فصل

هندسه

سی و سه پل، اصفهان

انسان از بدو تولد ناگزیر به آشنایی با فضای هندسی و شکل‌های هندسی است و هندسه در طول تاریخ مشکل‌گشای او در جهت حل مسائل محیط پیرامونی‌اش بوده است. ساخت پل‌ها نمونه‌ای بارز از کارایی هندسه در زندگی روزمرهٔ انسان است.

درس اول ترسیم‌های هندسی

درس دوم استدلال و قضیهٔ تالس

درس سوم تشابه مثلث‌ها

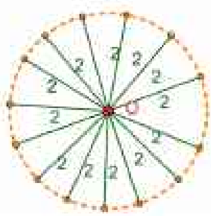
درس اوّل

ترسیم‌های هندسی

انسان از دیرباز برای حل بسیاری از مسائل خود از ترسیم‌های هندسی کمک گرفته است. فرض کنید بخواهیم زمینی مثلث شکل را تنها با کشیدن یک دیوار مستقیم به دو قسمت هم‌مساحت تقسیم نماییم. چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟

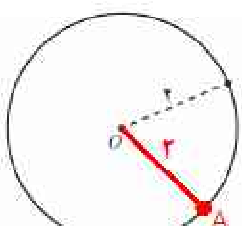
می توانیم ثابت کنیم که میانه ی هر مثلث آن مثلث را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کند . کافی است وسط یکی از ضلع های زمین را پیدا کنیم و به رأس مقابل آن با یک دیوار مستقیم وصل کنیم.

فعالیت



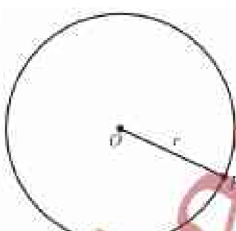
۱ یک نقطهٔ ثابت در صفحه، مانند O را درنظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ثابت ۲ سانتی‌متر از آن هستند درنظر بگیرید. این نقاط چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

این نقاط به شکل یک دایره هستند.



۲ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر بکشید و یک نقطهٔ دلخواه روی این دایره درنظر بگیرید. فاصلهٔ این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟

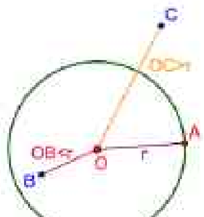
فاصله ی این نقطه تا مرکز دایره ۲ سانتی متر است.



نتیجه : دایره $C(O,r)$ (بخوانید دایره C به مرکز O و به شعاع r) را درنظر بگیرید. هر نقطه که از نقطهٔ O به فاصلهٔ r باشد ...روی.. دایره قرار دارد و هر نقطه که ...روی.. دایره قرار دارد از نقطهٔ O به فاصلهٔ r است.

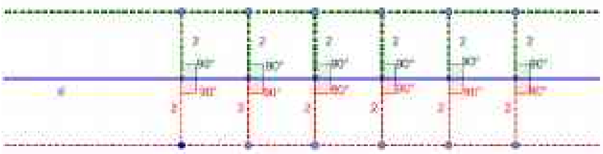
۳ مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد یک‌بار برای نقاط داخل دایره و یک‌بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به‌دست آورید.

یک دایره به شعاع ۲ سانتی متر به مرکز O در صفحه داریم اگر نقاطی در صفحه را به دست آوریم که فاصلهٔ آن ها از مرکز دایره کمتر از ۲ سانتی متر باشد بی شمار دایره به مرکز O داریم که درون دایرهٔ مفروض قرار دارندو در واقع تمام نقاطی که درون دایره هستند فاصله شان از مرکز دایره کمتر از ۲ سانتی متر است . اگر نقاطی در صفحه را به دست آوریم که فاصلهٔ آن ها از مرکز این دایره بیش از ۲ سانتی متر باشد باز بی شمار دایره به مرکز O داریم که شعاع آن ها بیشتر از ۲ خواهد بود و این نقاط بیرون دایره قرار دارند.



در حالت کلی اگر فاصله ی هر نقطه در صفحه ی دایره $C(O,r)$ از مرکز دایره کمتر از r باشد نقطه درون دایره است و اگر این فاصله بیشتر از r باشد این نقطه بیرون دایره است.

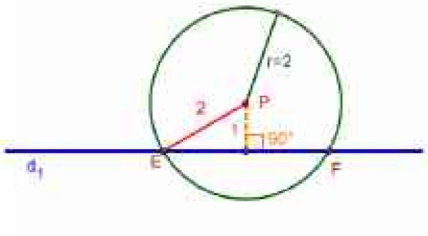
۴ خطی مانند d درنظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از خط d هستند مشخص نمایید. این نقاط چه شکلی یا شکل‌هایی را تشکیل می‌دهند؟



این نقاط به صورت دو خط موازی در دو طرف خط d قرار دارند.

۵ نقطهٔ P به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d_1 قرار دارد.

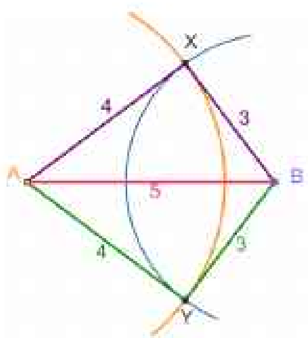
الف) تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ P هستند، مشخص کنید.



برای مشخص کردن این نقاط با توجه به نتیجه ی بند ۲ این فعالیت کافی است دایره ای به شعاع ۲ سانتی متر به مرکز P رسم کنیم.

ب) نقاطی از خط d_1 را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ P هستند، مشخص کنید.

محل برخورد این دایره با خط d_1 یعنی نقاط E و F جواب این مسئله هستند.

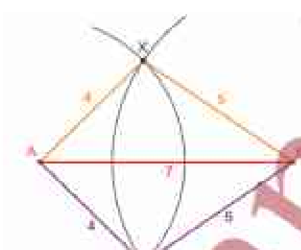


۶ نقاط A و B را به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی‌متر یک کمان رسم کنید و سپس به مرکز B و به شعاع ۳ سانتی‌متر کمانی دیگر رسم کنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کند.

الف) اندازهٔ اضلاع مثلث‌های AXB و AYB را مشخص کنید.

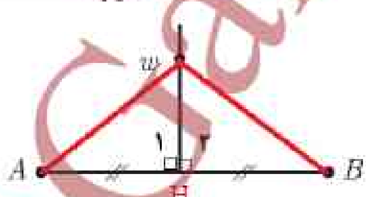
اضلاع مثلث روی شکل نمایش داده شده اند.

ب) توضیح دهید که چگونه می‌توانید مثلثی به طول ضلع‌های داده شدهٔ ۷ و ۵ و ۴ رسم کنید.



ابتدا پاره خطی به طول ۷ سانتی متر به نام AB رسم می کنیم . سپس به مرکز A (B) دایره ای به شعاع ۴ سانتی متر و دایره ای به مرکز B(A) به شعاع ۵ سانتی متر رسم می کنیم. این دو دایره یکدیگر را در نقاط X و Y قطع می کنند . از این دو نقطه به دو سر پاره خط AB وصل می کنیم مثلث های AXB و AYB جواب مسئله هستند.

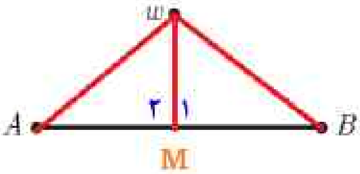
برخی خواص عمود منصف و ترسیم آن



۱ــ در شکل مقابل پاره خط AB و عمودمنصف آن مشخص شده‌اند. نقطه‌ای دلخواه مانند W روی عمودمنصف AB درنظر بگیرید و نشان دهید W از دوسرِ AB به یک فاصله است.

$$\left.\begin{array}{l} AH = BH \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \\ WH = WH \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{W}H \cong B\overset{\Delta}{W}H \Rightarrow AW = BW$$

نتیجه۱ : هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.



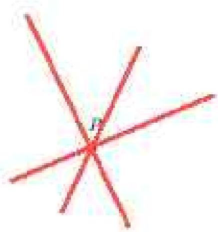
۲ــ پاره‌خط AB و نقطهٔ W مانند شکل مقابل به‌گونه‌ای قرار دارند که W از دوسر AB به‌یک فاصله است (یعنی $AW=BW$). نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.
(**راهنمایی**: از W به A و B و به وسط AB وصل نمایید و با استفاده از همنهشتی مثلث‌ها نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.)

دو مثلث AMW و BMW به حالت (ض ض ض) با هم همنهشت هستند. پس بنا بر اجزای متناظر $M_1 = M_2 = 90^\circ$ بنا براین W روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.

نتیجهٔ ۲ : هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به فاصلهٔ یکسان باشد روی عمود منصف آن پاره خط است.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد ازدوسر آن پاره خط به یک فاصله و **هر نقطه** که ازدوسر پاره خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

فعالیت کلاسی



۱ نقطهٔ P در صفحه مشخص شده است. چند خط می‌توانید بکشید که از نقطهٔ P عبور نمایند؟

بی شمار خط از نقطه ی P می توان رسم کرد.

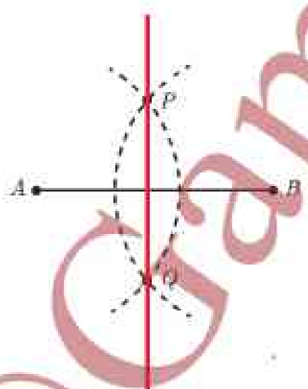
۲ دو نقطهٔ A و B در صفحه مشخص شده‌اند. چند خط متمایز می‌توانید بکشید که از هر دو نقطهٔ A و B عبور نمایند.

بی شمار خط می توان رسم کرد که بر هم منطبق می شوند و ما آن ها را یکی در نظر می گیریم.

۳ به‌نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن را باید داشته باشیم؟

برای مشخص شدن یک خط کافی است دو نقطه از آن خط را داشته باشیم.

رسم عمود منصف یک پاره‌خط داده شده



می‌خواهیم عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم.

۱ــ دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار به مرکز نقطهٔ A و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز B کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند P و Q قطع کنند.

۲ــ آیا نقاط P و Q نقاطی متعلق به عمودمنصف AB هستند؟ چرا؟

بله فاصله ی این دو نقطه از دو سر پاره خط یکسان است (شعاع های دایره اند) پس نتیجه می گیریم AB قرار دارند.

۳ــ آیا با داشتن نقاط P و Q می‌توان عمودمنصف AB را مشخص کرد؟ چرا؟

بله اگر دو نقطه از خطی معلوم باشد می توان آن خط را مشخص کرد.

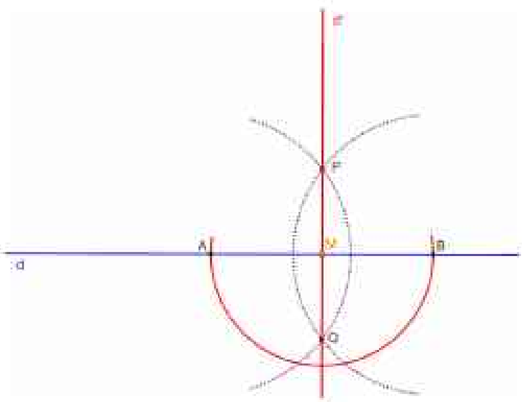
۴ــ حال عمودمنصف AB را رسم نمایید.

خط PO همان عمود منصف پاره خط AB است .

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

خط d و نقطهٔ M روی آن مانند شکل مشخص شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱ــ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d بیابید به‌طوری که نقطهٔ M وسط A و B باشد.



برای این منظور کافی است به مرکز M و شعاع دلخواه کمانی رسم کنیم طوری

این کمان خط d رادر دو نقطه قطع می کند. این دو نقطه را A و B می نامیم .

چون A و B روی دایره به مرکز M هستند پس M وسط آن ها است .

۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم نمایید.

با استفاده از روش رسم عمود منصف که قبلا توضیح داده شده است رسم

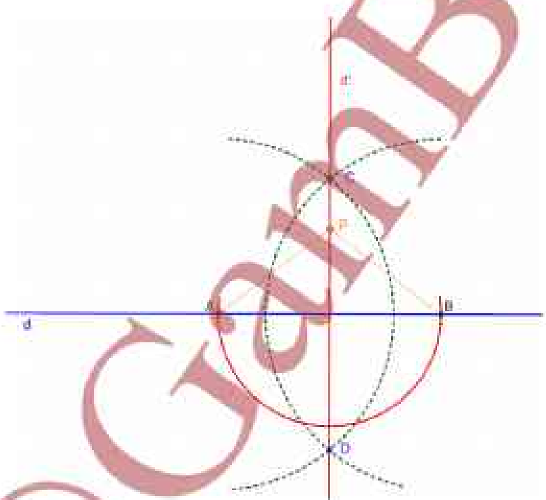
می کنیم.

۳ــ عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d ..عمود است و از نقطهٔ .M می‌گذرد.

رسم خط عمود بر یک خط، از یک نقطهٔ غیر واقع بر آن

خط d و نقطهٔ P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱ــ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d به‌گونه‌ای بیابید که از نقطهٔ P به یک فاصله باشند.



برای این کار دایره ای به مرکز P و شعاع بیش از فاصله ی P از خط d رسم می کنیم تا خط رادر دونقطه ی A و B قطع کند . واضح است که فاصلهٔ P که مرکز دایره است از A و B به یک اندازه است.

۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم نمایید.

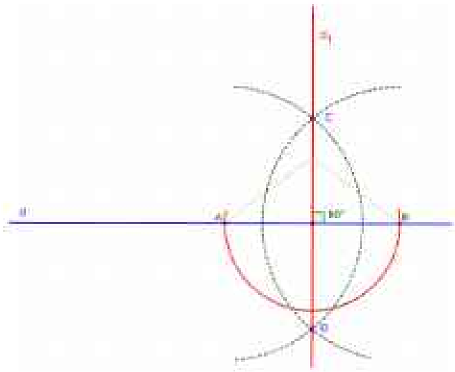
عمود منصف AB را به روشی که قبلا توضیح داده شده رسم می کنیم.

۳ــ آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطهٔ P می‌گذرد؟ چرا؟

بله زیرا هر نقطه که روی عمود منصف AB باشد از دو سر این پاره خط به یک فاصله است و بالعکس و چون فاصله ی نقطه ی P از دو نقطه ی A و B به یک فاصله است پس P نیز روی عمود منصف AB قرار دارد.

عمودمنصف پاره‌خط AB بر خط d ..عمود است. و از نقطهٔ .P. .می‌گذرد .

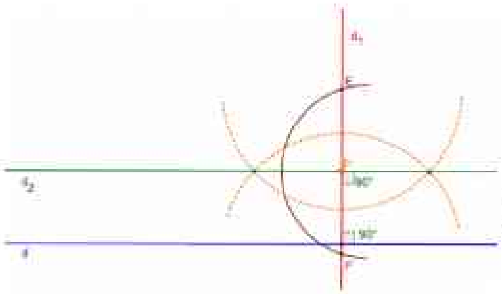
رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطهٔ غیر واقع بر آن



خط d و نقطهٔ P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و با خط d موازی باشد.

۱ــ خط d_1 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

به روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ی خارج آن از نقطه ی P خط d_1 را عمود بر خط d رسم می کنیم.



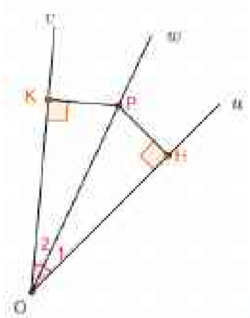
۲ــ خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

به روش رسم خطی عمود بریک خط از نقطه ای روی خط خط d_2 را عمود بر خط d_1 رسم می کنیم .

۳ــ خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب درنظر بگیرید)

خط d_2 موازی خط d است . دو خط عمود بر یک خط باهم موازی هستند.

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

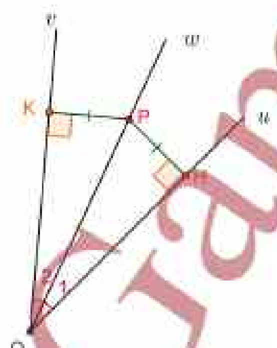


۱ــ در شکل مقابل نیم‌خط Ow نیمساز زاویهٔ vOu است. فرض کنید P یک نقطهٔ دلخواه روی Ow باشد. ثابت کنید فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ vOu یکسان است. (یعنی اگر از نقطهٔ P عمودهایی بر Ov و Ou رسم کنیم، طول آنها باهم برابر است.)

دو مثلث $\overset{\Delta}{OHP}$ و $\overset{\Delta}{OKP}$ به حالت وتر ویک زاویه حاده با هم همنهشت هستند.

پس بنا بر اجزای متناظر نتیجه می گیریم که $PH = PK$.

> **نتیجه۱ :** هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است



۲ــ در شکل مقابل فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ vOu یکسان است. نشان دهید که نقطهٔ P روی نیمساز زاویه قرار دارد.

(**راهنمایی :** پاره‌خط OP را و دو عمود از نقطهٔ P بر Ou و Ov رسم کنید و با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید OP همان نیمساز زاویهٔ uOvاست.)

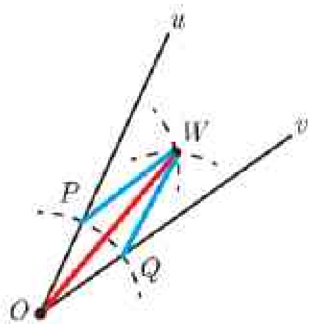
دو مثلث $\overset{\Delta}{OHP}$ و $\overset{\Delta}{OKP}$ به حالت وتر ویک ضلع زاویه قائمه با هم همنهشت هستند.

پس بنا بر اجزای متناظر نتیجه می گیریم که $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ پس نقطه ی P روی نیمساز زاویه است .

نتیجه ۲ : هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصلهٔ یکسان باشد روی
نیمساز آن زاویه قرار دارد.

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم : هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی ..... نیمساز ..... آن زاویه قرار دارد.

۳ــ رسم نیمساز یک زاویه



الف) زاویهٔ uOv را درنظر بگیرید. به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم‌خط های Ou و Ov را در نقاطی مانند P و Q قطع کند.

ــ طول پاره‌خط های OP و OQ نسبت به هم چگونه‌اند؟

با هم برابرند زیرا شعاع های دایره هستند.

ب) دهانهٔ پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره‌خط PQ باز کرده و یک بار به مرکز P و بار دیگر به مرکز Q کمانی رسم کنید تا دو کمان مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند. طول پاره‌خط های PW و QW نسبت به هم چگونه‌اند.

باهم برابرند زیرا شعاع های دایره اند.

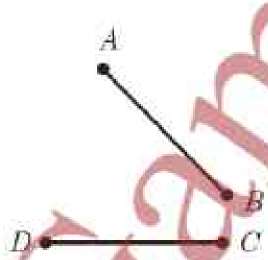
پ) پاره‌خط‌های WP، WO و WQ را رسم نمایید. دو مثلث OPW و OQW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

باهم همنهشت هستند به حالت (ض ض ض)

ــ اندازهٔ زاویه‌های POW و QOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

این دو زاویه بنا بر اجزای متناظر باهم برابر می شوند.

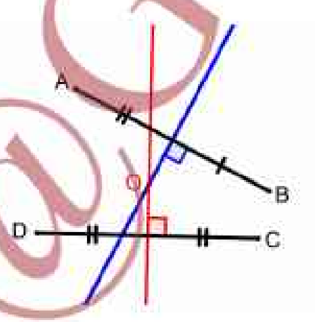
ــ پاره‌خط OW ..... نیمساز ..... زاویهٔ uOv است.

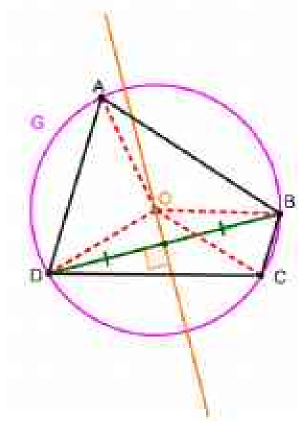


تمرین

۱ الف) دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطهٔ D و C نیز به یک فاصله باشد.

بنا بر خاصیت عمود منصف نقطه ای اکه از دو نقطه ی A و B به یک فاصله باشد روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد و همچنین نقطه ای که از دو نقطه ی D و C فاصله ثابت دارد روی عمود منصف پاره خط CD قرار دارد.بنا براین جواب مسئله محل برخورد این دو عمود منصف است .





ب) نقطهٔ موردنظر در قسمت (الف) را O می‌نامیم. اگر نقطهٔ O روی عمود منصف پاره‌خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رئوس چهارضلعی $ABCD$ نسبت به دایرهٔ G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

با توجه به بند (الف) :

نقطهٔ O روی عمود منصف AB است بنابراین : OA=OB (۱)

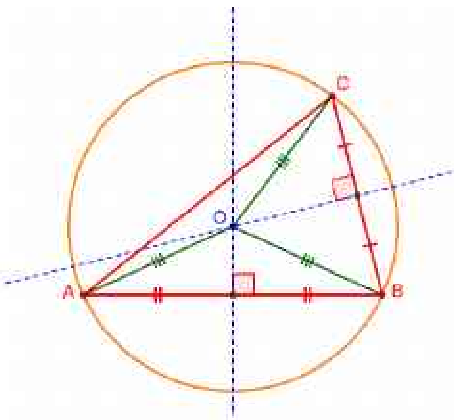
نقطهٔ O روی عمود منصف CD است بنابراین : OC=OD (۲)

و با توجه به فرض قسمت (ب) نقطهٔ O روی عمود منصف BC است بنابراین : OC=OB (۳)

از رابطه های (۱) و (۳) نتیجه می گیریم که : OA=OC (۴)

از رابطه ی (۴) و رابطهٔ (۲) نتیجه می گیریم که OA=OB=OC=OD

بنا براین فاصله ی نقاط B ، C و D از نقطه ی O برابر شعاع دایره OA است پس این نقاط روی دایره قرار دارند.



۲ مثلثی دلخواه رسم کنید و آنرا ABC بنامید. عمودمنصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

نقاط B و C روی این دایره اند زیرا :

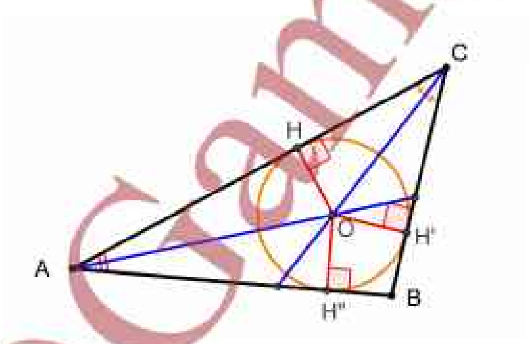
نقطه ی O روی عمود منصف ضلع BC است بنا براین OB=OC (۱)

نقطه ی O روی عمود منصف ضلع AB است بنا براین OA=OB (۲)

از رابطه های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که : OA=OC=OB پس نقاط B و C نیز باید روی دایره به شعاع OA باشند.

نکته: این دایره ،دایرهٔ **محیطی** مثلث نام دارد و با توجه به مطالب فوق هر مثلث حتما یک دایره ی محیطی دارد.مرکز این دایره محل برخورد عمود منصف های مثلث است و شعاع آن فاصله ی این نقطه از رأس های مثلث است.

۳ مثلثی دلخواه رسم کنید و آنرا ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویهٔ این مثلث را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را O بنامید. از نقطهٔ O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟



اضلاع مثلث در پای عمود ها بر دایره مماس هستند.

نقطه ی O روی نیمساز زاویه A است پس "OH=OH (۱)

نقطه ی O روی نیمساز زاویه C است پس 'OH=OH (۲)

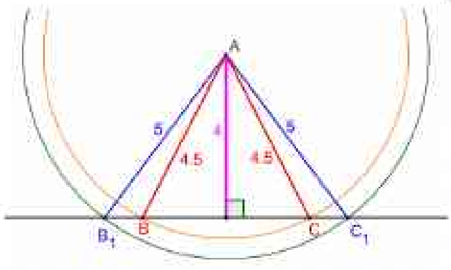
از رابطه های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که : "OH'=OH

بنا براین OH'=OH"=OH پس نقاط "H و 'H هم روی این دایره قرار دارند و اگر شعاع در نقطه ی تماس با خطی ، بر آن عمود باشد با آن مماس است. پس اضلاع مثلث در این نقاط بر دایره مماس هستند.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

نکته : این دایره ، دایرهٔ **محاطی** مثلث نام دارد و با توجه به مطالب فوق هر مثلث حتما یک دایرهٔ محاطی داخل دارد.که مرکز آن نقطه برخورد نیمساز های داخلی است. و شعاع آن برابر با فاصله ی این نقطه از اضلاع مثلث است.

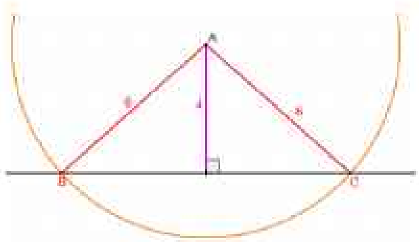
۴ فرض کنید نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.



الف) مثلثی متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد.

چون می خواهیم مثلث ABC متساوی الساقین باشد به طوری که AB=AC و ضلع BC روی خط d باشد ، پس باید نقاط B و C به فاصله ای مساوی از A و روی خط d باشند.

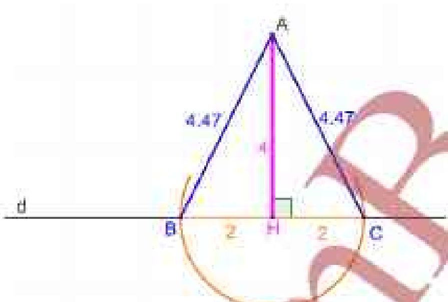
اگر بخواهیم این نقاط از نقطه ی A به یک فاصله باشند باید به مرکز A و شعاع دلخواه دایره رسم کنیم ولی چون می خواهیم که این نقاط روی خط d هم باشند بنا براین شعاع این دایره باید بزرگ تر از ۴ سانتی متر باشد زیرا در غیر اینصورت این دایره خط d را در دو نقطه قطع نمی کند.



نکته : می توان بی شمار مثلث متساوی الساقین با این روش رسم کرد.

ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد.

برای این منظور کافی است به مرکز A و شعاع ۶ سانتی متر که از ۴ بزرگ تر است دایره ای رسم کنیم این دایره خط d را در نقاط B و C قطع می کند و مثلث ABC جواب مسئله است .



پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن $8cm^2$ باشد.

طول ارتفاع ۴ سانتی متر است پس طول قاعده نظیر را می توان حساب کرد .

$$s=\frac{1}{2}AH\times BC \Rightarrow 8=\frac{1}{2}\times 4\times BC \Rightarrow BC=4$$

می دانیم در هر مثلث متساوی الساقین ارتفاع و میانه بر هم منطبق هستند.بنا براین پای ارتفاع یعنی نقطهٔ H وسط BC است. پس به مرکز H و شعاع نصف BC (۲ سانتی متر) کمان می زنیم تا نقاط B و C به دست آیند سپس از A به این دو نقطه وصل می کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است .

درس دوم

استدلال و قضیه تالس

نسبت و تناسب

در پایه‌های قبل با دو مفهوم نسبت و تناسب و برخی خواص ابتدایی آنها آشنا شده‌اید. می‌دانیم که هر دو **نسبت** مساوی یک **تناسب** تشکیل می‌دهند.

می‌دانیم که اگر یک مقدار ثابت را با دوطرف یک تساوی جمع و یا تفریق کنیم، تساوی دوباره برقرار خواهد بود. همچنین اگر دوطرف یک تساوی را در یک مقدار ضرب کنیم یا به یک مقدار غیرصفر تقسیم نماییم، تساوی برقرار می‌ماند. با توجه به این مطلب هریک از خواص زیر را به راحتی می‌توان ثابت کرد.

کار در کلاس

۱ با فرض اینکه تمام مخرج‌ها مخالف صفرند و با توجه به نکات گفته شده در بالا هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc$ (طرفین وسطین)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow[bd\neq 0]{\times bd} \cancel{b}d\times\frac{a}{\cancel{b}} = b\cancel{d}\times\frac{c}{\cancel{d}} \Rightarrow ad=bc$$

ب) $ad=bc \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (تبدیل حاصل‌ضرب به تناسب)

$$ad=bc \xrightarrow[bd\neq 0]{\div bd} \frac{a\cancel{d}}{b\cancel{d}}=\frac{\cancel{b}c}{\cancel{b}d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

پ) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (معکوس کردن تناسب)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc \xrightarrow[ac\neq 0]{\div ac} \frac{\cancel{a}d}{\cancel{a}c}=\frac{b\cancel{c}}{a\cancel{c}} \Rightarrow \frac{d}{c}=\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

ت) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a}=\frac{d}{b} \\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \end{cases}$ (تعویض جای طرفین یا وسطین)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc \begin{cases} \xrightarrow[ab\neq 0]{\div ab} \frac{\cancel{a}d}{\cancel{a}b}=\frac{\cancel{b}c}{a\cancel{b}} \Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{d}{b} \\ \xrightarrow[cd\neq 0]{\div cd} \frac{a\cancel{d}}{c\cancel{d}}=\frac{b\cancel{c}}{\cancel{c}d} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \end{cases}$$

ث) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}\end{cases}$ (ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)

راهنمایی : در قسمت (ث) برای اثبات اولین تناسب به دو طرف تساوی عدد ۱ را اضافه کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس نمایید، سپس به دو طرف عدد ۱ را اضافه کنید.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{a+d}{d}\\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1\Rightarrow\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}\Rightarrow\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}\end{cases}$$

ج) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\\ \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}\end{cases}$ (تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)

راهنمایی : در قسمت (ج) برای اثبات اولین تناسب از دو طرف تساوی عدد ۱ را کم کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس کرده، سپس از دوطرف عدد ۱ را کم کنید.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{a-d}{d}\\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{b}{a}-1=\frac{d}{c}-1\Rightarrow\frac{b-a}{a}=\frac{c-d}{c}\Rightarrow\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}\end{cases}$$

۲ با توجه به خواص اثبات شده در ۱ موارد زیر را کامل کنید.

الف) $\frac{۵}{۱۴}=\frac{۱۵}{۴۲}\Rightarrow ۵\times ۴۲=۱۵\times ۱۴$

ب) $۳\times ۴۰=۱۲\times ۱۰\Rightarrow\frac{۳}{۱۰}=\frac{۱۲}{۴۰}$

پ) $\frac{۷}{۱۰}=\frac{۲۱}{۳۰}\Rightarrow\frac{۱۰}{۷}=\frac{۳۰}{۲۱}$

ت) $\frac{۶}{۱۱}=\frac{۱۸}{۳۳}\Rightarrow\frac{۶}{۱۸}=\frac{۱۱}{۳۳}$ ، $\frac{۳۳}{۱۱}=\frac{۱۸}{۶}$

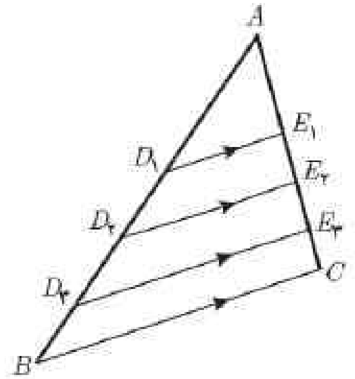
ث) $\frac{۴}{۱۴}=\frac{۱۰}{۳۵}\Rightarrow\frac{۱۸}{۱۴}=\frac{۴۵}{۳۵}$ ، $\frac{۴}{۱۸}=\frac{۱۰}{۴۵}$

ج) $\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱۰}{۲۴}\Rightarrow\frac{-۷}{۱۲}=\frac{-۱۴}{۲۴}$ ، $\frac{۵}{-۷}=\frac{۱۰}{-۱۴}$

استدلال، قضیهٔ تالس و تعمیم آن

در شکل مقابل داریم: $D_1E_1||BC$ و $D_2E_2||BC$ و $D_3E_3||BC$. این اطلاعات را می‌توان به این صورت نشان داد: $D_iE_i||BC$ برای $1 \leq i \leq 3$

ـ اندازهٔ پاره‌خط‌های زیر را با خط‌کش مشخص کرده و در کسرها جایگزین کنید و نسبت‌های برابر در ستون‌های متمایز را مشخص نمایید.

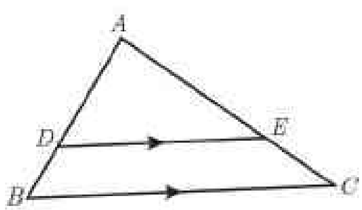


$\frac{AD_1}{D_1B} = \frac{1/6}{2/4}$ $\frac{AE_1}{E_1C} = \frac{1}{1/5}$

$\frac{AD_2}{D_2B} = \frac{2/4}{1/6}$ $\frac{AE_3}{E_3C} = \frac{2}{0/5}$

$\frac{AD_3}{D_3B} = \frac{3/2}{0/8}$ $\frac{AE_2}{E_2C} = \frac{1/5}{1}$

ـ اگر پاره‌خط DE مانند شکل روبه‌رو موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، حدس می‌زنید نسبت کدام پاره‌خط‌ها با هم برابر باشند؟



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{DC}$$

آیا می‌توان نتیجه گرفت اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود، همواره تساوی مشابه بالا برقرار است؟

خیر نمی توان به طور قطع نتیجه گرفت .

در سال‌های قبل دیدید که نمی‌توان به درست بودن نتیجه‌ای که بر اساس مشاهدهٔ چند مورد به‌دست آمده باشد، مطمئن بود.

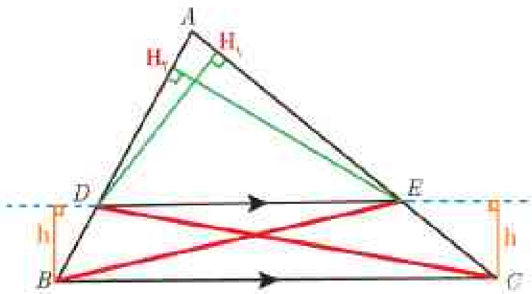
این نوع از استدلال که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود؛ یعنی «از جزء به کل می‌رسیم»، **استدلال استقرایی** نامیده می‌شود.

استدلال استنتاجی، استدلالی است که بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، بیان می‌شود.

در ریاضیاتی که تاکنون خوانده‌اید، با مواردی از استدلال‌های استنتاجی مواجه شده‌اید. در ادامه با استدلال استنتاجی، نتیجه‌ای را که با استدلال استقرایی به‌دست آوردیم، ثابت خواهیم کرد.

قضیهٔ تالس

فعالیت



فرض کنید مانند شکل مقابل پاره‌خط DE موازی ضلع BC باشد.

می‌خواهیم نشان دهیم : $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

۱ از نقطهٔ D به C و از E به B وصل کنید. مساحت‌های مثلث‌های DEC و DEB که آنها را با S_{DEC} و S_{DEB} نشان می‌دهیم، با هم برابرند. چرا؟

ارتفاع های نظیر قاعدهٔ DE را در دو مثلث DEC و DEB رسم می کنیم . با توجه به شکل می دانیم که فاصلهٔ بین دو خط موازی مقداری ثابت است پس طول ارتفاع ها باهم برابرند.

$$\left.\begin{array}{l} S_{DEC}=\frac{۱}{۲}h.DE \\ S_{DEB}=\frac{۱}{۲}h.DE \end{array}\right\} \Rightarrow S_{DEC}=S_{DEB}$$

۲ از نقطهٔ E به ضلع AB عمود کنید و پای عمود را $H_۱$ بنامید. سپس از D به ضلع AC عمود کنید و پای عمود را $H_۲$ بنامید.

۳ $$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{\frac{۱}{۲}EH_۱\times AD}{\frac{۱}{۲}EH_۱\times DB}=\frac{AD}{DB}$$

۴ $$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}=\frac{\frac{۱}{۲}DH_۲\times AE}{\frac{۱}{۲}DH_۲\times EC}=\frac{AE}{EC}$$

۵ از (۱) و (۳) و (۴) نتیجه می‌شود $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. چرا؟

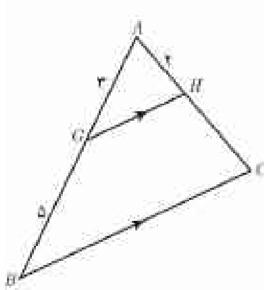
$$\left.\begin{array}{l} \frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{AD}{DB} \\ \frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}=\frac{AE}{EC} \end{array}\right\} \xrightarrow{S_{DEB}=S_{DEC}} \left.\begin{array}{l} \frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{AD}{DB} \\ \frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{AE}{EC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آیند، **قضیه** نامیده می‌شوند.

نتیجهٔ بالا قضیه‌ای از تالس[1] است. همان‌گونه که مشاهده کردید، رابطهٔ بین طول‌های پاره‌خط‌هایی را که توسط خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، بر دو ضلع دیگر آن مثلث به‌وجود می‌آید، بیان می‌کند.

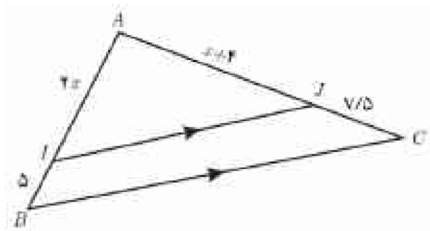
۱ــ فیلسوف و ریاضی‌دان که حدود ۶۲۳ سال قبل از میلاد در نواحی غرب ترکیهٔ امروزی به دنیا آمد. اثبات بسیاری از قضایای مهم هندسی را به او نسبت داده‌اند.

کار در کلاس



۱ در شکل پاره‌خط‌های GH و BC موازی‌اند. اندازهٔ پاره‌خط‌های AC و HC را به دست آورید.

$$\frac{AG}{GB}=\frac{AH}{HC}\Rightarrow\frac{۳}{۵}=\frac{۲}{HC}\Rightarrow HC=\frac{۱۰}{۳}$$

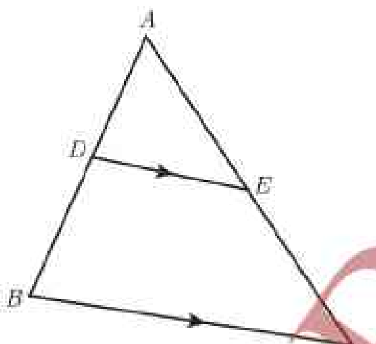


۲ با تشکیل یک معادله، مقدار x و اندازهٔ پاره‌خط‌های AI و AJ را به دست آورید.

$$\frac{AI}{IB}=\frac{AJ}{JC}\Rightarrow\frac{۲x}{۵}=\frac{x+۴}{۷/۵}\Rightarrow ۱۵x=۵x+۲۰\Rightarrow ۱۰x=۲۰\Rightarrow x=۲$$

تعمیم قضیهٔ تالس

فعالیت



۱ در شکل مقابل $DE \parallel BC$.

الف) تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید.

$$DE\parallel BC\Rightarrow\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

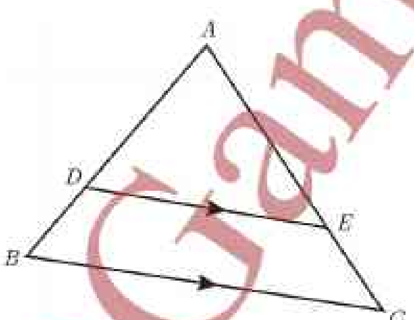
ب) به کمک ترکیب نسبت در مخرج تناسب $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{AD}{DB+AD}=\frac{AE}{EC+AE}\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

پ) به کمک تفضیل نسبت در صورت از تناسب به‌دست آمده در (ب) تناسب $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{AD-AB}{AB}=\frac{AE-AC}{AC}\Rightarrow\frac{-DB}{AB}=\frac{-EC}{AC}\Rightarrow\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$$

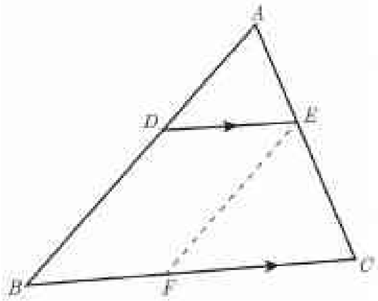
توجه کنید که تناسب‌های به‌دست آمده در (ب) و (ج) صورت‌های دیگر قضیهٔ تالس‌اند.



۲ در مثلث ABC پاره‌خط DE موازی ضلع BC است. ابتدا تناسبِ قضیهٔ تالس را بنویسید. سپس با توجه به ویژگی‌های تناسب و تکمیل تساوی‌های زیر، تناسب‌های دیگری را از قضیهٔ تالس نتیجه بگیرید.

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\begin{cases}\frac{DB}{DA}=\frac{EC}{AE} & \frac{BD}{BA}=\frac{EC}{CA} \quad \frac{AB}{BD}=\frac{CA}{CE}\\ \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} & \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}\end{cases}$$

۳



الف) در شکل پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند. با توجه به قضیهٔ تالس داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

ب) پاره‌خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم. بنابراین داریم: $\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}$

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}$

ت) چهارضلعی $DEFB$ چه نوع چهارضلعی‌ای است؟

بنابه فرض $DE \parallel BF$ و $DB \parallel EF$ پس بنا به تعریف چهارضلعی $DEFB$ متوازی الاضلاع است.

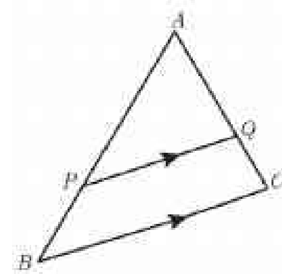
پاره‌خط BF با کدام پاره‌خط برابر است؟ $BF=DE$

ث) با توجه به قسمت‌های (ج) و (د) داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

این رابطه تعمیم قضیهٔ تالس است.

کار در کلاس

در شکل پاره‌خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.



الف) $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}=\frac{PQ}{BC}$ ☒

ب) $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}$ ☑

پ) $\frac{PB}{AP}=\frac{QC}{AC}$ ☒

ت) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}=\frac{PQ}{BC}$ ☒

ث) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}$ ☑

ج) $\frac{AB}{AP}=\frac{AC}{AQ}=\frac{BC}{PQ}$ ☑

اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، آنچه حاصل می‌شود، «عکس قضیه» است. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

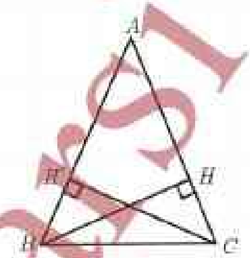
در مثال‌های زیر قضیه و عکس آن آمده است.

مثال ۱:

قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه: اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال ۲ :



قضیه : اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

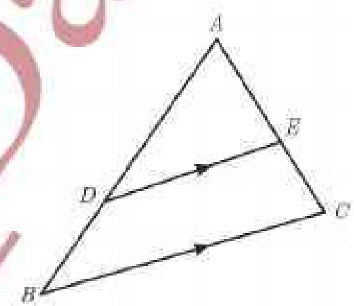
فرض: $AB=AC$

حکم: $BH=CH'$

عکس قضیه : اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH=CH'$

حکم: $AB=AC$



مثال ۳ : در قضیهٔ تالس فرض و حکم به صورت زیر است.

فرض: $DE \parallel BC$

حکم: $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$

با توجه به آنچه گفته شد، فرض و حکم عکس قضیهٔ تالس را بنویسید.

فرض: $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$

حکم: $DE \parallel BC$

به عبارت دیگر عکس قضیه تالس می گوید هرگاه پاره‌خط DE مانند شکل پاره‌خط‌های AB و AC را به گونه‌ای قطع کرده باشد که داشته باشیم $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$، در این صورت پاره‌خط DE موازی پاره‌خط BC است. به نظر شما عکس قضیه تالس درست است یا نه؟ کمی بعد به بررسی این مسئله خواهیم پرداخت.

معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض با حکم جابه‌جا می‌شود و قسمت‌هایی از فرض ممکن است هم در قضیه و هم درعکس آن ثابت باشند؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC هم در خود قضیه و هم در عکس آن جزء مفروضات است.

برهان خلف

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی از آن استفاده می‌شود، **برهان غیرمستقیم** یا **برهان خلف** است. در برهان خلف به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجهٔ غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

مسئله: A (فرض) $\Rightarrow B$ (حکم)

اثبات به روش برهان خلف :

$$\left.\begin{array}{r}A \text{ درست} \\ \text{و} \\ B \text{ نادرست}\end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow}_{\text{استدلال، منطق و حقایق}}$$

① A درست نیست

② تناقض منطقی

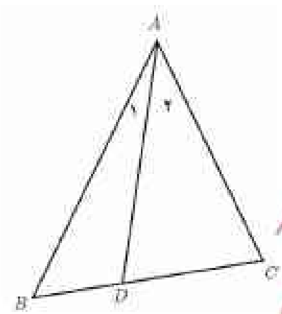
پس نتیجه می‌گیریم حکم B درست است، زیرا در صورت نادرستی B طبق استدلال فوق به یکی از نتایج ۱ یا ۲ می‌رسیم که هیچ‌کدام نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

مثال : اگر $n\in \mathbb{N}$ و n^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز عددی فرد است.

حل :

با استفاده از برهان خلف فرض کنیم حکم مسئله نادرست باشد؛ یعنی n عددی فرد نباشد؛ بنابراین n عددی زوج خواهد بود و می‌توان نوشت $n=2k$ به‌طوری که k یک عدد طبیعی باشد.

بنابراین $n^2=4k^2=2(2k^2)$ که عددی زوج است و با فرض مسئله در تناقض است؛ لذا از ابتدا n نمی‌توانست عددی زوج باشد.



مثال : فرض کنیم AD نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq DC$ باشد، آن‌گاه $AB \neq AC$.

حل :

با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد.

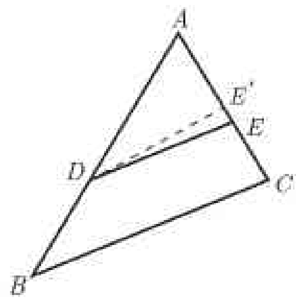
بنابراین داریم $AB = AC$ (فرض خلف) در این صورت خواهیم داشت $A\overset{\Delta}{B}D \cong A\overset{\Delta}{C}D$ (چرا؟). از این هم‌نهشتی نتیجه خواهد شد $BD = DC$ است، که با فرض مسئله در تناقض است. لذا از ابتدا فرض $AB = AC$ نادرست بوده است، بنابراین $AB \neq AC$ است.

پاسخ چرا :

$$\left.\begin{array}{l}AB = AC \ \text{(فرض خلف)} \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \\ AD = AD\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} A\overset{\Delta}{B}D \cong A\overset{\Delta}{C}D$$

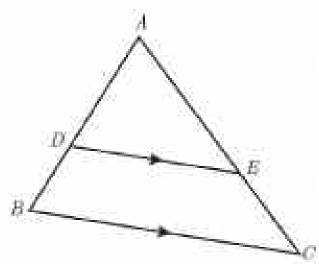
حال می‌خواهیم با استفاده از برهان خلف درستی عکس قضیهٔ تالس را ثابت کنیم.

عکس قضیهٔ تالس : مانند شکل مقابل در مثلث ABC، اگر $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$، آن‌گاه $DE \| BC$.



اثبات : با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم مسئله غلط باشد؛ یعنی $DE \nparallel BC$. لذا از نقطهٔ D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه‌ای مانند E' قطع کند. طبق قضیهٔ تالس داریم $\frac{AE'}{E'C}=\frac{AD}{DB}$ و از مقایسه با فرض مسئله خواهیم داشت $\frac{AE}{EC}=\frac{AE'}{E'C}$. حال با ترکیب نسبت در مخرج داریم $\frac{AE}{AC}=\frac{AE'}{AC}$ و در نتیجه $AE=AE'$. این یعنی نقطهٔ E بر E' منطبق است و لذا DE' همان DE است و این یک تناقض است، زیرا $DE' \| BC$ و $DE \nparallel BC$ است. بنابراین از ابتدا فرض غلط بودن حکم نادرست بوده است و حکم نمی‌تواند غلط باشد، یعنی $DE \| BC$ است.

قضیه‌های دو شرطی



همان‌گونه که دیدیم، قضیهٔ تالس و عکس آن هر دو درست‌اند؛ بنابراین برای مثلثی مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ در شکل مقابل می‌توان هر دوی آنها را به‌صورت زیر بیان کرد :

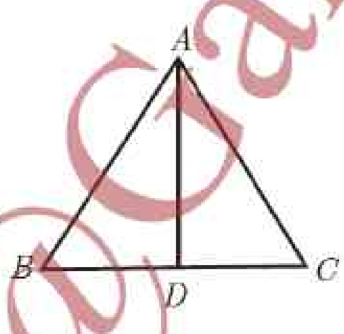
اگر $DE \| BC$، آن‌گاه $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را قضیه‌های **دو شرطی** می‌نامیم. قضیه‌های دو شرطی را با نماد $\Leftrightarrow$[1] (که اگر و تنها اگرخوانده می‌شود) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم ABC یک مثلث و نقاط D و E به ترتیب روی AB و AC باشند. در این صورت

$$DE \| BC \Leftrightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

در ادامه مثال‌هایی از قضایای دو شرطی ملاحظه خواهید کرد.

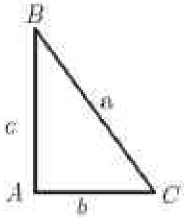


مثال : در یک مثلث دو ضلع برابرند؛ اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو به آنها باهم برابر باشند.

مثال : در مثلث متساوی‌الاضلاع یک پاره‌خط نیمساز است؛ اگر و تنها اگر میانه باشد.

[1]ــ این نماد نشان دهندهٔ آن است که هر کدام از طرفین می‌توانند طرف دیگر را نتیجه دهند؛ لذا یا هر دو طرف درست‌اند و یا هر دو طرف نادرست‌اند.

کار در کلاس



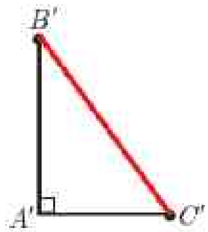
با توجه به قضیهٔ فیثاغورس اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

اگر در مثلث ABC، $a^2 = b^2 + c^2$ آنگاه مثلث در رأس A قائمه است.

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیهٔ فیثاغورس نیز درست است.

۱ـ فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازهٔ اضلاع آن برقرار است.



۲ـ پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که $\hat{A}' = 90^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$ است.

۳ـ با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازهٔ پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

$$\left.\begin{array}{r} B'C'^2 = A'C'^2 + A'B'^2 \xrightarrow[A'C'=b]{A'B'=c} B'C'^2 = b^2 + c^2 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow B'C'^2 = a^2 \Rightarrow B'C' = a$$

۴ـ توضیح دهید چرا $A\overset{\Delta}{B}C \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$ و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.

$$\left.\begin{array}{l} A'B' = AB \\ A'C' = AC \\ B'C' = BC \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} A\overset{\Delta}{B}C \cong A'\overset{\Delta}{B'}C' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$$

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان کنید.

فرض کنیم ABC یک مثلث باشد در اینصورت: $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow A = 90^\circ$

مثلث قائم الزاویه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع برابر با مجموع مربع های دو ضلع دیگر باشد.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که در پایه‌های قبل نیز تا حدودی با آن آشنا شده‌اید، استدلال با **مثال نقض** است. اگر فردی ادعا کند که «همهٔ اعداد فرد، اول‌اند»، این یک حکم کلی دربارهٔ تمام اعداد فرد است و ارائه عدد ۹ به عنوان عددی که فرد و غیر اول است، برای رد این ادعا کافی است. به چنین مثالی که برای رد یک حکم کلی استفاده می‌شود، مثال نقض می‌گوییم.
به عنوان مثالی دیگر؛ فرض کنیم فردی ادعا کند که «هیچ فرد ایرانی‌ای تا به حال مدال

فیلدز[1] نگرفته است». در این صورت شما برای رد ادعای او چه می‌توانید بگویید؟ اگر شما حتی یک فرد ایرانی را که مدال فیلدز گرفته است، برای او مثال بزنید، در این صورت ادعای او باطل شده است و در واقع شما با استفاده از یک مثال نقض، ادعای او را باطل کرده‌اید.

با دقت در ادعای مطرح شده خواهیم دید که کلمهٔ «هیچ» در این حکم باعث می‌شود که این ادعا یک حکم کلی برای تمام اعضای یک مجموعه (که در اینجا مجموعهٔ افراد ایرانی است) باشد. بنابراین در این مورد نیز آوردن یک مثال نقض کافی است تا آن حکم رد شود و به عبارتی غلط بودن آن حکم اثبات گردد.

در ادامه نمونه‌هایی از حکم‌های کلی آمده‌اند.

الف) همهٔ اعداد اول فردند. (حکم کلی دربارهٔ تمام اعداد اول)

ب) «در هر مستطیل اندازهٔ قطرها باهم برابر است.» (حکم کلی دربارهٔ تمام مستطیل‌ها)

پ) «به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت n^2+n+41 عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم «الف» چه حدسی می‌زنید؟ چگونه می‌توانید حدس خود را ثابت کنید؟

می‌دانیم که ۲ یک عدد اول و زوج است. بنابراین حکم کلی «الف» با ارائهٔ همین مثال نقض رد می‌شود. دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم‌های «ب» و «پ» چه حدس‌هایی می‌زنید؟ آیا می‌توانید برای آنها مثال نقض بیاورید و آنها را باطل کنید؟

اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض ارائه کنیم، دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در این حالت درستی حکم را باید پذیرفت؟

برای قسمت (ب) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش این حکم کافی نیست و باید توجه کرد که **«برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید آن را اثبات کنیم»**.

دربارهٔ گزینهٔ (پ) چه می‌توان گفت؟

اگر فرض کنیم که $n=41$ آنگاه داریم: $n=41 \Rightarrow 41^2+41+41=41(41+2)=41\times 43$

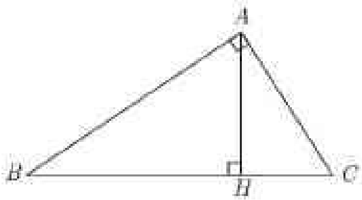
که حاصل دیگر عدد اول نیست پس $n=41$ یک مثال نقض برای رد این حکم کلی است.

اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی بر ما مشخص نباشد و برای رد آن، مثال نقض نیز نتوانیم ارائه دهیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه‌ای گرفت.

۱ــ مدال یا نشان فیلدز (Fields medal) جایزه‌ای است که به ابتکار ریاضی‌دان کانادایی جان چارلز فیلدز هر چهار سال یک‌بار به ریاضی‌دانان جوان (کمتر از چهل سال) که کار ارزنده‌ای در ریاضی انجام داده باشند تعلق می‌گیرد. از آنجا که در رشتهٔ ریاضی جایزهٔ نوبل اهدا نمی‌شود، این جایزه را «نوبل ریاضیات» می‌خوانند. در سال ۲۰۱۴ نشان فیلدز به ریاضی‌دان ایرانی خانم **مریم میرزاخانی** تعلق گرفت. گفتنی است که میرزاخانی اولین زنی در دنیاست که موفق به گرفتن این نشان شده‌است. البته با تأسف تمام موقع تدوین کتاب خبر درگذشت ایشان، جهان علم و جامعهٔ ایرانی را سخت متأثر ساخت، روانش شاد

تمرین

۱ در شکل مقابل مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت به‌دست آمده برای مساحت مثلث، یک تناسب به‌دست‌آورید.



$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH.BC \\ S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB.AC \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{۲}AH.BC=\frac{۱}{۲}AB.AC \Rightarrow AH.BC=AB.AC \Rightarrow \frac{AH}{AB}=\frac{AC}{BC}$$

۲ در هر مورد، مقدار عددی نسبت $\frac{a}{b}$ را به‌دست آورید.

الف) $\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b} \Rightarrow \frac{a}{۱۰+a-a}=\frac{b}{۸+b-b} \Rightarrow \frac{a}{۱۰}=\frac{b}{۸} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۱۰}{۸}$

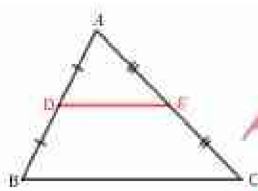
نکته: می توان ثابت کرد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a\pm nb}{b}=\frac{c\pm nd}{d} \\ \frac{a}{b\pm na}=\frac{c}{d\pm nc} \end{cases}$$

ب) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b} \Rightarrow \frac{۳a+۱۰-(۱۰+۲a)}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷-(۷+۲b)}{۷+۲b} \Rightarrow \frac{a}{۱۰+۲a}=\frac{b}{۷+۲b}$

$$\Rightarrow \frac{a}{۱۰+۲a-۲a}=\frac{b}{۷+۲b-۲b} \Rightarrow \frac{a}{۱۰}=\frac{b}{۷} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۱۰}{۷}$$

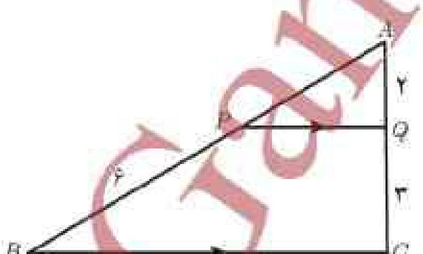
۳ ثابت کنید در هر مثلث پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.



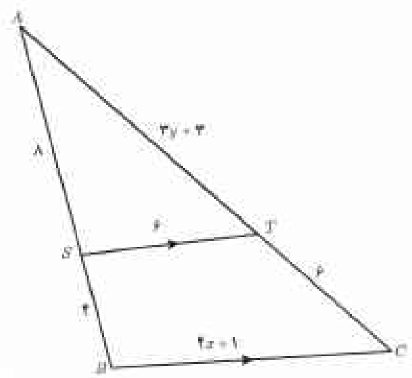
$$\left.\begin{array}{l} AD=DB \Rightarrow \frac{AD}{DB}=۱ \\ AE=EC \Rightarrow \frac{AE}{EC}=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} DE \parallel BC$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \xrightarrow[AC=۲AE]{AB=۲AD} \frac{DE}{BC}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow DE=\frac{۱}{۲}BC$$

۴ در شکل مقابل $PQ \parallel BC$ است. طول پاره‌خط‌های AP و PQ را به‌دست آورید.



$$PQ \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{AP}{۶}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow AP=۴ \\ \frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{PQ}{۹}=\frac{۲}{۵} \Rightarrow PQ=\frac{۱۸}{۵} \end{cases}$$

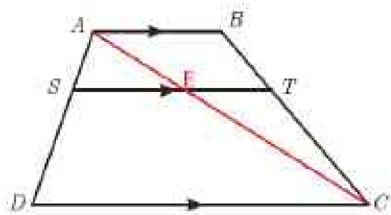


۵ در شکل مقابل $ST \| BC$ است. مقادیر x و y را به‌دست آورید.

$$ST \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AS}{SB}=\dfrac{AT}{TC} \Rightarrow \dfrac{۸}{۴}=\dfrac{۳y+۳}{۶} \Rightarrow ۲=\dfrac{y+۱}{۲} \Rightarrow y+۱=۴ \Rightarrow y=۳ \\ \dfrac{AS}{AB}=\dfrac{ST}{BC} \Rightarrow \dfrac{۸}{۱۲}=\dfrac{۶}{۴x+۱} \Rightarrow \dfrac{۲}{۳}=\dfrac{۶}{۴x+۱} \Rightarrow ۸x+۲=۱۸ \Rightarrow x=۲ \end{cases}$$

۶ در ذوزنقه مقابل $AB \| ST \| DC$ است. ثابت کنید : $\dfrac{AS}{SD}=\dfrac{BT}{TC}$

(**راهنمایی** : یکی از قطرها را رسم کنید.)



$$\left.\begin{aligned} \overset{\triangle}{ACD}: SE \parallel DC \Rightarrow \frac{AS}{SD}=\frac{AE}{EC} \\ \overset{\triangle}{ABC}: TE \parallel AB \Rightarrow \frac{BT}{TC}=\frac{AE}{EC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$$

۷ در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه را داده شده است، بنویسید.

الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

اگر در مثلثی سه زاویه برابر باشند ، آنگاه سه ضلع نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو موازی باشند، در این صورت زوایای مقابل با هم برابرند.

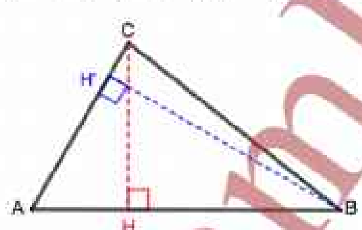
اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل باهم برابر باشند ، در این صورت اضلاع مقابل موازی هستند.

پ) اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در این صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.

اگر زوایای مقابل یک چهارضلعی مکمل یکدیگر باشند ، در این صورت رأس های چهارضلعی روی یک دایره قرار دارند.

ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر» کوچک‌تر است از «ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر».

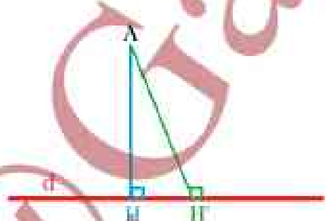
(**راهنمایی** : شکل بکشید و به زبان ریاضی بنویسید)



در مثلث ABC ، اگر $AB > AC$ آنگاه $CH < BH'$

به عبارتی : $AB > AC \Rightarrow CH < BH'$

۸ با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.



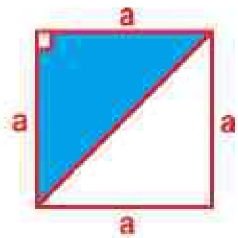
خط d و نقطهٔ A خارج آن را در نظر می گیریم . از نقطهٔ A عمود AH را رسم می کنیم .
با استفاده از برهان خلف ، فرض می کنیم که از نقطهٔ A می توانیم خط دیگری مانند AH' را برخط d عمود کنیم (فرض خلف) . بنا براین در مثلث AHH' ، $\hat{H}=\hat{H'}=۹۰^\circ$ ؛ولی با توجه به این که مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰° است ، به تناقض می رسیم ، پس از ابتدا فرض غلط بودن حکم نادرست بوده و حکم نمی تواند غلط باشد. به عبارتی فرض خلف باطل و حکم مسئله ثابت می شود.

۹ هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اولِ بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

عدد ۱۳۱ ، اول است و از ۱۲۷ بزرگ تراست. پس این حکم کلی با این مثال نقض رد می شود.

ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.



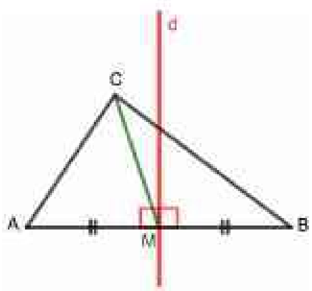
مساحت مربع در شکل مقابل a^2 است اما مساحت مثلث قائم الزاویه رنگی $\frac{a^2}{2}$ است .

$\frac{a^2}{2} < a^2$ پس با این مثال نقض حکم کلی فوق رد می شود.

پ) در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از اندازهٔ هر ارتفاع بزرگ‌تر است.

در مثلث قائم الزاویه ارتفاع با طول ضلع مثلث برابر است. با این مثال نقض این حکم کلی رد می شود.

ت) در هر مثلث میانه و عمود منصف متناظر به هر ضلع برهم منطبق‌اند.



در مثلث ABC شکل مقابل خط d عمود منصف ضلع AB و CM میانهٔ ضلع AB است ولی

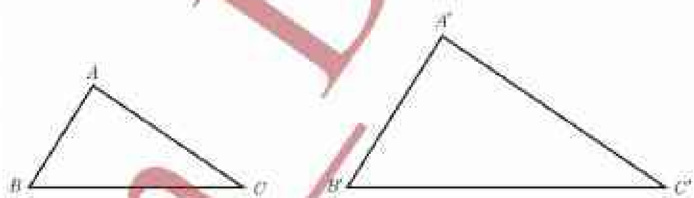
بر هم منطبق نیستند.

درس سوم

تشابه مثلث‌ها

در پایهٔ نهم با مفهوم تشابه آشنا شدید. با توجه به مفهوم تشابه، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند؛ هرگاه زوایای متناظر باهم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد؛ یعنی

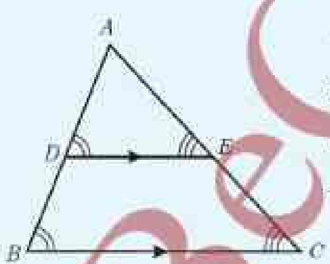
$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \iff \begin{cases} \hat{A}=\hat{A}' \text{ و } \hat{B}=\hat{B}' \text{ و } \hat{C}=\hat{C}' \\ \text{و} \\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$$



در این‌صورت نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث را نسبت تشابه دو مثلث می‌نامیم. مثلاً اگر $\frac{AB}{A'B'}=\frac{۲}{۳}$ باشد، می‌گوییم مثلث ABC با مثلث $A'B'C'$ با نسبت تشابه $\frac{۲}{۳}$، متشابه است. در این‌صورت مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{۳}{۲}$، متشابه خواهد بود.

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این‌صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.



اثبات :

۱ــ داریم $\hat{D}=\hat{B}$ و $\hat{E}=\hat{C}$ (چرا؟)

$$DE \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} AB \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \hat{D}=\hat{B} \\ AC \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \hat{E}=\hat{C} \end{cases}$$

بنابراین زاویه‌های دو مثلث نظیر به نظیر باهم برابرند.

۲ــ با توجه به قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

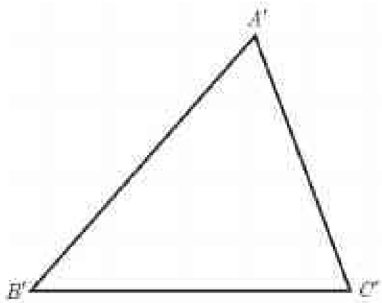
۳ــ با توجه به (۱) و (۲) و تعریف تشابه داریم :

$$\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

با استفاده از قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها می‌توان سه قضیهٔ بعد را که **حالت‌های تشابه دو مثلث** را بیان می‌کنند، اثبات کرد. از آنجا که اثبات این قضیه‌ها مدنظر نیست، در ادامه تنها صورت آنها بیان شده است.

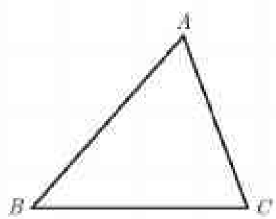
قضیه ۱ : هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{A}=\hat{A}' \text{ و } \hat{B}=\hat{B}' \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C')$$



قضیه ۲ : هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آنها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\left(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}, \hat{A}=\hat{A}' \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'\right)$$



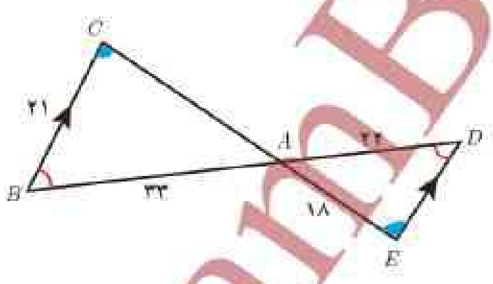
قضیه ۳ : هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$$

کار در کلاس

۱ در شکل مقابل $BC \parallel DE$.

اندازهٔ پاره خط‌های DE و CA را به دست آورید.



بنا بر قضیه خطوط موازی $BC \parallel DE$ و BD مورب پس $\hat{B}=\hat{D}$

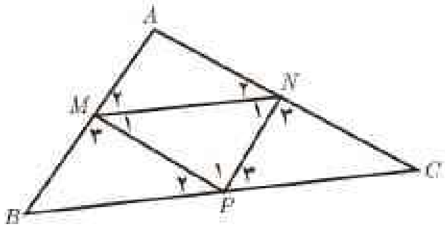
بنا بر قضیه خطوط موازی $BC \parallel DE$ و CE مورب پس $\hat{C}=\hat{E}$

پس بنا بر قضیهٔ (۱) تشابه دو مثلث ABC و ADE به حالت برابر بودن دو زاویه با هم متشابه اند.در نتیجه می توانیم برای آن ها نسبت تشابه بنویسیم:

$$\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{AC}{۱۸}=\frac{۳۳}{۲۲}=\frac{۲۱}{DE} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AC}{۱۸}=\frac{۳۳}{۲۲} \Rightarrow AC=۲۷ \\ \frac{۳۳}{۲۲}=\frac{۲۱}{DE} \Rightarrow DE=۱۴ \end{cases}$$

۲ اگر نقاط P و N و M مطابق شکل وسط‌های اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید مثلث‌های ABC و MNP متشابه‌اند.

حل :



الف) $MN \parallel BC$ و $NP \parallel AB$ و $MP \parallel AC$ چرا؟

قبلا ثابت کرده ایم که هر گاه پاره خطی وسط دوضلع مثلث را به هم وصل کند با ضلع سوم موازی و نصف آن است

ب) بنابراین $\hat{M}_1 = \hat{P}_2 = \hat{C}$ و $\hat{N}_1 = \hat{P}_3 = \hat{B}$ (چرا؟)

بنا بر قضیه خطوط موازی $MN \parallel BC$ و NP مورب پس $\widehat{N_1} = \widehat{P_3}$ (۱)

همچنین $MN \parallel BP$ و $MB \parallel NP$ پس چهارضلعی $MNPB$ متوازی الاضلاع است در نتیجه: $\widehat{N_1} = \widehat{B}$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم : $\widehat{N_1} = \widehat{P_3} = \widehat{B}$

بنا بر قضیه خطوط موازی $MN \parallel BC$ و MP مورب پس $\widehat{M_1} = \widehat{P_2}$ (۳)

همچنین $MN \parallel PC$ و $MP \parallel NC$ پس چهارضلعی $MNCP$ متوازی الاضلاع است در نتیجه: $\widehat{M_1} = \widehat{C}$ (۴)

از (۳) و (۴) نتیجه می گیریم : $\widehat{M_1} = \widehat{P_2} = \widehat{C}$

از (ب) دربارهٔ مثلث‌های مورد نظر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

$\widehat{N_1} = \widehat{B}$ و $\widehat{M_1} = \widehat{C}$ پس بنا بر قضیهٔ ۱ تشابه این دو مثلث متشابه اند.

۳ اگر سه مثلث ABC و $A'B'C'$ و $A''B''C''$ به گونه‌ای باشند که $A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$ و $A'\overset{\Delta}{B'}C' \sim A''\overset{\Delta}{B''}C''$، دربارهٔ دو مثلث ABC و $A''B''C''$ چه می‌توان گفت؟ چرا؟

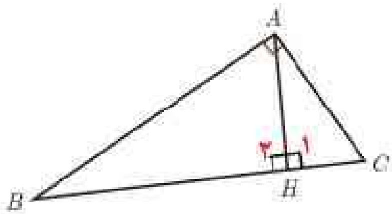
اگر $A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$ پس بنا به تعریف تشابه دو مثلث زوایای نظیر باهم برابرند : $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ و $\widehat{C} = \widehat{C'}$ (۱)

اگر $A'\overset{\Delta}{B'}C' \sim A''\overset{\Delta}{B''}C''$ پس بنا به تعریف تشابه دو مثلث زوایای نظیر باهم برابرند : $\widehat{A'} = \widehat{A''}$, $\widehat{B'} = \widehat{B''}$ و $\widehat{C'} = \widehat{C''}$ (۲)

از رابطه های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم : $\widehat{A} = \widehat{A''}$, $\widehat{B} = \widehat{B''}$ پس بنا بر قضیه (۱) تشابه داریم : $A\overset{\Delta}{B}C \sim A''\overset{\Delta}{B''}C''$.

برخی روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

فعالیت



فرض کنید مثلث ABC مانند شکل یک مثلث قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد.

۱ نشان دهید دو زاویه از مثلث AHC با دو زاویه از مثلث ABC برابرند و نتیجه بگیرید:

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHC}$$

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A} = \hat{H}_1 = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{C}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{قضیه (۱) تشابه}} \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHC}$$

۲ نشان دهید دو زاویهٔ مثلث AHB با دو زاویه از مثلث ABC برابر است و نتیجه بگیرید:

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHB}$$

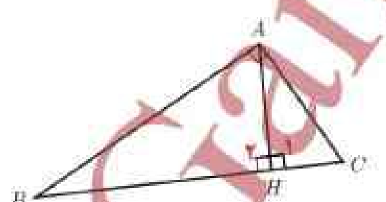
$$\left.\begin{array}{r}\hat{A} = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ \hat{B} = \hat{B}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{قضیه (۱) تشابه}} \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHB}$$

۳ از (۱) و(۲) دربارهٔ مثلث های AHC و AHB چه نتیجه ای می گیرید؟

با توجه به کار در کلاس قبلی نتیجه می شود که $\overset{\Delta}{AHB} \sim \overset{\Delta}{AHC}$

نتیجه : در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آورد که این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

۴ $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{HC}{AC} \Rightarrow AC^2 = HC \times BC$



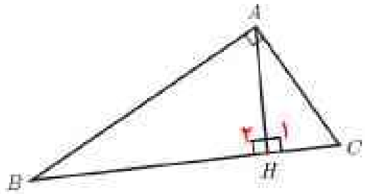
۵ $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHB} \Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{HB}{AB} \Rightarrow AB^2 = HB \times BC$

۶ $\overset{\Delta}{AHB} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \dfrac{AH}{HB} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{HC}{AH} \Rightarrow AH^2 = HB \times HC$

۷ با جمع طرفین روابط ۴ و ۵ رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث ABC نتیجه بگیرید.

$$AC^2 + AB^2 = HC \times BC + HB \times BC = BC(\underbrace{HC + HB}_{BC}) = BC \times BC \Rightarrow AC^2 + AB^2 = BC^2$$

۸ مساحت مثلث ABC را به دو طریق محاسبه و با توجه به آن تساوی زیر را کامل کنید.

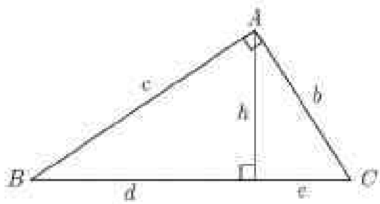


$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AH.BC \\ S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB.AC \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{۲} AH.BC = \frac{۱}{۲} AB.AC \Rightarrow AH.BC = AB.AC$$

$AB \times AC = AH \times BC$

کار در کلاس

درمثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل در هر مورد سعی کنید با ساده‌ترین روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



۱ $h=۵$ $d=۷$ $e=?$

$h^۲ = de \Rightarrow ۲۵ = ۷e \Rightarrow e = \frac{۲۵}{۷}$

۲ $d=۵$ $e=۳$ $b=?$ $c=?$

$c^۲ = d(d+e) \Rightarrow c^۲ = ۵(۵+۳) = ۴۰ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۱۰}$

$b^۲ = e(d+e) \Rightarrow b^۲ = ۳(۵+۳) = ۲۴ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۶}$

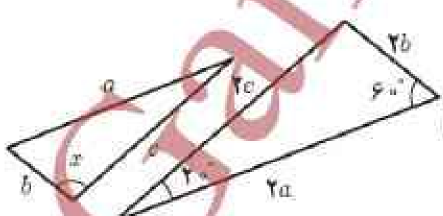
۳ $c=۸$ $b=۶$ $h=?$

$BC = \sqrt{۳۶+۶۴} = ۱۰$

$bc = h.BC \Rightarrow ۶ \times ۸ = ۱۰h \Rightarrow h = \frac{۴۸}{۱۰}$

تمرین

۱ در هر قسمت تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و مقادیر x و y را مشخص نمایید.

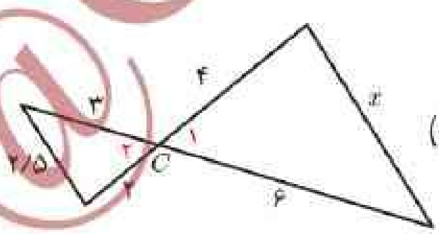


الف)

$\frac{۲a}{a} = \frac{۲b}{b} = \frac{۲c}{c} = ۲$ بنا براین دو مثلث بنا بر قضیه (۳) تشابه ، متشابه اند.

اندازهٔ زاویهٔ سوم در مثلث بزرگ تر با توجه به مجموع زوایای داخلی ، ۱۰۰°

است ، پس $x = ۱۰۰^\circ$

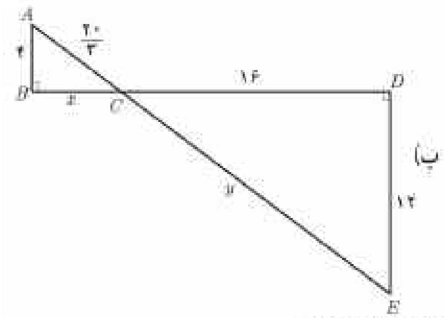


ب)

$\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$ ، $\frac{۶}{۳} = \frac{۴}{۲} = ۲$ بنا براین دو مثلث بنا بر قضیه (۲) تشابه ، متشابه اند.

$\frac{x}{۲/۵} = ۲ \Rightarrow x = ۵$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی



پ)

$\widehat{C_1}=\widehat{C_2}$ و $\widehat{B}=\widehat{D}=90^\circ$ بنا براین دو مثلث بنا بر قضیه (۱) تشابه ، مشابه اند.

$$\frac{16}{x}=\frac{y}{\frac{20}{3}}=\frac{12}{4}=3 \Rightarrow \begin{cases}\frac{16}{x}=3\Rightarrow x=\frac{16}{3}\\ \frac{y}{\frac{20}{3}}=3\Rightarrow y=20\end{cases}$$

۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو در هر حالت، اندازه پاره‌خط خواسته شده را به‌دست آورید.

الف) $BC=10$ و $BH=9$ و $AH=?$ و $AB=?$ و $AC=?$

$$AB^2=BH\times BC \Rightarrow AB^2=9\times 10=90 \Rightarrow AB=3\sqrt{10}$$

$$AC=\sqrt{BC^2-AB^2} \Rightarrow AC=\sqrt{100-90} \Rightarrow AC=\sqrt{10}$$

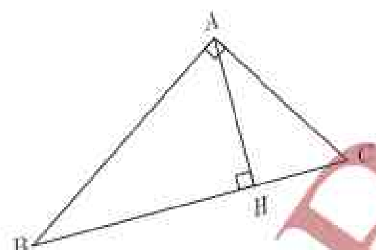
$$AB\times AC=AH\times BC \Rightarrow 3\sqrt{10}\times\sqrt{10}=AH\times 10 \Rightarrow AH=3$$

ب) $AC=5$ و $CH=2$ و $BC=?$ و $AH=?$ و $AB=?$

$$AC^2=CH\times BC \Rightarrow 25=2\times BC \Rightarrow BC=\frac{25}{2}$$

$$AB=\sqrt{BC^2-AC^2} \Rightarrow AB=\sqrt{\frac{625}{4}-25} \Rightarrow AB=\sqrt{\frac{525}{4}}=\frac{5\sqrt{21}}{2}$$

$$AB\times AC=AH\times BC \Rightarrow \frac{5\sqrt{21}}{2}\times 5=AH\times\frac{25}{2} \Rightarrow AH=\sqrt{21}$$



پ) $AB=8$ و $AC=6$ و $BC=?$ و $AH=?$

$$BC=\sqrt{AC^2+AB^2} \Rightarrow AC=\sqrt{36+64} \Rightarrow BC=10$$

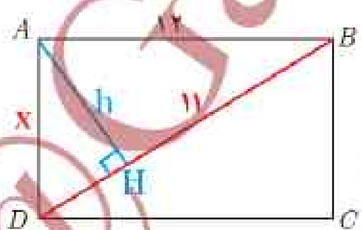
$$AB\times AC=AH\times BC \Rightarrow 8\times 6=AH\times 10 \Rightarrow AH=\frac{48}{10}$$

ت) $AB=12$ و $AH=6$ و $BH=?$ و $BC=?$ و $AC=?$

$$BH=\sqrt{AB^2-AH^2} \Rightarrow BH=\sqrt{144-36} \Rightarrow BH=6\sqrt{3}$$

$$AB^2=BH\times BC \Rightarrow 144=6\sqrt{3}\times BC \Rightarrow BC=8\sqrt{3}$$

$$AC=\sqrt{BC^2-AB^2} \Rightarrow AC=\sqrt{192-144}=\sqrt{48} \Rightarrow AC=4\sqrt{3}$$



۳ شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطهٔ A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم، طول BH برابر ۱۱ است. اندازهٔ عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازهٔ عرض مستطیل را محاسبه کنید.

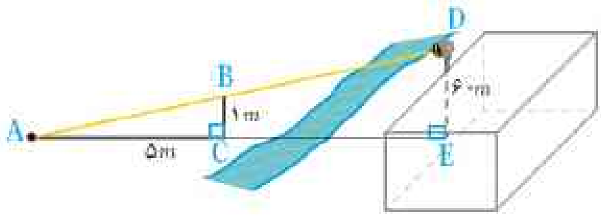
$$AH=\sqrt{AB^2-BH^2} \Rightarrow h=\sqrt{144-121} \Rightarrow h=\sqrt{23}$$

$$AB^2=BH\times BD \Rightarrow 144=11\times BD \Rightarrow BD=\frac{144}{11}$$

$$AD\times AB=AH\times BD \Rightarrow x=\frac{\sqrt{23}\times\frac{144}{11}}{12} \Rightarrow x=\frac{12}{11}\sqrt{23}$$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

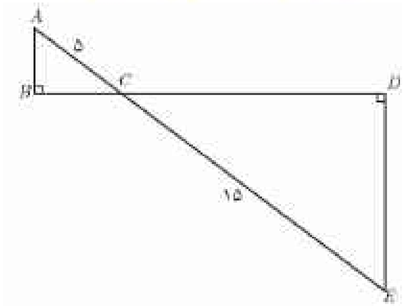
۴ بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می‌خواهد فاصلهٔ خود را تا پایهٔ نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول یک متر را روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که طول سایهٔ چوب برابر ۵ متر است. فاصلهٔ این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟



$\hat{C}=\hat{E}=90^\circ$ و $\hat{A}=\hat{A}$ پس بنا بر قضیهٔ اول تشابه $\triangle A\hat{B}C \sim \triangle A\hat{D}E$ در نتیجه داریم:

$$\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}\Rightarrow\frac{5}{AE}=\frac{1}{60}\Rightarrow AE=300\ m$$

۵ در شکل مقابل دو مثلث قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آنها را به‌دست آورید.



$\hat{C_1}=\hat{C_2}$ و $\hat{B}=\hat{D}=90^\circ$ پس بنا بر قضیهٔ اول تشابه $\triangle A\hat{B}C \sim \triangle C\hat{D}E$ در نتیجه داریم:

$$\frac{DC}{BC}=\frac{DE}{AB}=\frac{CE}{AC}=\frac{15}{5}=3$$

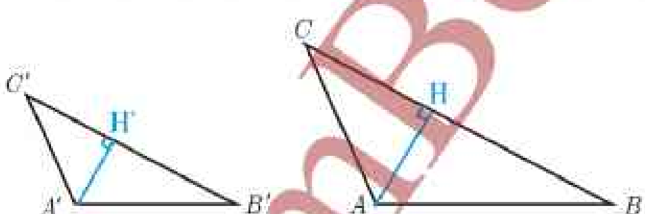
$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}DC\times DE}{\cancel{\frac{1}{2}}BC\times AB}=\frac{DC}{BC}\times\frac{DE}{AB}\Rightarrow\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}}=3\times3\Rightarrow\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}}=9$$

می‌توان ثابت کرد اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\Rightarrow\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}$

$$\frac{P_{CDE}}{P_{ABC}}=\frac{DC+DE+CE}{BC+AB+AC}=\frac{CE}{AC}\Rightarrow\frac{P_{CDE}}{P_{ABC}}=\frac{15}{5}\Rightarrow\frac{P_{CDE}}{P_{ABC}}=3$$

۶ دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ را با نسبت تشابه K در نظر بگیرید؛ به گونه‌ای که $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=K$ باشد. حال ارتفاع‌های AH و $A'H'$ را در دو مثلث رسم کنید.

الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و $A'H'B'$ متشابه‌اند.



بنا به فرض $\hat{B}=\hat{B'}$ و $\hat{H}=\hat{H'}=90^\circ$ پس بنا بر قضیهٔ اول تشابه

در نتیجه داریم: $\triangle A\hat{B}H \sim \triangle A'\hat{B'}H'$

ب) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را به‌دست آورید.

با توجه به نسبت تشابه دو مثلث و فرض مسئله داریم:

$$\frac{CH}{C'H'}=\frac{AH}{A'H'}=\frac{AB}{A'B'}=k\Rightarrow\frac{AH}{A'H'}=k$$

پ) نسبت مساحت‌های $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}$ را محاسبه کنید

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}AH\times BC}{\cancel{\frac{1}{2}}A'H'\times B'C'}=\frac{AH}{A'H'}\times\frac{BC}{B'C'}=k\times k\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=k^2$$

ت) نسبت محیط‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به‌دست آورید.

می‌توان ثابت کرد اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\Rightarrow\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}}=\frac{BC+AB+AC}{B'C'+A'B'+A'C'}=\frac{AC}{A'C'}=k\Rightarrow\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}}=k$$

ثابت کنید: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f}=k$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{a+c}{b+d}=k\Rightarrow a+c=k(b+d)\\ \frac{e}{f}=k\Rightarrow e=kf\end{array}\right\}\Rightarrow a+c+e=k(b+d)+kf\Rightarrow a+c+e=k(b+d+f)\Rightarrow\frac{a+c+e}{b+d+f}=k$$