ولی آب مایعی است که خاصیت غیرعادی دارد. آب پس از انجماد به جای منقبض شدن، منبسط می‌شود؛ درنتیجه حجمش افزایش می‌یابد. تراکم بخ نه دهن آب است؛ به عبارت دیگر از نه لیتر آب ده لیتر بخ به دست می‌آید. به همین چهت وزن بخ، کمتر از آب هم حجمش است. به این ترتیب وقتی بخ درون آب فرار می‌گیرد، تنها نه دهن آب در آب فرو می‌رود و ۱۰ دیگرش بر روی آب شناور می‌ماند.
نمودار چگالی آب و بخ بر حسب دما به صورت رو به رو است:

در فعالیت صفحه قبل، مشاهده کردیم که وقتی از سمت راست (با مقادیر بزرگ‌تر از ۲) به ۲ نزدیک می‌شویم، مقادیر تابع به عدد ۱ نزدیک می‌شوند و اگر از سمت چپ (با مقادیر کمتر از ۲) به ۲ نزدیک شویم مقادیر تابع به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. چون این دو مقدار با هم مساوی نیستند، پس وقتی x در یک همسایگی محدود ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود، مقادیر $f(x)$ به عدد مشخصی نزدیک نمی‌شوند و درنتیجه این تابع در ۲ حد ندارد.

تعريف حد راست :

اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد می‌گوییم حد راست تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد L_1 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_1 نزدیک کرد، به شرط آنکه متغیر x (از سمت راست) به قدر کافی به a ، نزدیک شود.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1 \quad \text{در این صورت می‌نویسیم :}$$

تعريف حد چپ :

اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد می‌گوییم حد چپ تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد L_2 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_2 نزدیک کرد، به شرط آنکه متغیر x (از سمت چپ) به قدر کافی به a ، نزدیک شود.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2 \quad \text{در این صورت می‌نویسیم :}$$

اگر تابعی در یک همسایگی محدود نقطه‌ای مانند a ، تعریف شده باشد، آن‌گاه با توجه به مفهوم حد راست و حد چپ می‌توان گفت :

حد تابع f در نقطه $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و با هم برابر باشند.

نتیجه

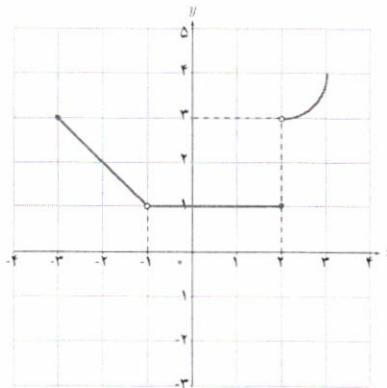
اگر حد چپ و حد راست f در نقطه $x=a$ ، دو مقدار متمایز باشند آن‌گاه تابع f در نقطه $x=a$ ، حد ندارد.

کار در کلاس

با توجه به نمودار f , حد های خواسته شده را, در صورت وجود, به دست آورید.

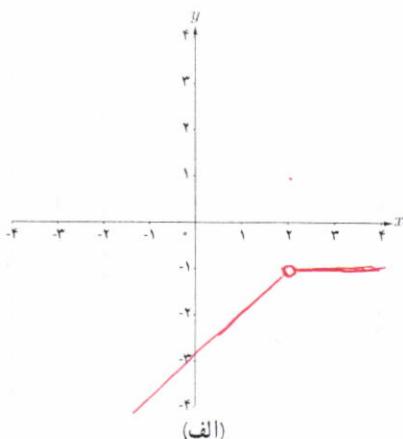
$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$	$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$
--	--	--

وجد ندارد.
 وجد ندارد.
 وجد ندارد.
 وجد ندارد.



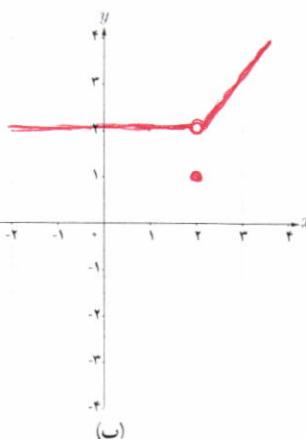
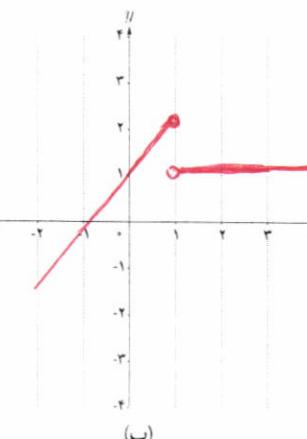
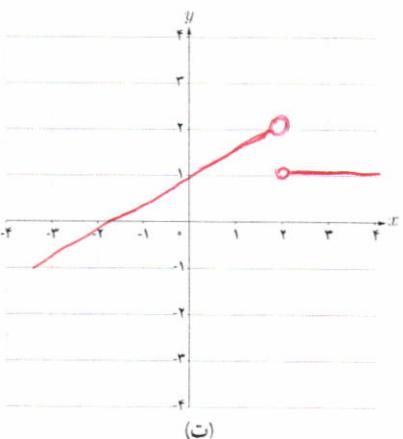
نموداری از یک تابع رسم کنید که:

الف) در یک همسایگی محدود 2 تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

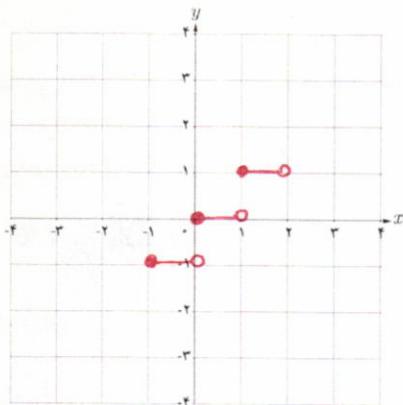


ب) در یک همسایگی محدود 2 تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

ب) در یک همسایگی 2 تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.
 ت) در یک همسایگی 2 تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه 2 , یکسان نباشد.



فعالیت



۱ نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله $[1, 2]$ رسم کنید.

۲ اگر x از طرف چپ به عدد ۱ تردیک شود، آن‌گاه مقدار $f(x)$ به عدد \circ نزدیک می‌شوند، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \dots$$

۳ حد راست تابع f در نقطه $x=1$ را به دست آورید.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ حیرت زبریا

در فعالیت قبل مشاهده کردیم که در بازه $(1, 2)$ یک همسایگی راست ۱ می‌باشد نمودار تابع $[x]$ بر نمودار تابع ثابت

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1$$

به همین ترتیب، در $(1, \circ)$ یک همسایگی چپ ۱ می‌باشد نمودار تابع $[x]$ بر نمودار تابع ثابت $h(x)=x$ منطبق است و

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \circ$$

اگر دو تابع f و g در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a با هم برابر باشند و حد راست یکی از آنها در a وجود داشته باشد آن‌گاه حد راست تابع دیگر نیز در a وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

به طریق مشابه، دو تابعی که در یک همسایگی چپ نقطه a با هم برابرند مقدار حد چپ آنها در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

بنابراین، دو تابع که در یک همسایگی نقطه a (به جز احتمالاً خود a) با هم برابر باشند مقدار حد آنها در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

مثال: مقدار حد راست تابع $f(x) = \frac{[x]}{x}$ را در نقطه $x=\circ$ به دست آورید.

حل: می‌دانیم روی بازه $(1, \circ)$ مقدار $[x]$ برابر صفر است، پس روی بازه $(1, \circ)$ تابع f با تابع $g(x)=\circ$ برابر است

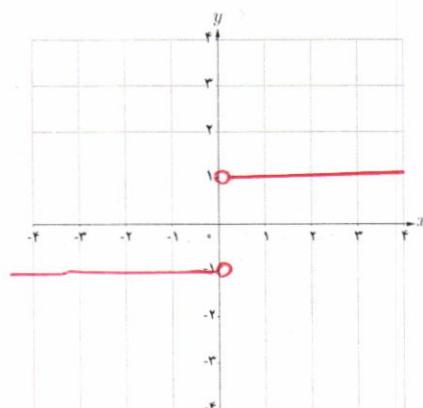
بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{[x]}{x} = \lim_{x \rightarrow \circ^+} g(x) = \circ$$

کاردر کلاس

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

- ۱) تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{|x|}{x}$ را در نظر بگیرید:
- الف) با استفاده از تعریف قدر مطلق، تابع f را به صورت دو ضابطه‌ای بنویسید.
 - ب) نمودار تابع f را رسم کنید.
 - پ) با استفاده از نمودار f ، حد چپ و حد راست تابع در صفر را به دست آورید.
 - ت) آیا تابع f در نقطه صفر حد دارد؟ چرا؟



$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ وجود ندارد} \quad \text{زیرا} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

تمرین

- ۱) نمودار تابع f به صورت زیر است. حد های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$ وجود ندارد

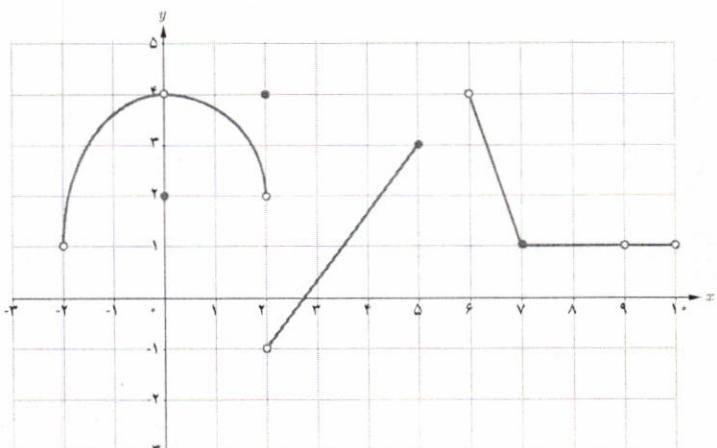
ب) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = ?$ وجود ندارد

ت) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = ?$

ث) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = ?$

ج) $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = ?$

ج) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = ?$



۲ با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 0 \\ x^2 + 2x & x < 0 \end{cases}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید:

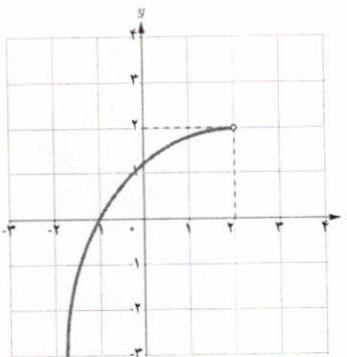
الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۵ نزدیک می‌شوند، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (5) + 2(0) = 5$$

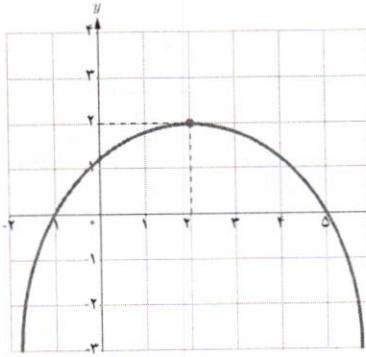
ب) حد راست تابع f در نقطه $x=0$ را به دست آورید.

پ) آیا تابع f در نقطه $x=0$ حد دارد؟ چرا؟ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

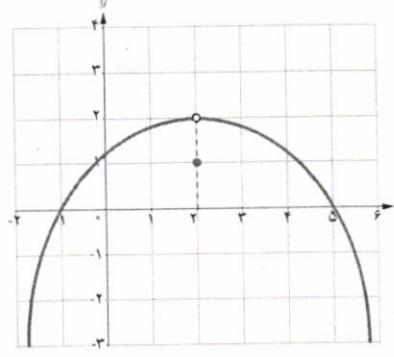
ت) با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟ در هر مورد توابع را مشخص کنید.



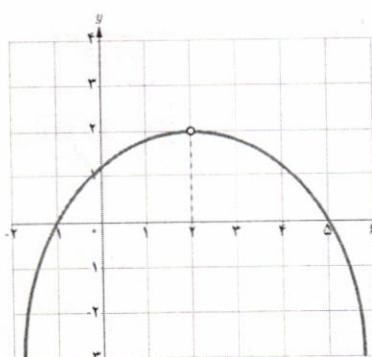
(ب)



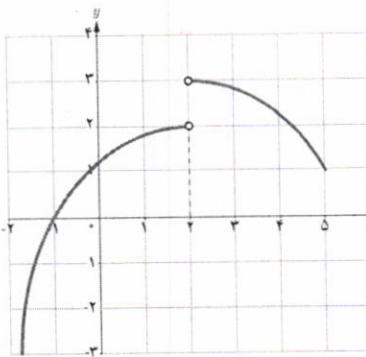
(ج)



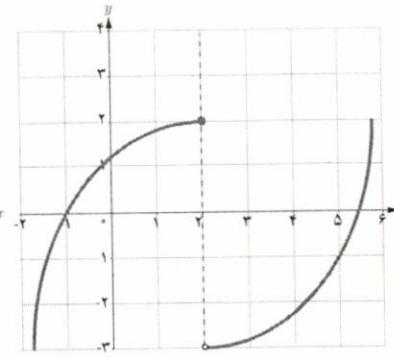
(الف)



(ت)



(ب)



(ث)

- تابع در همسایگی محدود ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد. (ج)

- تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست. (الف)

- تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد. (پ)

- تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است. (ب)

- تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد. (ج)

- تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد. (ت) و (ث)

۱۲۹ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ با ضابطه $x=1$ چه می‌توان گفت؟

$x^2 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$ \rightarrow تابع در $x=1$ بسته است $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{(1)^2 - 1} = 0$

۱۳۰ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x) = \frac{x}{[x]-2}$ چه می‌توان گفت؟

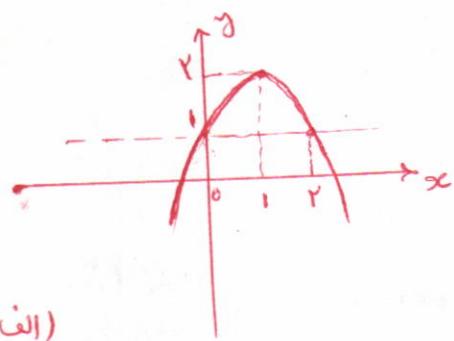
$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow [x] = 2$ $\Rightarrow [x]-2 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{[x]-2} = \infty$ وجود ندارد.

۱۳۱ با رسم نمودار تابع $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ ، حدود زیر را مشخص کنید.

(الف) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$

(ب) $\left[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right]$

((نماز جزء صحیح است)



(الف)

$$\lim_{n \rightarrow 1} [f(n)] = 1$$

رهاش اوندر خود رکت

$$1 < f(n) < 5$$

$$\rightarrow [f(n)] = 1$$

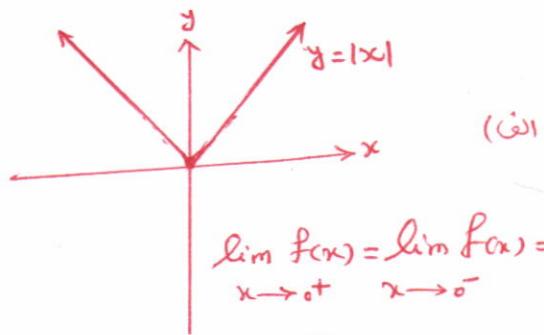
(ب) $\left[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right] = [r^-] = 1$

برای r^- عدد زیرین $\lim_{n \rightarrow 1} f(n)$

۱۳۲ با رسم نمودار تابع $f(x) = |x|$

(الف) مقدار $\lim_{x \rightarrow a} |x|$ را به دست آورید.

ب) اگر $a \in \mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی $\lim_{x \rightarrow a} |x| = a$ برقرار است؟



$$f(x) = |x|$$

((

$$\left\{ a > 0 \rightarrow |a| = a \right.$$

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow a} f(n) = \lim_{n \rightarrow a} |x| = a = |a| \right.$$

$$\left\{ a < 0 \rightarrow |a| = -a \right.$$

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow a} f(n) = \lim_{n \rightarrow a} |x| = -a = |a| \right.$$

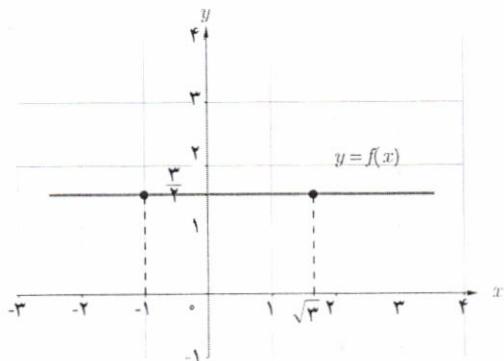


درس

قضایای حد

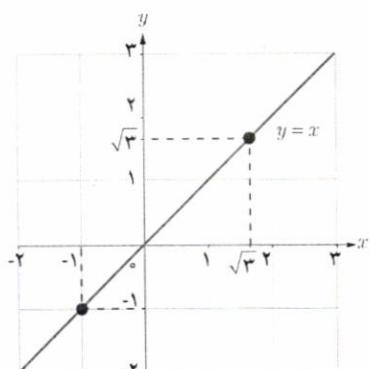
در بخش‌های قبل برای محاسبه حد توابع، با دو روش تکمیل جدول و رسم نمودار آشنا شدید. همان‌طور که مشاهده کردید تکمیل جدول زمان‌بر و رسم نمودار بعضی از توابع نیز مشکل است. در این بخش به بیان قضایایی درباره حد می‌پردازیم که با استفاده از آنها، حد بسیاری از توابع را می‌توان به آسانی محاسبه کرد.

فعالیت



الف) فرض کنید f تابع ثابت $\frac{3}{2}$ باشد. با توجه به نمودار تابع، مقدار حدۀای زیر را باید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{3}{2} \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = \frac{3}{2}$$



ب) فرض کنید g تابع همانی باشد، یعنی برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم $g(x) = x$. با توجه به نمودار، مقدار حدۀای زیر را باید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} g(x) = \sqrt{3}$$

قضیه:

الف) حد تابع ثابت $c = f(x)$ در هر عدد دلخواه a برابر مقدار ثابت c است. یعنی،

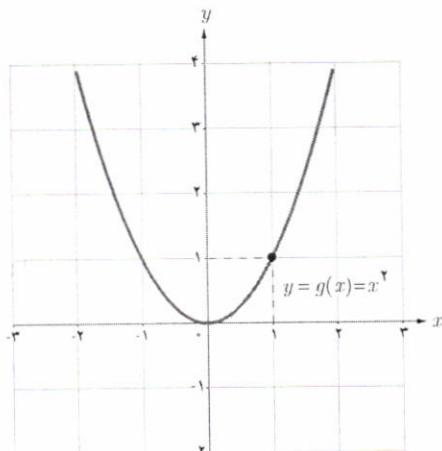
$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

ب) حد تابع همانی $x = g(x)$ در هر عدد دلخواه a ، برابر a است. یعنی،

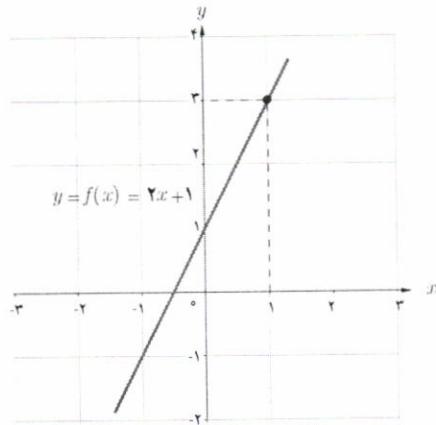
$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

توابع $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2$ را در نظر بگیرید.

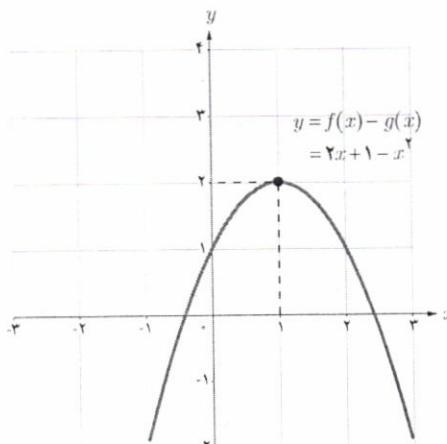
(الف) با توجه به نمودار توابع $f - g$, $f+g$, f و g , مقدار حد های خواسته شده را بباید.



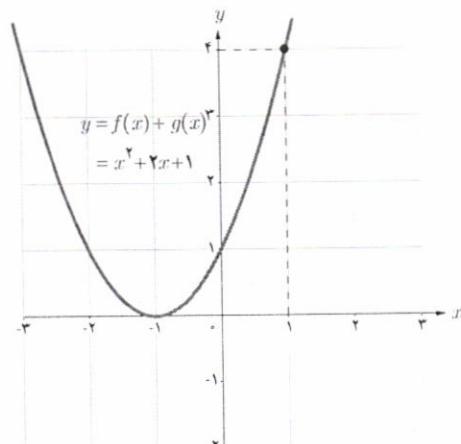
$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \underline{1}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \underline{3}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = \underline{1}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = \underline{3}$$

(ب) با استفاده از قسمت (الف)، درستی این تساوی ها را بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

قضیه: اگر دو تابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند و آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$

الف) (حد مجموع) مجموع این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$$

ب) (حد تفاضل) تفاضل این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 - L_2$$

پ) (حد حاصل‌ضرب) حاصل‌ضرب این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = L_1 \cdot L_2$$

ت) (حد خارج قسمت) به شرط آنکه $L_2 \neq 0$ ، تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

کاردر کلاس

فرض کنید $(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c)$ موجود و c یک عدد دلخواه است. با استفاده از قضیه فوق، توضیح دهد چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

الف) $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

الف) $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = \lim_{x \rightarrow a} c \times \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
 $= c \times \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} f^r(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^r$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} f^r(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times f(x) \times \dots \times f(x))$
 $= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^r$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = -\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

به شرط آنکه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (-1 \cdot f(x)) = -1 \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} 1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$

﴿ تذکر : قضیه قبل را می‌توان برای سه تابع و بیشتر نیز بیان کرد. یعنی، اگر n یک عدد طبیعی و توابع f_1, \dots, f_n همگی در نقطه $x=a$ حد داشته باشند، آن‌گاه :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + \dots + f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \times \dots \times f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \times \dots \times \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$$

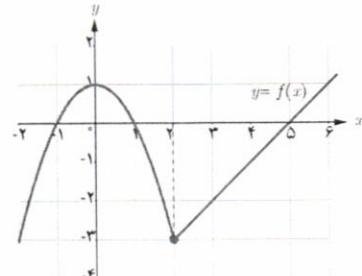
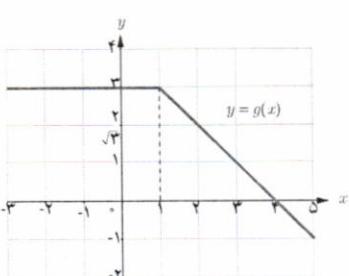
به ویژه، اگر تابع f در نقطه $x=a$ حد داشته باشد آن‌گاه :

که در حالت خاص، اگر تابع f را تابع همانی $f(x)=x$ انتخاب کنیم، نتیجه می‌شود :

$$g(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ 4-x & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x < 2 \\ x-5 & x \geq 2 \end{cases}$$

﴿ مثال : دو تابع f و g را در نقطه $x=2$ به دست آورید.

﴿ حل : ابتدا حد دو تابع f و g را در نقطه $x=2$ محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.



$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$$

اکنون با استفاده از قضیه، به محاسبه حد های مورد نظر می‌پردازیم :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -3 + 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -3 - 2 = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow 2} g(x) \right) = (-3)(2) = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{-3}{2}$$

مثال :

$$\begin{aligned} \text{۱) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x^4 + 3x - 1) &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x^4 + \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 3x - \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 1 \\ &= (\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x)^4 + 3 \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x - \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 1 \\ &= (\sqrt{2})^4 + 3(\sqrt{2}) - 1 = 4 + 3\sqrt{2} - 1 = 3 + 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{۲) } \lim_{x \rightarrow 3} |x| = \left(\lim_{x \rightarrow 3} x \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow 3} |x| \right) = 3 \times |3| = 9$$

$$\text{۳) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 + 5}{1-x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (4x^2 + 5)}{\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (1-x)} = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} x \right)^2 + 5}{1 - \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} x} = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5}{1 - \frac{1}{2}} = 16$$

قضیه :

هر چند جمله‌ای مانند $p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ در هر نقطه دلخواه a حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله‌ای در نقطه a برابر است. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) = b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \dots + b_0$$

کاردکلاس

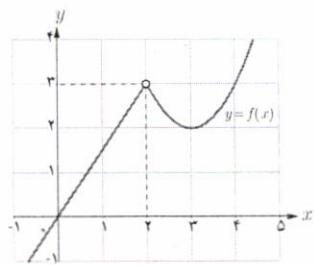
الف) مقدار حد های زیر را بباید.

$$\text{۱) } \lim_{x \rightarrow -1} x^4 = (-1)^4 = 1$$

$$\text{۲) } \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x^3 - 6|x| + 1) = 5(1)^3 - 6|1| + 1 = 5 - 6 + 1 = -2$$

$$\text{۳) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x + 4}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{(2)^2 + 4(2) + 4}{4(2)^2 - 4(2) + 1} = \frac{16}{15}$$

$$\begin{aligned} \text{۴) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x - [x]}{1-x} &= \frac{\frac{1}{2} - [\frac{1}{2}]}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

ب) نمودار تابع f در شکل رو به رو رسم شده است.مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} x f(x)$ را بباید.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} x &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} x f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \times 2 = 4$$

فعالیت

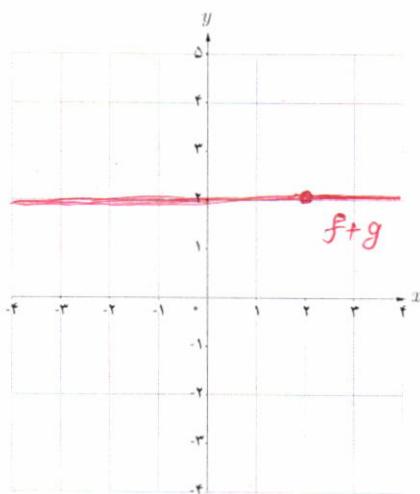
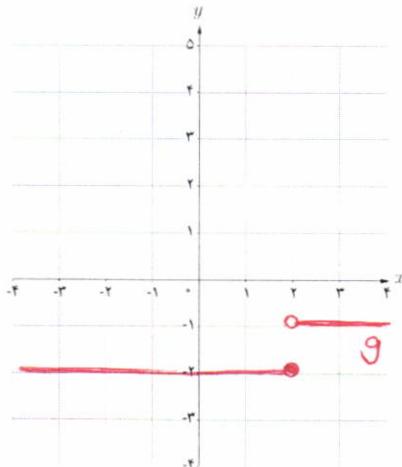
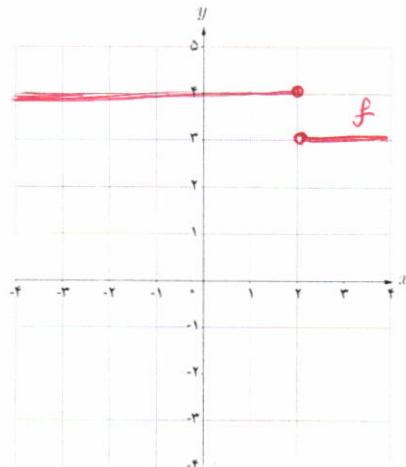


دو تابع $f(x) = \begin{cases} -2 & x \leq 2 \\ -1 & x > 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 4 & x \leq 2 \\ 3 & x > 2 \end{cases}$

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 2 & x \leq 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$$

الف) ضابطه تابع $f+g$ را باید.

ب) نمودار توابع f , g و $f+g$ را رسم کنید.



- ب) آیا حد دو تابع f و g در $x=2$ وجود دارد؟ **خیر**
 ت) آیا حد تابع $f+g$ در $x=2$ وجود دارد؟ **بله**
 ث) آیا می‌توان از قضیه حد مجموع برای محاسبه حد $f+g$ در $x=2$ استفاده کرد؟ چرا؟ **خیر**

شرط استفاده از این قضیه این است که تابع f و g در $x=a$ داشته باشند.

برای استفاده از قضیه حد مجموع، حد تفاضل و ...، ابتدا باید توجه کنیم که حد توابع f و g در نقطه $x=a$ موجود باشند.

کاردر کلاس

فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی محدود ن نقطه a تعریف شده‌اند.

الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ موجود باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ وجود دارند؟ چرا؟

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x > 3 \\ 1 & x < 3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x > 3 \\ -1 & x < 3 \end{cases}$$

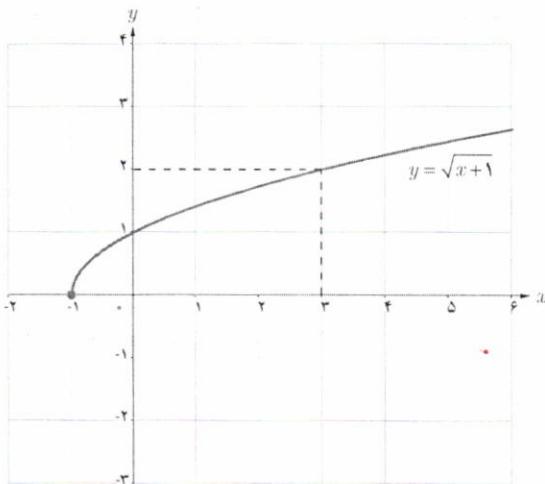
خواه؟ توابع زیر در $x=3$ حد ندارد ولی $f+g$ را به لطف حد دارد.

ب) ثابت کنید اگر $(f(x) + g(x))$ موجود باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ نیز موجود دارد.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

موجود **موجود** **موجود** **موجود**

فعالیت



در شکل رو به رو نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ رسم شده است.

الف) با توجه به نمودار، مقدار حد $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1}$ را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = 2$$

ب) آیا تساوی $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)}$ برقرار است؟

$$\sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)} = \sqrt{\epsilon} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)}$$

قضیه :

فرض کنید تابع f در نقطه a حد دارد.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

اگر تابع f در یک همسایگی محدود a نامنی باشد آن‌گاه داریم :

به طور کلی، برای هر عدد طبیعی n ، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد، آن‌گاه داریم :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

مثال :

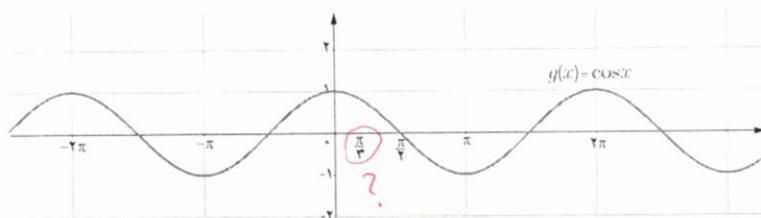
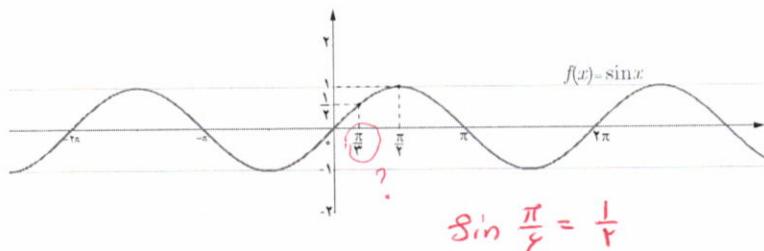
۱) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ (برای n های زوج a باید مثبت باشد)

۲) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1}}{3x-4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x-1}}{\lim_{x \rightarrow 1} (3x-4)} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)}}{\lim_{x \rightarrow 1} (3x-4)} = \frac{\sqrt{2(1)-1}}{3(1)-4} = -1$

حد توابع مثلثاتی

فعالیت

نمودارهای توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در زیر رسم شده‌اند.



الف) مقدار حد های زیر را باید.

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = 0.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -1$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

بله

ب) آیا مقدار حد تابع $f(x)=\sin x$ در $x=\frac{\pi}{6}$ با مقدار $\sin(\frac{\pi}{6})$ برابر است؟

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بله

پ) آیا مقدار حد تابع $g(x)=\cos x$ در $x=\frac{\pi}{6}$ با مقدار $\cos(\frac{\pi}{6})$ برابر است؟

قضیه: برای هر عدد حقیقی a ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

* مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\cos x - \sin x) = \cos(\frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

کار در کلاس

$\pi \cos \pi = \pi \times (-1)$ مقدار حد های زیر را بباید.

$$\text{۱) } \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\pi \cos x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\pi} \pi \cos x}{\lim_{x \rightarrow -\pi} x} = \frac{\pi \cos(-\pi)}{-\pi} = \frac{-\pi}{-\pi} = 1$$

$$\text{۲) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

✿ تذکر : همه قضایا و فعالیت های بیان شده درباره حد (دو طرفه)، برای حد چپ و حد راست نیز برقرارند. به عنوان مثال، اگر حد چپ توابع f و g در a موجود باشند، آن گاه :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$$

✿ مثال :

$$\text{۱) } \lim_{x \rightarrow a^+} x^n = \lim_{x \rightarrow a^+} \overbrace{(x \times \cdots \times x)}^{n \text{ بار}} = (\lim_{x \rightarrow a^+} x) \times \cdots \times (\lim_{x \rightarrow a^+} x) = a \times \cdots \times a = a^n$$

$$\text{۲) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - [x]}{x^2 + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - [x])}{\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} x - \lim_{x \rightarrow 1^-} [x]}{\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1^-} 2} = \frac{1 - 0}{1^2 + 2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{۳) } \lim_{x \rightarrow e^+} (\cos x - \sin x) = \cos(0) - \sin(0) = 1$$

کار در کلاس

مقدار حد $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2}$ را بباید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2}}{\lim_{x \rightarrow 2^+} [x]+2} = \frac{0}{2+2} = 0$$

$$\text{پ) } = \frac{(-\frac{\delta}{r} + \pi)(\overbrace{r(-\frac{\delta}{r}) + \alpha}^{\rightarrow 0})}{(r(-\frac{\delta}{r}) + \alpha)((-\frac{\delta}{r}) + 1)} = 0$$

فصل پنجم: حد و پیوستگی ۱۳۹

$$\text{ت) } = \frac{1 - (\sqrt{r})^2}{(\sqrt{r})^2 - \varepsilon} = \frac{1 - r}{r - \varepsilon} = \frac{-1}{-\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$$

تمرین ۱

مقدار حد های زیر را باید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} - 2)^2 = (\sqrt{4} - 2)^2 = -216$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -1} (-5x^4 - 4x^2 + 5) = -5(-1)^4 - 4(-1) + 5 = 10$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \frac{(x + \pi)(3x + 5)}{(3x + 8)(x^2 + 1)}$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{r}^+} \frac{1-x^2}{x^2 - 4}$$

$$\text{ه) } \lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{r}} \sqrt[3]{4x^2 + 5x} = \sqrt[3]{\varepsilon(\frac{1}{r})^2 + 5(\frac{1}{r})} = r$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{x + \cos x} = \frac{\sin \pi}{\pi + \cos \pi} = \frac{0}{0+1} = 0 \quad \text{ه) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x - \pi} = \frac{|\cos \frac{\pi}{2}|}{\frac{\pi}{2} - \pi} = \frac{0}{-\frac{\pi}{2}} = 0$$

۱ فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$. آیا می توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟



با عذر توهم کنند نه سر ایط داره شده (دارد)
ولی ثابت نیست.

$$\frac{\lim g(x)}{\lim x^2 - 1} = \varepsilon \rightarrow \frac{\lim g(x)}{x^2} = \varepsilon \rightarrow \lim g(x) = \varepsilon x^2$$

۲ نشان دهید اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} L = L - L = 0$$

$$\text{آنکه } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} L = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - L = 0$$

$$\underline{+L} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - L + L = 0 + L$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3x+2 = 5 \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1} [x] - 1 = 0$$

و جو زیر را دارد
حد حبیب ≠ حد حبیب

۱۴۰

۵ توابع زیر را در نظر بگیرید.

$$y = 3x+2 \quad , \quad y = x^2 - 1 \quad , \quad y = [x] - 1 \quad y = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$$

الف) مقدار حد هر یک از توابع فوق در $x=1$ را (در صورت وجود) بیابید.

ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

$x^2 + 3x + 1$	$g(x) = x^2 - 1$	$f(x) = 3x + 2$	هر سه تابع f , g و $f+g$ در ۱ حد دارند.
$f(x)g(x) = \dots$	$g(x) = x^2 - 1$	$f(x) = 3x + 2$	تابع g در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.
$\frac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$g(x) = x^2 - 1$	$f(x) = 3x + 2$	تابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.
$f'(x) = \dots$		$f(x) = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$	تابع f در ۱ حد دارد اما تابع f' در ۱ حد ندارد.
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 - 1}$		$f(x) = x^2 - 1$	تابع f در ۱ حد دارد اما تابع \sqrt{f} در ۱ حد ندارد.

۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) - \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$x \rightarrow a$
حد دارد

$$= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x) - f(x))$$

$x \rightarrow a$
حد ندارد

$$= \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$x \rightarrow a$
حد ندارد

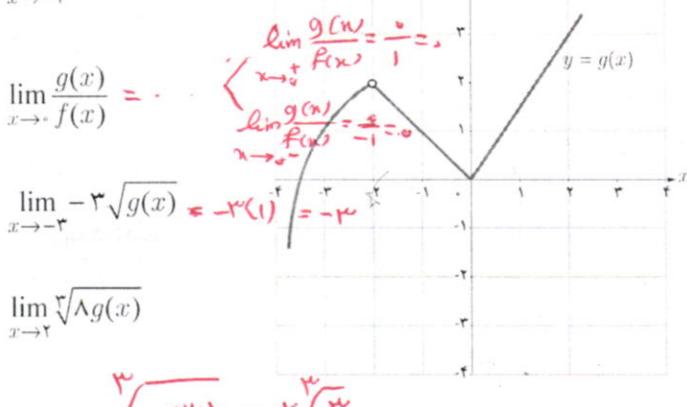
پس $f+g$ خلف یافل دلیل داشت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + [x]}{|x|} & x < -1 \\ 3x + b & x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -3 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 1}{-x} = \frac{1 - 1}{-1} = -1$$

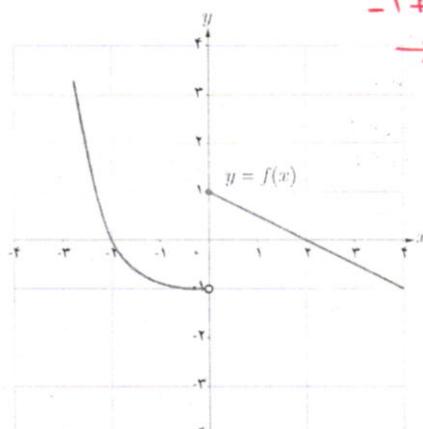
$$\lim_{x \rightarrow -1} (2g(x) - f(x)) = 2(2) - 0 = 4$$



$$\lim_{x \rightarrow -1} -2\sqrt{g(x)} = -2\sqrt{(1)} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{2g(x)}$$

$$= \sqrt[3]{2(4)} = 2\sqrt[3]{2}$$



۴

درس

محاسبه حد توابع کسری (حالت ۰)

در این بخش، به محاسبه حد توابع مانند $\frac{f}{g}$ می پردازیم که حد صورت و حد مخرج کسر در نقطه a ، هر دو برابر صفر است. در این گونه موارد، نمی توانیم از قضیه حد خارج قسمت استفاده کنیم، بنابراین سعی می کنیم با تجزیه صورت و مخرج کسر به عامل های مناسب، کسر را ساده نماییم. برای این امر از اتحادهای جبری و مثلثاتی استفاده می کنیم.^۱

مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ را بباید.

حل: با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$ ، پس نمی توانیم از قضیه حد خارج قسمت استفاده کنیم. در

واقع از $\frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)}$ عبارت حاصل می شود. در این گونه موارد، سعی می کنیم کسر را ساده کرده و

سپس حد را محاسبه نماییم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

کارد در کلاس

مقدار حد زیر را بباید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = 0$$

۱. در این کتاب، حد کسرهایی مورد بررسی آراز می گیرند که صورت و مخرج آنها جند جمله ای های حداکثر از درجه ۲ و عبارات رادیکالی به صورت $\sqrt{ax+b}$ باشند. همچنین، در عبارات شامل تابع مثلثاتی، تابع سینوس و کسینوس حداکثر ۲ و کمان آنها به صورت $x+b$ با x خواهد

بود.

مثال : مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$ را باید.

حل : حد صورت و مخرج کسر در $x=1$, برابر صفر می شود و در صورت کسر عبارت گنگ $\sqrt{x+8}-3$ وجود دارد.
در این گونه موارد صورت و مخرج کسر را در یک عبارت مناسب ضرب می کنیم تا این عبارت گنگ, به عبارتی گویا تبدیل شود.
در این مثال, صورت و مخرج کسر را در عبارت $\sqrt{x+8}+3$ ضرب می کنیم.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} \times \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8})^2 - (3)^2}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+8)-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \frac{1}{\sqrt{1+8}+3} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

کار در کلاس

مقدار حد زیر را باید.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{3x-8}-2} &\stackrel{\circ}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{\sqrt{3x-8}-2} \times \frac{\sqrt{3x-8}+2}{\sqrt{3x-8}+2} = \lim_{n \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{3x-8}+2)}{3x-16} \\ &= \lim_{n \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{3x-8}+2)}{4(x-4)} = \frac{4 \times 8}{3} = 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-\cos x}{x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1+\cos x} = 1 \times 0 = 0\end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\begin{aligned}2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

کاردر کلاس

مقدار حد زیر را باید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{3x} \stackrel{x \rightarrow 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

نموده:

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sin u}{u} = 1$$

مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ را باید.

حل: قرار می دهیم: $x = t^2$. پس اگر x به صفر نزدیک شود، t به ۱ نزدیک می شود و داریم $x=t^2$ و بنابراین،

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{t^2-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}$$

در مثال فوق، با تغییر متغیر مناسب، حد موردنظر را به یک حد ساده تر تبدیل کردیم و سپس حد جدید را محاسبه نمودیم.

مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x}$ را باید.

حل: قرار می دهیم: $x = t + \frac{\pi}{2}$. پس اگر x به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک شود، t به $x - \frac{\pi}{2}$ نزدیک می شود و داریم $x = t + \frac{\pi}{2}$ پس،

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(t + \frac{\pi}{2}) - \pi}{\cos(t + \frac{\pi}{2})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{-\sin t} = -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = -2 \times 1 = -2$$

کاردر کلاس

$$x - \frac{\pi}{2} = t \rightarrow x - \frac{\pi}{2} = 2t + \frac{\pi}{2}$$

\swarrow

$$x - \pi = 4t$$

مقدار حد زیر را باید.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x-1}{4x-\pi} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2t+\frac{\pi}{2})-1}{4t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t-1}{4t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{4} \times \frac{1}{\cos t+1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{\sin t}}{4t} \times \frac{\cancel{\sin t}}{\cos t+1} \times \frac{-1}{4} = 1 \times \frac{\sin 0}{\cos 0+1} \times \frac{-1}{4} = 0 \end{aligned}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1} \times \frac{x + \sqrt{n}}{x + \sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} + 1} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{n}+1)}{(x-1)(x+\sqrt{n})} = \frac{x}{\sqrt{n}} = 1$$

۱۴۴

نماین

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{rx-1}{rx} = \frac{-r}{-r} = 1$$

مقدار حد های زیر را بیابید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{rx^2 + x - 1}{3x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(rx-1)}{rx(x+1)}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow r^+} \frac{x[x] - \Lambda}{x - r} = \lim_{x \rightarrow r^+} \frac{rx^2 - \Lambda}{x - r} = \lim_{x \rightarrow r^+} \frac{r(x-r)(x+r)}{x-r} = \Lambda$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} \times \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{\sqrt{x+2} + 2}}{(x-2)(x+2)} \times \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{1}{16}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{\varepsilon} - \sqrt{rx+1}} \frac{2 - \sqrt{x}}{x - \sqrt{rx+1}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{\varepsilon} - \sqrt{rx+1}} \frac{2 - \sqrt{x}}{x - \sqrt{rx+1}} \times \frac{\sqrt{rx+1}}{\sqrt{rx+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \sqrt{\varepsilon} - \sqrt{rx+1}} \frac{(2-\sqrt{x})(\sqrt{rx+1} + 2)}{(\sqrt{rx+1} - \sqrt{rx+1})(\sqrt{rx+1} + 2)} = \frac{4}{\varepsilon} = \frac{4}{\Lambda}$$

$$\text{چ) } \lim_{x \rightarrow *} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \text{پلا}$$

$$\text{د) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+n} - \sqrt{1-n}}{n^2 + n} \times \frac{\sqrt{1+n} + \sqrt{1-n}}{\sqrt{1+n} + \sqrt{1-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n(n+1)(\sqrt{1+n} + \sqrt{1-n})} = \frac{2}{\Lambda} = 1$$

را بیابید. $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)g(x)$ حاصل، $f(x) = \frac{rx+1}{x}$ و $g(x) = \frac{x+1}{rx^2 - x - 1}$ اگر

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 0$$

مقدار حد های زیر را بیابید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} =$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow *^-} \frac{x^2}{|1 - \cos x|}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow *^-} \frac{2 - 2\cos rx}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow *^-} \frac{2(1 - \cos rx)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow *^-} \frac{2(1 - \cos rx)}{x \sin x}$$

$$\text{چ) } \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\cos x + 1}{x + \pi}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$\text{ز) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{6x - 2\pi}$$

$$\text{ح) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{rx - 3\sqrt{x} + 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{n} \times \frac{\sin x}{\sin x} \times \varepsilon$$

$$= (\infty) \times \varepsilon = \varepsilon$$

$$x < 0 \rightarrow 0 < \cos x < 1 \\ \rightarrow -1 < -\cos x < 0 \rightarrow 0 < 1 - \cos x < 1 \rightarrow |1 - \cos x| = 1 - \cos x$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{1 - \cos x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{1 - \cos^2 x} \times (1 + \cos x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{(1 + \cos x)} = 1 \times (1+1) = 2$$



$$\text{ث) } \lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ t = \pi + \pi \\ x \rightarrow \pi}} \frac{\cos x + 1}{x + \pi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\cos(t - \pi) + 1}{t} \times \frac{\cos(t - \pi) - 1}{\cos(t - \pi) - 1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\cos(t - \pi) - 1}{t} \times \frac{1}{\cos(t - \pi) - 1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\sin t}{t} \times \frac{1}{\cos(t - \pi) - 1} = 0$$



حل کاردر کلاس صفحه‌ی ۱۴۴ (حسابان ۱)

تمرین ۳:

$$\begin{aligned}
 \textcircled{۱}) \quad & \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\cos x + 1}{x + \pi} = \lim_{x+\pi=t \rightarrow 0^+} \frac{\cos(t - \pi) + 1}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos t \cos \pi + \sin t \sin \pi + 1}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\underbrace{-\cos t}_{\cos t \cos \pi + \sin t \sin \pi + 1} + \underbrace{\sin t \sin \pi}_{t}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\cos t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{t} \times \frac{1 + \cos t}{1 + \cos t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 t}{t} \times \frac{1}{1 + \cos t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 t}{t} \times \frac{\sin t}{1 + \cos t} = 1 \times \frac{0}{2} = 0 \\
 \textcircled{۲}) \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x-a=t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t + a) - \sin a}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t \cos a + \cos t \sin a - \sin a}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \times \cos a - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{t} \times \sin a \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \times \cos a - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{t} \times \frac{1 + \cos t}{1 + \cos t} \times \sin a \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \times \cos a - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 t}{t} \times \frac{1}{1 + \cos t} \times \sin a \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \times \cos a - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \times \frac{\sin t}{1 + \cos t} \times \sin a \\
 &= 1 \times \cos a - 1 \times \frac{0}{1+1} \times \sin a = \cos a \\
 \textcircled{۳}) \quad & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{\sqrt{3}x - \sqrt{3}\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{\sqrt{3}(x - \frac{\pi}{3})} = \lim_{x-\frac{\pi}{3}=t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \zeta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{1} + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1 - \sqrt[3]{1}}{x - 1} \times \frac{\sqrt[3]{x} + 1 + \sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{x} + 1 + \sqrt[3]{1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} + 1)^2 - (\sqrt[3]{1})^2}{x - 1} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 1 + \sqrt[3]{1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x} + 1 - 1}{x - 1} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 1 + \sqrt[3]{1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}^2 - 1 + 1}{x - 1} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 1 + \sqrt[3]{1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(\sqrt[3]{x} - 1)}{x - 1} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 1 + \sqrt[3]{1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 1 + \sqrt[3]{1}} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

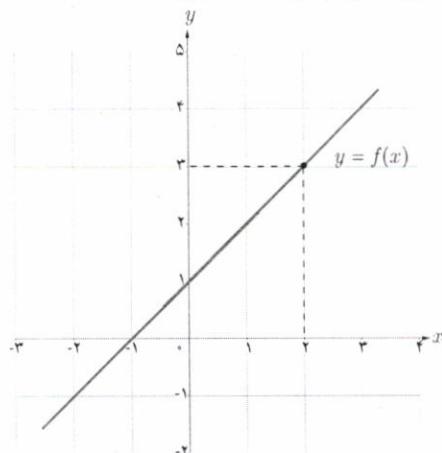


درس

پیوستگی

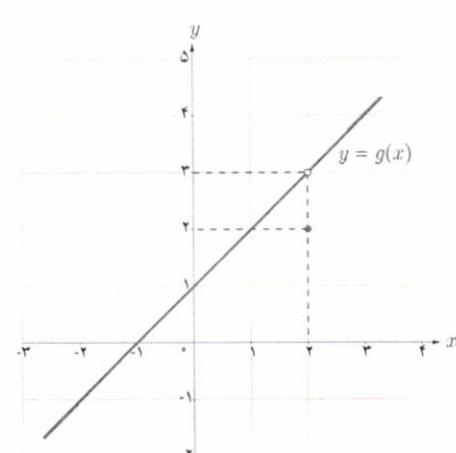
فعالیت

الف) با توجه به نمودارها، مقادیر زیر هر نمودار را (در صورت وجود) به دست آورید.



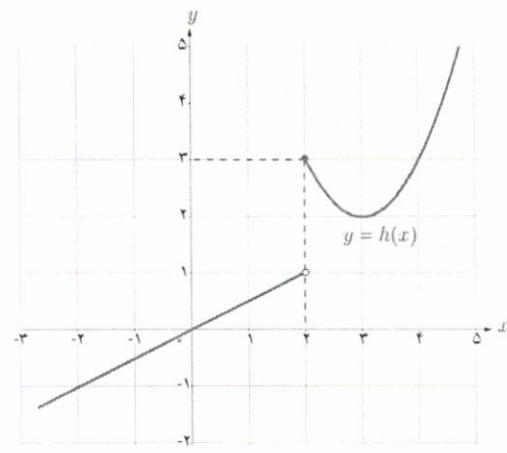
$$f(2) = \underline{\underline{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \underline{\underline{3}}$$



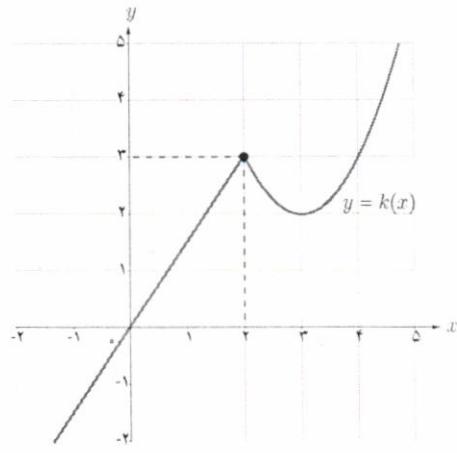
$$g(2) = \underline{\underline{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \underline{\underline{3}}$$



$$h(2) = \underline{\underline{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \underline{\underline{3}} \quad \text{وجود ندارد}$$



$$k(2) = \underline{\underline{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} k(x) = \underline{\underline{3}}$$

f, k

ب) برای کدامیک از توابع، حد تابع در ۲ با مقدار تابع در ۲ برابر است؟

f و k

پ) در نمودار کدامیک از توابع، در نقطه‌ای به طول ۲، گسستگی وجود ندارد؟

همان‌طور که در شکل‌های فوق مشاهده می‌کنید نمودار تابع f (و همچنین تابع k) در نقطه‌ای به طول ۲، هیچ گسستگی ندارد. در این حالت اصطلاحاً گوییم «تابع f (و همچنین تابع k) در نقطه $x=2$ پیوسته است».

تعریف پیوستگی

گوییم تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

بنابراین، برای پیوسته بودن تابع f در نقطه a ، باید شرایط زیر برقرار باشند:

الف) تابع f در a تعریف شده باشد.

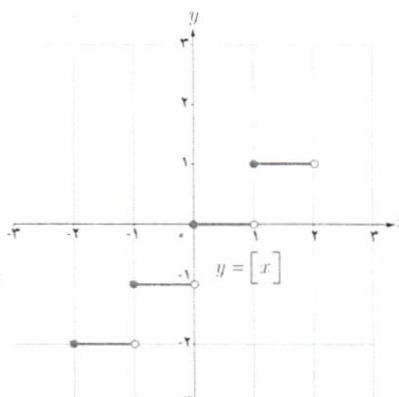
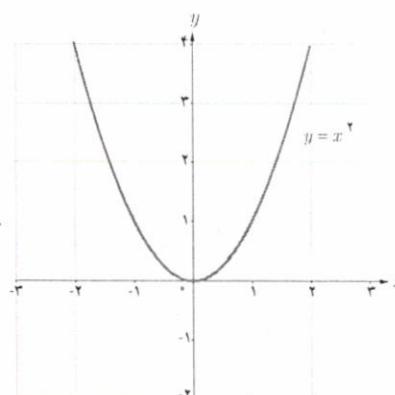
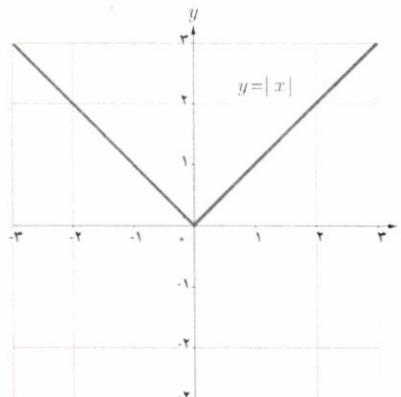
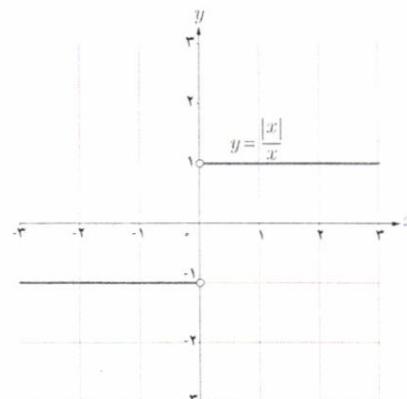
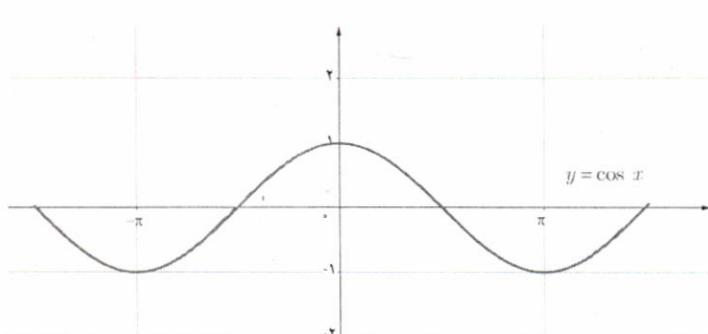
ب) حد تابع f در a موجود باشد.

پ) مقدار حد تابع f در a با مقدار $f(a)$ برابر باشد.

هنگامی که تابع f در نقطه a پیوسته نیست، گوییم f در a ناپیوسته است.

مثال: در بخش‌های قبل دیدیم که در هر نقطه a ، $y = \sqrt[n]{x}$ و $y = \sin x$ در هر عدد a پیوسته‌اند.

همچنین توابع $y = |x|$ ، $y = \cos x$ و $y = x^n$ و نیز چندجمله‌ای‌ها در هر عدد حقیقی a پیوسته‌اند. اما توابع $y = \lfloor x \rfloor$ و $y = \lceil x \rceil$ این چنین نیستند. این مطلب را از روی نمودار این توابع نیز می‌توان تشخیص داد.



مثال: توابع f و g در نقطه ۳ بحث کنید.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$$

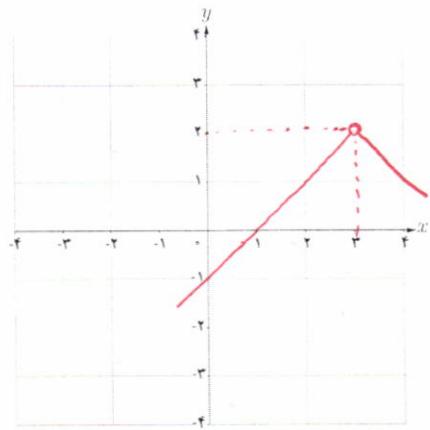
$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

حل: از آنجایی که f در ۳ تعریف نشده است، پس تابع f در ۳ پیوسته نیست.
در مورد تابع g داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6 = g(3)$$

پس تابع g در ۳ پیوسته است.

کاردر کلاس

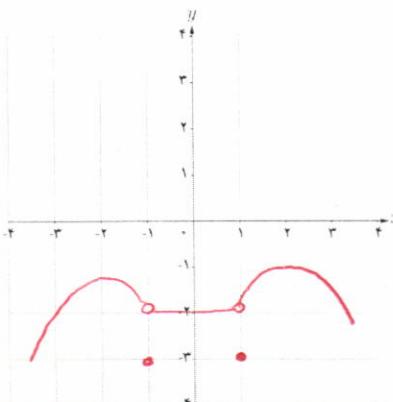
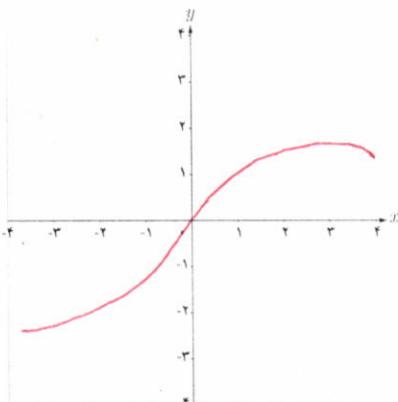
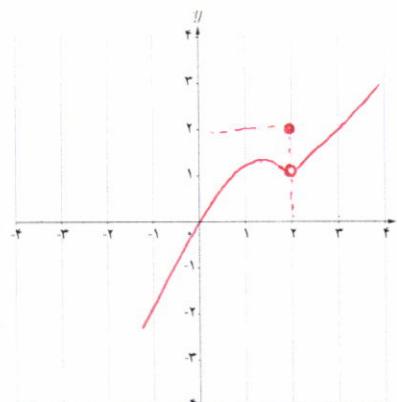


نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۳ تعریف نشده باشد اما حد تابع در $x=3$ وجود داشته باشد. (توجه کنید که این تابع در $x=3$ پیوسته نیست)

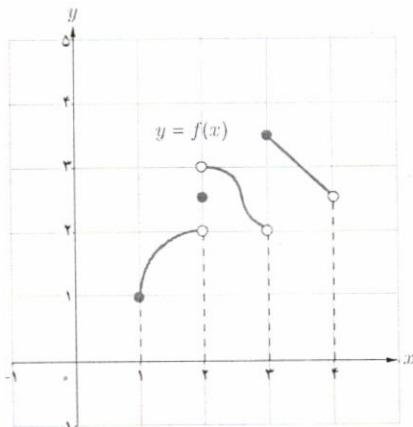
نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و حد تابع هم در نقطه a موجود باشد اما با مقدار تابع در a برابر نباشد. (توجه کنید که این تابع در a پیوسته نیست).

نمودار تابعی را رسم کنید که در هر عدد حقیقی پیوسته باشد.

نمودار تابعی را رسم کنید که همه جا پیوسته باشد بهجز در دو نقطه.



فعالیت



نمودار تابع f به صورت رو به رو رسم شده است.

الف) تابع f در کدام یک از نقاط مجموعه $\{1, 2, 2/5, 3, 4\}$ نایوسنده است.

ب) آیا تساوی $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$ برقرار است؟ خیر

پ) آیا تساوی $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$ برقرار است؟ خیر

ت) در کدام نقطه a از مجموعه $\{1, 2, 2/5, 3, 4\}$ تساوی $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ برقرار است؟

۱ و ۳

تعريف

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

گوییم تابع f در a از راست پیوسته است (یا پیوستگی راست دارد) هرگاه :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

گوییم تابع f در a از چپ پیوسته است (یا پیوستگی چپ دارد) هرگاه :

بنابراین، هرگاه تابع f در یک همسایگی (دو طرفه) a تعریف شده باشد :

f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

مثال : تابع $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ 2\cos x - \sin x & x > 0 \end{cases}$

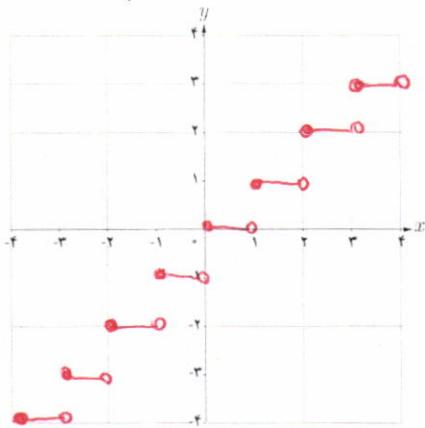
حل : داریم $f(0) = 2$. همچنان

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 + x) = 0 \neq f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\cos x - \sin x) = 2\cos(0) - \sin(0) = 2 = f(0)$$

بنابراین f در صفر پیوسته نیست اما در صفر پیوستگی راست دارد.

کاردر کلاس



الف) با رسم نمودار تابع $f(x)=[x]$ مشخص کنید که در کدام بک از نقاط مجموعه $\{1, 2, \frac{1}{2}, 0\}$ ،

۱ تابع f پیوسته است. $\frac{1}{2}$

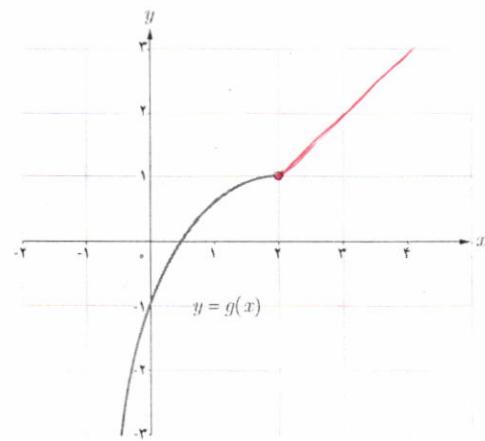
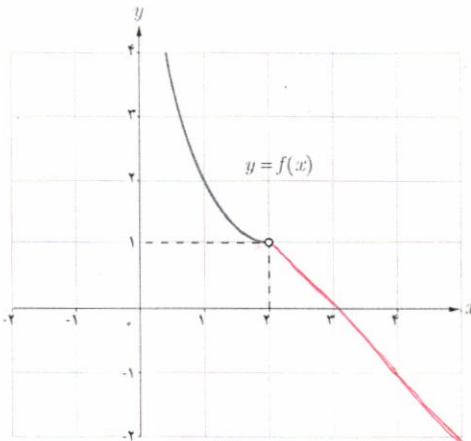
۲ تابع f پیوستگی راست دارد.

۳ تابع f پیوستگی چپ دارد. **هیگدام**

ب) در شکل های زیر نمودار دو تابع f و g در طرف چپ نقطه ۲ رسم شده اند. در نقطه $x=2$ و در طرف راست نقطه ۲، نمودارها را طوری تکمیل نمایید که:

۱ تابع f در نقطه ۲ پیوستگی راست داشته باشد، اما در ۲ پیوسته نباشد.

۲ تابع g در نقطه ۲ پیوسته باشد.



تعریف (پیوستگی بر بازه)

تابع f را بر بازه باز (a, b) پیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه (a, b) پیوسته باشد.

تابع f را بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته گوییم هرگاه تابع f در هر نقطه (a, b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته و در b از چپ پیوسته باشد.

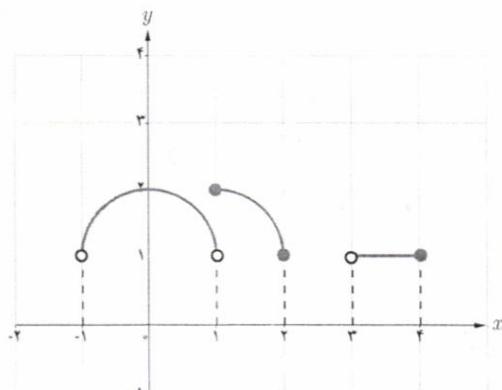
کاردر کلاس

پیوستگی روی بازه‌های $[a, b]$ و $(a, b]$ را به طور مشابه تعریف کنید.
 تابع f را در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته گویند هرگاه ره‌ریخته کی (a, b) پیوستگی را داشته باشد.
 تابع f را در بازه‌ی (a, b) پیوسته گویند هرگاه ره‌ریخته کی (a, b) پیوستگی را داشته باشد.

مثال:

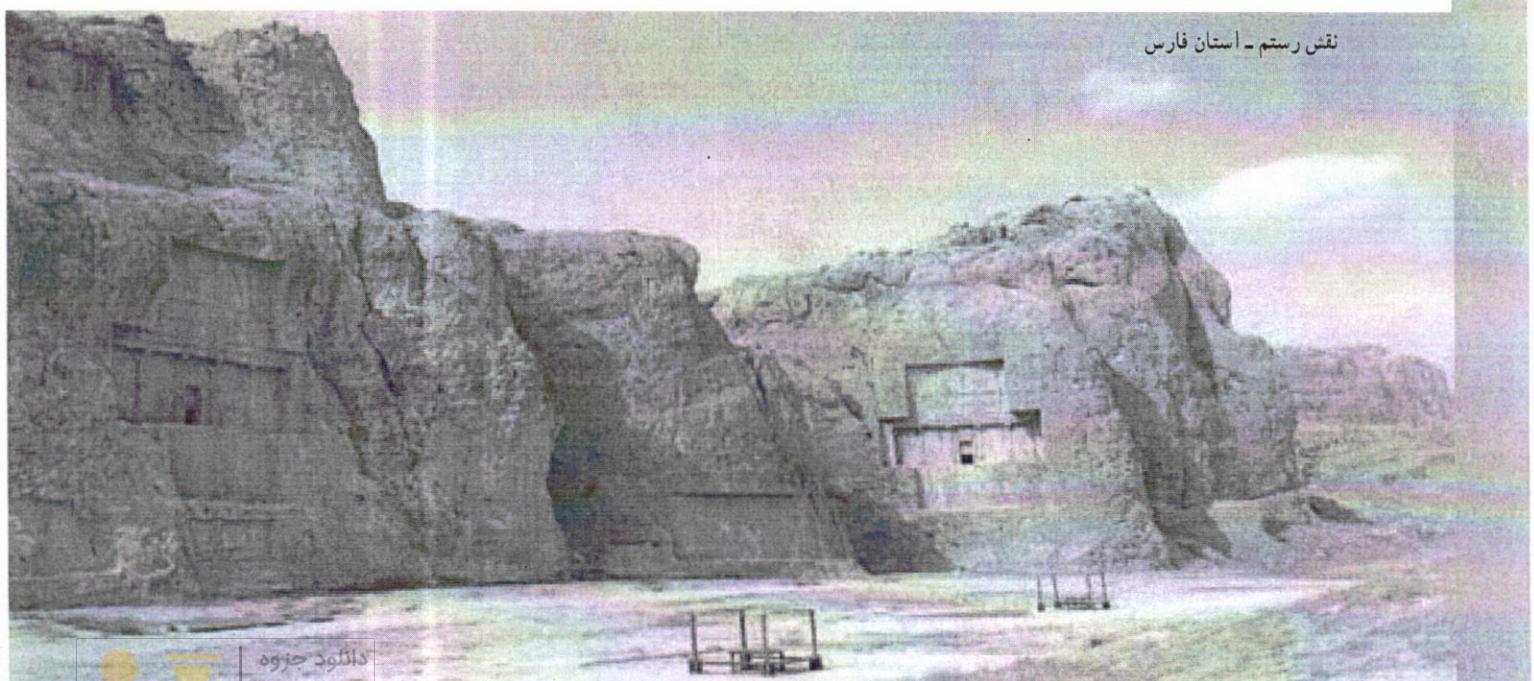
- ۱) تابع $f(x) = \sqrt{x}$ بر بازه $[1, 2]$ پیوسته است.
- ۲) تابع $f(x) = [x]$ بر بازه $(1, 2)$ پیوسته است، اما بر بازه بسته $[1, 2]$ پیوسته نیست.

کاردر کلاس



- در شکل رو به رو نمودار تابع f رسم شده است. کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست هستند؟
- الف) تابع f بر بازه $[1, 2]$ پیوسته است. **درست**
 - ب) تابع f در هر نقطه از $[1, 2]$ پیوسته است. **نادرست**
 - پ) تابع f بر بازه $[2, 3]$ پیوسته است. **نادرست**
 - ت) تابع f بر بازه $[2, 2]$ پیوسته است. **نادرست**

نقش رستم - استان فارس



تمرین

۱) با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

$$y = x - [x] \quad (ب)$$

$$y = |x - 1| + 2 \quad (الف)$$

$$y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases} \quad (ت)$$

$$y = [x] + [-x] \quad (پ)$$

۲) در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases} \quad (ب)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 1 \\ a & x = 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases} \quad (الف)$$

$$k(x) = ([x] - a)[x] \quad (ت)$$

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & 0 < x < 1 \\ [x] + a & x \geq 1 \end{cases} \quad (پ)$$

۳) نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a ، تابع زیر در $x=0$ پیوسته نیستند.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (ب)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ a & x = 0 \\ 2x+1 & x > 0 \end{cases} \quad (الف)$$

- ۴) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.
 ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه 2 و 3 ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.
 پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.

۵) تابع $f(x) = [x]$ در بازه $(2, k)$ پیوسته است. حداقل مقدار k چقدر است؟

۶) بازه بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x) = 2 - \sqrt{3-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

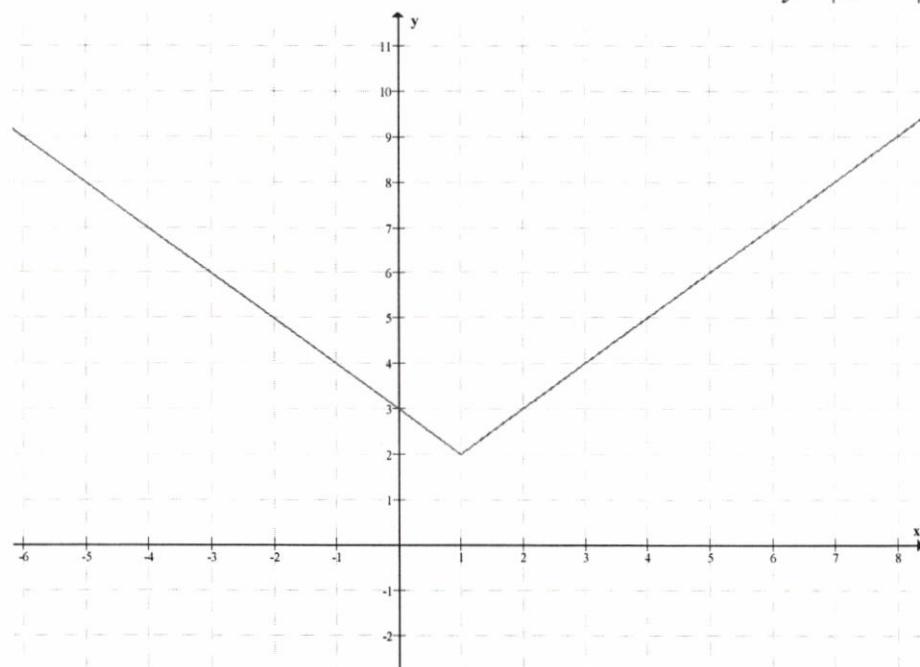
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & x > 0 \\ b-1 & x = 0 \\ x-2a & x < 0 \end{cases} \quad (۷)$$

۷) مقدار a و b را جنان تعیین کنید که تابع

حل کاردر کلاس صفحه‌ی ۱۵۱ (حسابان ۱)

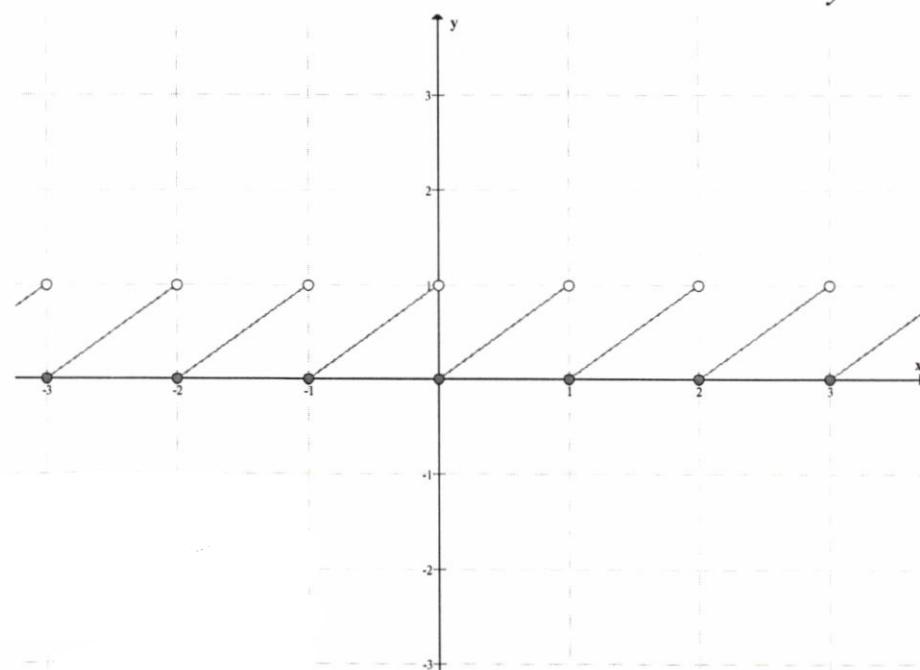
: ۱

$$y = |x - 1| + 2$$



تابع در تمام نقاط پیوسته است.

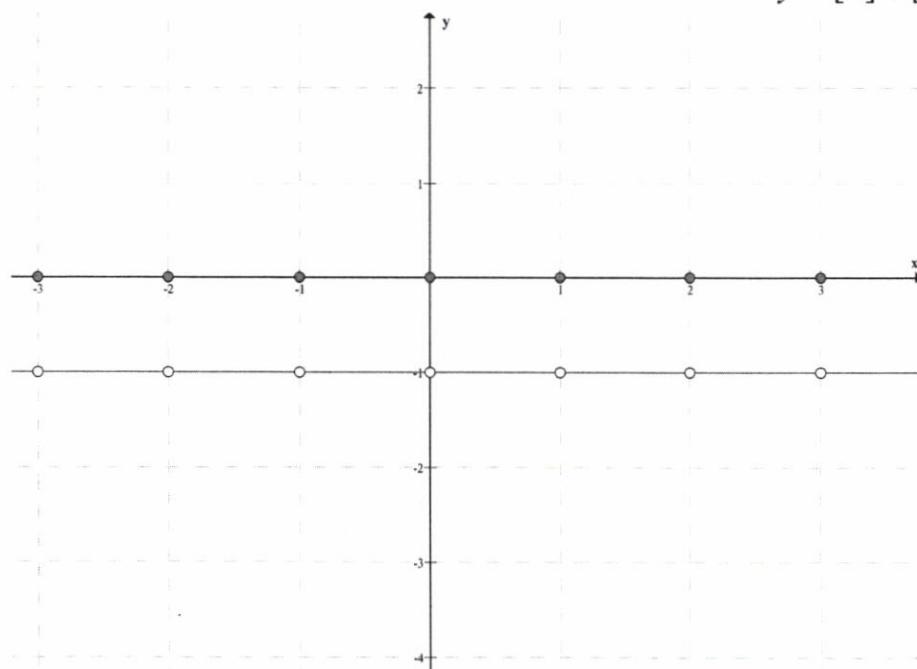
$$y = x - [x] \quad (\text{ب})$$



تابع در نقاط به طول صحیح پیوسته نیست ولی پیوستگی راست دارد.

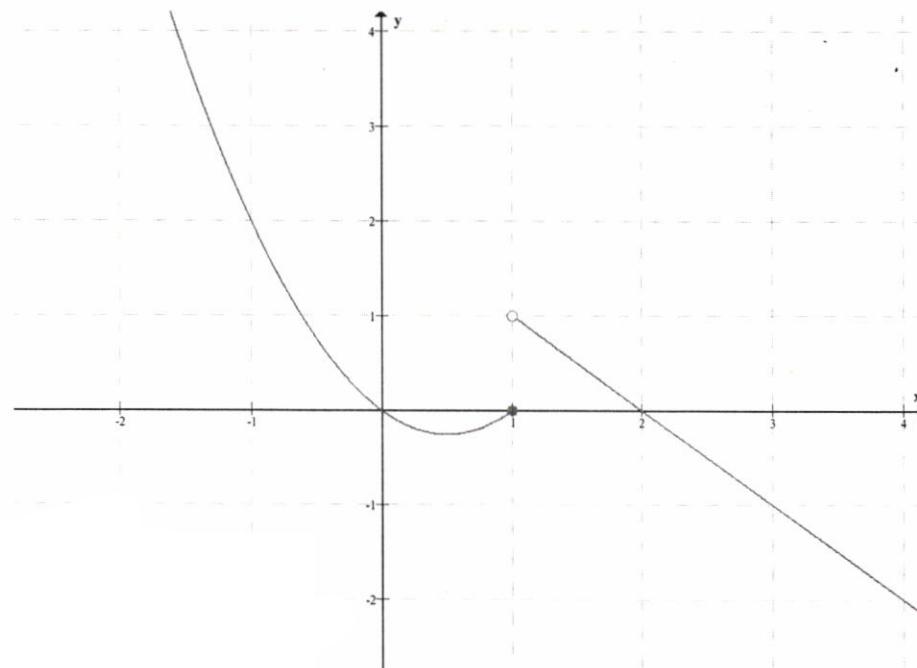
۱۵۱/۱

$$y = [x] + [-x] \quad (\text{پ})$$



تابع در نقاط با طول صحیح پیوسته نیست.

$$y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases} \quad (\text{ت})$$



تابع در نقطه‌ی $x = 1$ پیوسته نیست ولی پیوستگی چپ دارد.

۱۸۱،۲

: ۲

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2(1) - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -(1) + 2 = 1$$

$$f(1) = a$$

$$\rightarrow a = 1$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$$

$$g(1) = a$$

$$\rightarrow a = 3$$

(پ)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + a = 1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$h(1) = 1 + a$$

$$\rightarrow 1 + a = \frac{1}{2} \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

(س)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - a)[x] = (1-a)(1) = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ([x] - a)[x] = (0-a)[0] = 0$$

$$k(1) = (1-a)(1) = 1 - a$$

$$\rightarrow 1 - a = 0 \rightarrow a = 1$$

۱۸۱، ۳

: ۳

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2(0) + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$f(0) = a$$

برای پیوسته بودن باید (حد راست و چپ) یعنی، صفر و یک برابر شوند و چون این ممکن نیست پس هر مقدار که برای a در نظر گرفته شود، باز این تابع پیوسته نیست.

(ب)

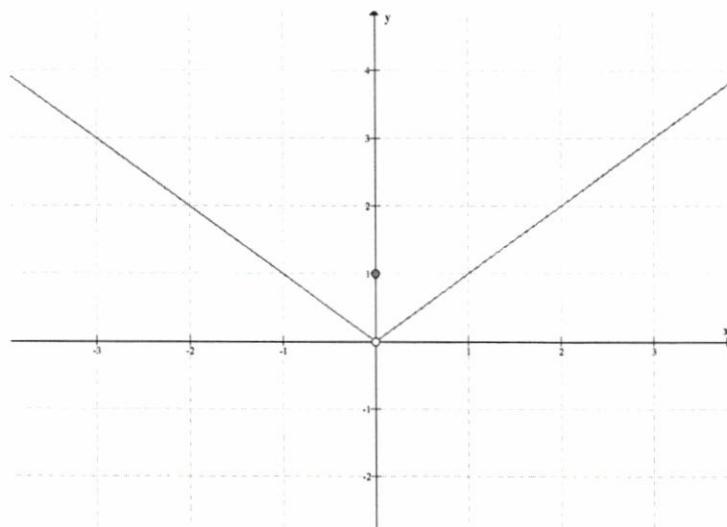
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{-x} = -a$$

$$g(0) = 1$$

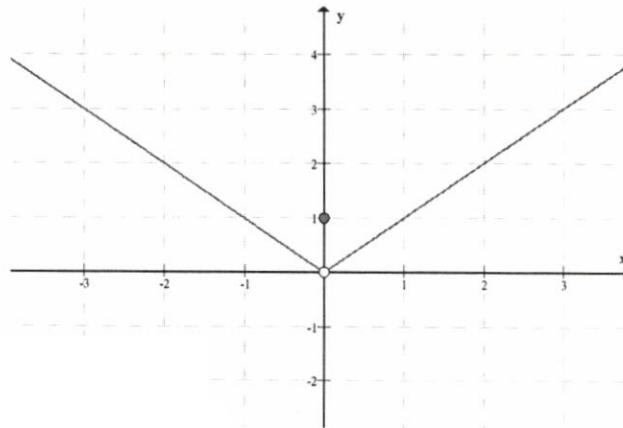
برای پیوسته بودن باید (حد راست و چپ و مقدار تابع در نقطه ۰) صفر برابر شوند. چون این ممکن نیست پس هر مقدار که برای a در نظر گرفته شود، باز این تابع پیوسته نیست.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{الف}: ۴)$$



۱۸۱، ۲

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & x \leq 2 \\ 3 & 2 < x < 3 \\ x-2 & x \geq 3 \end{cases}$$



$$f(x) = \frac{1}{|x|-2} \quad (\textcircled{b})$$

: ۵ باید $x > 3$ باشد.

: ۶

$$3-x \geq 0 \rightarrow x \leq 3$$

تابع در بازه‌ی $[-\infty, 3)$ پیوسته است.

: ۷

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+\cos(0)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2a) = -2a$$

$$f(0) = b-1$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2a = \frac{1}{2} \rightarrow a = -\frac{1}{4} \\ b-1 = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

۱۸۱، ۸



آکادمی کنکور دورخیز

www.dourkhiz.com



جزوه های درسی رایگان



گام به گام های درسی



نمونه سوال های امتحانی



مشاوره کنکور



برنامه ریزی درسی

ورود به سایت دورخیز



جهت دریافت برنامه ریزی خصوصی کلمه (رتبه برتر) را به شماره ۰۰۰۰۳۹۴۰ پیامک نمایید.