تهیه کنندگان:

جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

فصل ۷

آمار و احتمال

امروزه آمار و احتمال به عنوان یک علم پرکاربرد در همهٔ علوم از جمله علوم پزشکی، علوم فنی و مهندسی، هواشناسی، محیط زیست و ... استفاده می‌شود.

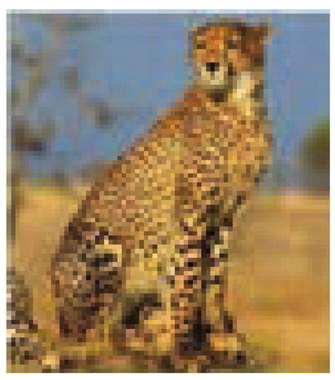
درس اول احتمال یا اندازه‌گیری شانس

درس دوم مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه

درس سوم متغیر و انواع آن

آمار و احتمال در کشاورزی

آمار و احتمال در پزشکی



آمار و احتمال درمحیط زیست

آمار و احتمال در مهندسی کامپیوتر

درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس

مقدمه

پیشامدهایی وجود دارند که ممکن است رخ بدهند یا رخ ندهند و ما ازچگونگی رخ دادن آنها اطلاع نداریم. به‌عنوان مثال تا زمانی که سکه را پرتاب نکرده‌ایم، نتیجهٔ پرتاب سکه (پشت یا رو آمدن آن)، مشخص نیست. چنین پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی را که نتیجهٔ آن به‌طور دقیق قابل پیش‌بینی نباشد؛ اما از همهٔ حالت‌های ممکن در به‌وقوع پیوستن آنها، مطلع باشیم، پدیده‌ها یا آزمایش‌های تصادفی می‌نامیم. به‌عنوان مثال نتیجهٔ یک بازی فوتبال از قبل، قابل پیش‌بینی نیست؛ اما سه حالت پیروزی، تساوی و باخت برای هر یک از تیم‌ها وجود دارد که ممکن است اتفاق بیفتد.

همان‌طور که در سال قبل خواندید، مجموعهٔ شامل همهٔ این حالت‌های ممکن، فضای نمونه‌ای نامیده می‌شود. اگر این مجموعه را S بنامیم، هر زیر مجموعهٔ S مانند A را یک پیشامد تصادفی در S می‌نامیم.

پیشامدهای تصادفی

فعالیت

۱ اگر دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم، همهٔ حالت‌های ممکن را می‌توان در جدول زیر مشاهده کرد. ابتدا این جدول را کامل کنید و از طریق اصل ضرب درستی تعداد کل حالت‌های موجود در جدول را بررسی کنید؛ سپس به سؤال‌ها پاسخ دهید :

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱و۳)	(۱و۴)	(۱,۵)	(۱و۶)
۲	(۲,۱)	(۲و۲)	(۲,۳)	(۲و۴)	(۲و۵)	(۲,۶)
۳	(۳و۱)	(۳و۲)	(۳,۳)	(۳و۴)	(۳,۵)	(۳و۶)
۴	(۴و۱)	(۴,۲)	(۴و۳)	(۴و۴)	(۴و۵)	(۴و۶)
۵	(۵و۱)	(۵و۲)	(۵و۳)	(۵و۴)	(۵و۵)	(۵,۶)
۶	(۶,۱)	(۶و۲)	(۶و۳)	(۶و۴)	(۶و۵)	(۶,۶)

تعداد کُل حالات $= ۶ \times ۶ = ۳۶$

۲ قطر آبی رنگ چه پیشامدی را نشان می‌دهد؟ پیشامدهایی که در آنها مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ باشد.

۳ خانه‌های مربوط به حالت‌هایی را که هر دو عدد رو شده زوج و هر دو عدد رو شده فردند هاشور بزنید؛ چه الگویی به‌دست می آید؟ هر دو حالت ۱۸ مورد می‌باشند، ۹ مورد هر دو عدد رو شده زوج و ۹ مورد هر دو عدد رو شده فرد می‌باشند.

۴ با توجّه به جدول، یک مسئله طرح کنید و پاسخ آن را توضیح دهید.

مسئله: تعداد حالت‌هایی را بنویسید که در آنها اعداد رو شده برابر باشند. جواب: ۶ حالت وجود دارد.

۵ با توجّه به جدول و قطرهای آن، تعداد حالت‌ها برای مجموع دو تاس، در چه اعدادی برابر است؟ (راهنمایی: به‌عنوان مثال، تعداد حالت‌ها برای مجموع ۵ و مجموع دو تاس ۹، برابر است)

x_i = مجموع دو عدد رو شده و تعداد = n

x_i	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$n(x_i)=\begin{cases} x_i - ۱ & x_i = ۲,۳,۴,۵,۶,۷ \\ ۱۳ - x_i & x_i = ۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲ \end{cases}$$

کار در کلاس

فرض کنید می‌خواهیم یک تاس و یک سکه را با هم بیندازیم:

۱ آیا می‌توانید نتیجهٔ حاصل را به‌صورت قطعی بیان کنید؟ خیر

۲ آیا این پدیده یا آزمایش، تصادفی است؟ چرا؟ بله، تصادفی است زیرا نتیجه آن قبل از وقوع قابل پیش‌بینی نیست.

۳ همهٔ حالت‌های ممکن را بنویسید (فضای نمونه‌ای را تشکیل دهید).

{۶ر و ۵ر و ۴ر و ۳ر و ۲ر و ۱ر و ۶پ و ۵پ و ۴پ و ۳پ و ۲پ و ۱پ}

۴ تعداد این حالت‌ها را با استفاده از اصل ضرب به‌دست آورید. ۲×۶=۱۲

۵ جدول ۶×۲ یا ۲×۶ مربوط به این آزمایش را رسم کنید.

تاس / سکه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
پ	۱پ	۲پ	۳پ	۴پ	۵پ	۶پ
ر	۱ر	۲ر	۳ر	۴ر	۵ر	۶ر

مثال ۱

فرض کنید خانواده‌ای ۴ فرزند دارد؛ امّا از جنسیت فرزندان این خانواده اطلاع نداریم. اگر ترتیب به‌دنیا آمدن فرزندان اهمیت داشته باشد، با توجّه به اصل ضرب تعداد همهٔ حالت‌های ممکن برای فرزندان این خانواده عبارت است از: $۲^۴ = ۲\times۲\times۲\times۲$. حالت (پ، پ، د، پ) به معنای این است که فرزند اول یا بزرگ‌تر در این خانواده پسر و فرزند دوم دختر و فرزند سوم و چهارم، پسر هستند. حالت (د، پ، پ، پ) را شما توضیح دهید.

پیشامدهای زیر را در نظر بگیرید و جاهای خالی را پر کنید:

الف پیشامد اینکه «دقیقاً یک دختر در این خانواده متولد شده باشد» = A

A = {(د، پ، پ، پ) و (پ،د،پ،پ) و (پ،پ،د،پ) و (پ، پ، پ، د)}

ب پیشامد اینکه «حداکثر یک دختر در خانواده متولد شده باشد» = B

B = {(پ، پ، پ، پ) و (د،پ،پ،پ) و (پ،د،پ،پ) و (پ،پ،د،پ) و (پ، پ، پ، د)}

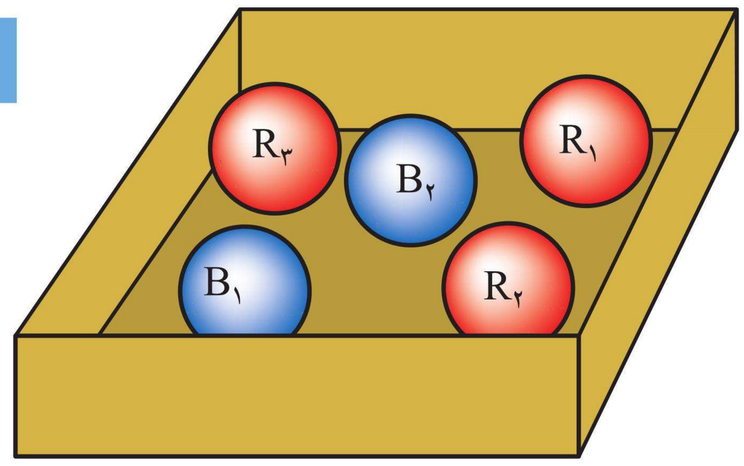
پ پیشامد اینکه « تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشند» = C

$C = \{$(پ، پ، د، د) و (پ،د،د،پ) و (د،پ،پ،د) و (پ،د،پ،د) و (د،پ،د،پ) و (د، د، پ، پ)$\}$

ت پیشامد اینکه « تعداد فرزندان پسر از دختر بیشتر باشد » = D

$D = \{$(پ، پ، پ، پ) و(پ،پ،پ،د) و(پ،پ،د،پ) و (پ،د،پ،پ) و (د، پ، پ، پ)$\}$

مثال ۲



در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز متفاوت (با شماره‌های ۱ تا ۳) و ۲ مهرهٔ آبی متفاوت (با شماره‌های ۱ و ۲) وجود دارد. اگر ۳ مهره به تصادف از این جعبه خارج شود، تعداد حالت‌های ممکن در انتخاب ۳ مهره از بین ۵ مهره، عبارت است از $\binom{۵}{۳} = ۱۰$

زیرا ترتیب انتخاب مهم نیست. بنابراین فضای نمونه ای به صورت زیر نوشته می شود :

$S = \{R_۱R_۲R_۳$ و $B_۱B_۲R_۱$ و $B_۱B_۲R_۲$ و $B_۱B_۲R_۳$ و $R_۱R_۲B_۱$ و $R_۱R_۳B_۲$ و $R_۲R_۳B_۱$ و $R_۱R_۲B_۲$ و $R_۱R_۳B_۱$ و $R_۲R_۳B_۲\}$

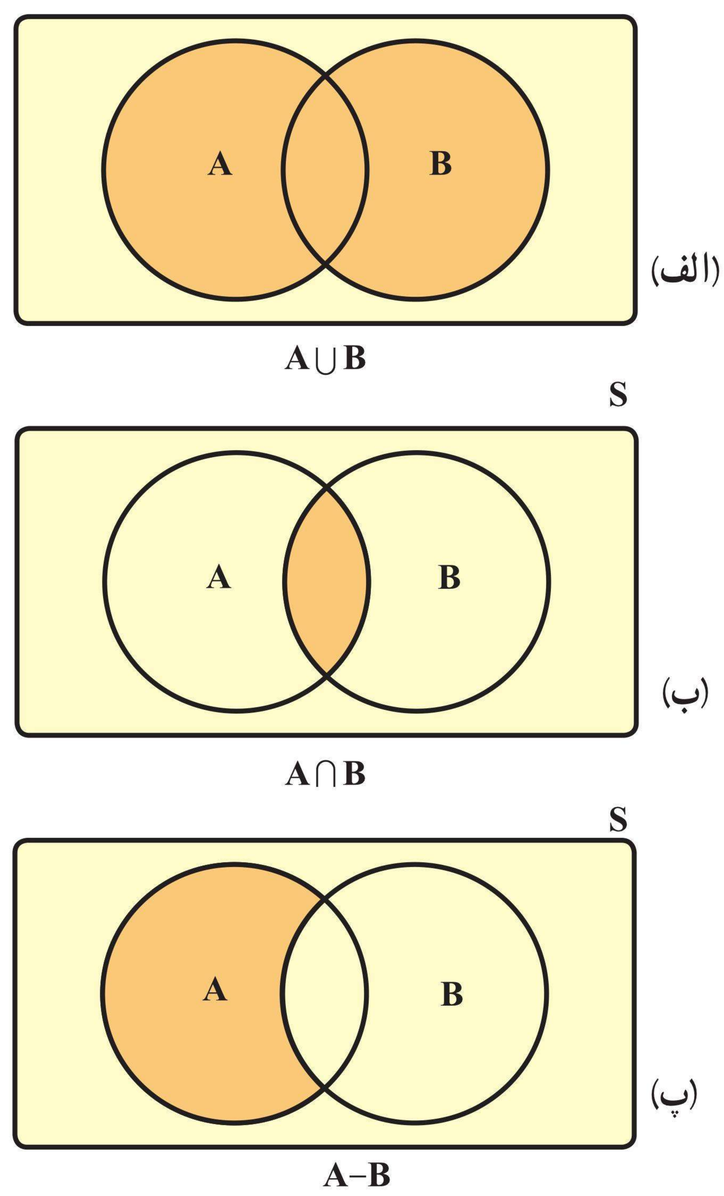
اگر پیشامدهای «حداقل ۱ مهرهٔ آبی انتخاب شود» و «حداکثر ۱ مهرهٔ آبی انتخاب شود» و «هر سه مهره قرمز انتخاب شود» را به ترتیب A و B و C بنامیم؛ خواهیم داشت :

$A = \{B_۱R_۱R_۲$ و $B_۱R_۱R_۳$ و $B_۱B_۲R_۱$ و $B_۱B_۲R_۲$ و $B_۱B_۲R_۳$ و $R_۱R_۲B_۲$ و $R_۱R_۳B_۲$ و $R_۲R_۳B_۱$ و $R_۲R_۳B_۲\}$

$B = \{B_۱R_۱R_۲$ و $R_۱R_۲B_۲$ و $R_۱R_۳B_۲$ و $R_۲R_۳B_۱$ و $R_۱R_۳B_۱$ و $R_۲R_۳B_۲$ و $R_۱R_۲R_۳\}$

$C = \{R_۱R_۲R_۳\}$

اگر S را مجموعهٔ مرجع فرض کنیم، متمم A یعنی A' با کدام‌یک از مجموعه های B یا C برابر است؟ متمم A یعنی A' برابر C است. $A' = C$



پیشامدها و برخی اعمال روی آنها

اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند، در این‌صورت هر یک از پیشامدهای $(A \cup B)$، $(A \cap B)$ و $(A - B)$ در فضای نمونه‌ای S به‌صورت‌های زیر توصیف می‌شوند :

الف) اجتماع دو پیشامد :

پیشامد $(A \cup B)$ وقتی رخ می‌دهد (اتفاق می‌افتد) که حداقل یکی از دو پیشامد رخ بدهد.
(یا A رخ بدهد یا B رخ بدهد یا هر دو رخ بدهند.)

ب) اشتراک دو پیشامد :

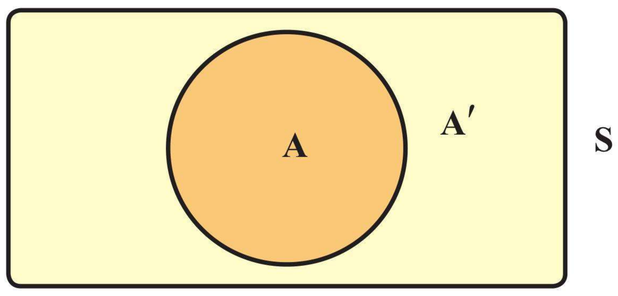
پیشامد $(A \cap B)$ وقتی رخ می‌دهد که دو پیشامد با هم رخ بدهند (هم پیشامد A رخ بدهد و هم پیشامد B رخ بدهد).

پ) تفاضل دو پیشامد :

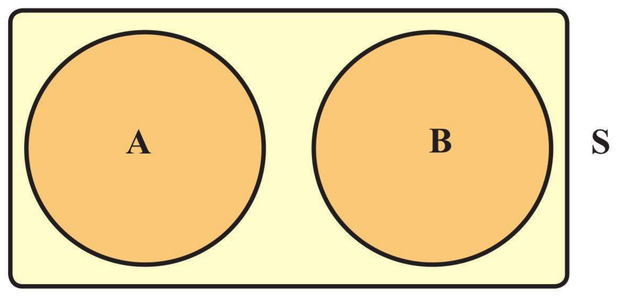
پیشامد $(A - B)$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ بدهد و پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد :

اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، متمم پیشامد A که با A' (یا A^C) نمایش داده می‌شود، وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد؛ بنابراین با توجّه به نمودار واضح است که $A \cup A' = S$ و $A \cap A' = \varnothing$



تعریف : اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \cap B = \varnothing$، در این‌صورت A و B را دو پیشامد ناسازگار می‌نامیم. در واقع دو پیشامد ناسازگار هیچگاه با هم رخ نمی دهند.



تذکر : با توجّه به تعریف متمم یک پیشامد، همواره هر پیشامد تصادفی مانند A ومتمم آن یعنی A'، دو پیشامد ناسازگارند.

اگر A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، این سه پیشامد را دو به دو ناسازگار می‌نامیم هرگاه $A \cap B = \varnothing$ و $A \cap C = \varnothing$ و $B \cap C = \varnothing$ باشد.

مثال ۳

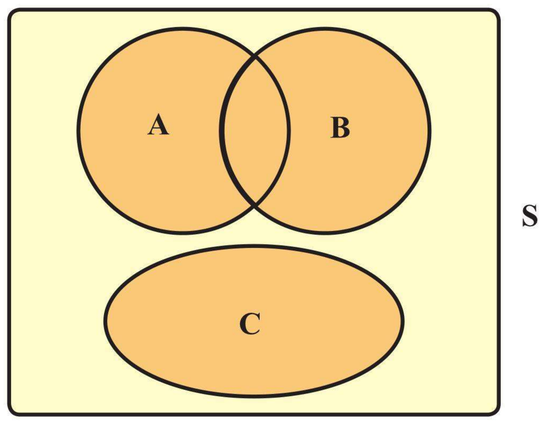
اگر یک تاس را بیندازیم و پیشامدهای «روشدن عدد بزرگ‌تر از ۴»، «رو شدن عدد کوچک‌تر از ۳» و «رو شدن عدد ۳ یا ۴» را به‌ترتیب A، B و C تعریف کنیم، در این‌صورت همواره، پیشامدهای A، B و C دو به دو ناسازگارند و داریم :

الف) $A=\{۵,۶\}\ ,\ B=\{۱,۲\}\ ,\ C=\{۳,۴\}$

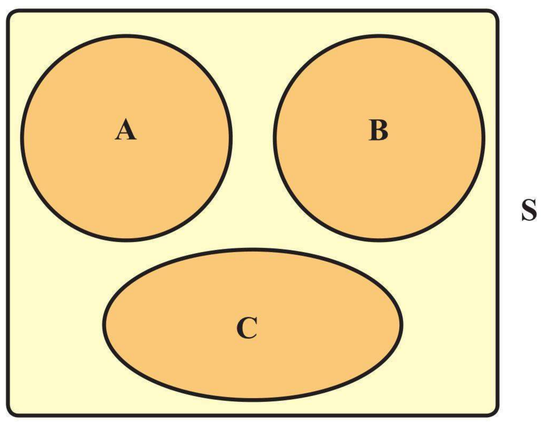
ب) $A'=\{۱,۲,۳,۴\}\ ,\ B'=\{۳,۴,۵,۶\}\ ,\ C'=\{۱,۲,۵,۶\}$

مثال ۴

کدام‌یک از شکل های زیر سه پیشامد دو به دو ناسازگار را نشان می دهد؟



جواب ⇒



کار در کلاس

۱ با توجّه به فعالیت ابتدای این درس (انداختن دو تاس) هر یک از پیشامدهای زیر را تشکیل دهید و جاهای خالی را پرکنید.

A = پیشامد آنکه هر دو تاس فرد باشند = $\{(۱,۱)\ ,\ (۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۱),(۵,۳),(۵,۵)\}$

B = پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۶ باشد = $\{(۱,۵)\ ,\ (۵,۱)\ ,\ (۲,۴),(۴,۲),(۳,۳)\}$

C = پیشامد آنکه تاس آبی مضرب ۳ بیاید = $\{(۳,۱)\ ,\ (۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$

الف پیشامد اینکه «هر دو تاس فرد و مجموع آنها ۶ باشد»

$(A \cap B) = \{(۱,۵)\ ,\ (۵,۱),(۳,۳)\} \rightarrow n(A \cap B) = ۳$

ب پیشامد آنکه «هر دو تاس فرد یا مجموع دو تاس ۶ باشد»

$A \cup B = \{(۱,۱)\ ,\ (۱,۳)\ ,\ (۳,۱)\ ,\ (۱,۵)\ ,\ (۵,۱)\ ,\ (۲,۴)\ ,\ (۴,۲)\ ,\ (۳,۳)\ ,\ (۳,۵)\ ,\ (۵,۳)\ ,\ (۵,۵)\}$

پ پیشامد آنکه (A−C) رخ بدهد؛ یعنی «هر دو تاس فرد باشند، ولی مجموع دو تاس ۶ نباشد.» پس داریم :

$$A-C=\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۵,۱),(۳,۵),(۵,۵)\}$$

ت پیشامد (C−B) را توصیف کنید و آن را تشکیل دهید. تاس اول مضرب ۳ باشد ولی مجموع دو تاس ۶ نباشد.

$$C-B=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

ث اگر پیشامد D را « مجموع دو تاس، عدد ۷ باشد» و پیشامد E را «هر دو تاس زوج باشند» تعریف کنیم ، آیا D و E ناسازگارند؟ چرا؟ بله ناسازگارند زیرا :

$$\left.\begin{array}{l} D=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\} \\ E=\{(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۶,۲),(۶,۴),(۶,۶)\} \end{array}\right\rangle D\cap E=\varnothing$$

۲ تاسی را می اندازیم ، روی فضای نمونه ای حاصل، پیشامدهای A و B و C را طوری تعریف کنید که :

الف A و B ناسازگار باشند. $A=\{۱,۲,۳\}\ ,\ B=\{۴,۵\}$

ب A و B و C دو به دو ناسازگار باشند. $A=\{۱\}\ ,\ B=\{۲,۳\}\ ,\ C=\{۵,۶\}$

پ $(A\cap B)$ و C ناسازگار باشند . $A=\{۱,۲,۳\}\ ,\ B=\{۳,۴\}\ ,\ C=\{۵,۶\}$

مثال ۵

یک تاس و ۲ سکه را با هم می‌اندازیم :

الف فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

$n(S)=۲\times۲\times\ldots۶\ldots=\ldots۲۴\ldots$

ب پیشامد آنکه «هردو سکه رو و تاس زوج باشد» را تشکیل دهید.

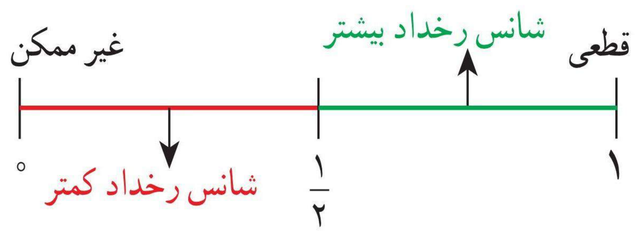
$A=\{(ر,ر,۲),(ر,ر,۴),(ر,ر,۶)\}$

پ پیشامد آنکه «هر دو سکه پشت یا تاس عدد ۵ بیاید» را تشکیل دهید.

$B=\{(پ,پ,۱),(پ,پ,۳),(پ,پ,۵),(پ,پ,۶),(پ,ر,۵),(ر,پ,۵),(ر,ر,۵)\}$

احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه‌گیری شانس)

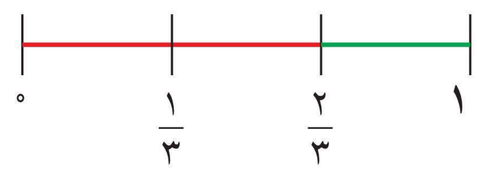
می‌دانیم اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و $A\subseteq S$ یک پیشامد در فضای S باشد، احتمالِ رخداد پیشامد A یعنی $P(A)$ که به‌صورت $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف می‌شود، عددی است حقیقی که $۰\le P(A)\le ۱$. همچنین می‌دانیم $P(A)$ هر چقدر به ۱ نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد A بیشتر و هر چقدر به‌صفر نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد A کمتر است. در واقع در مسائل احتمال با محاسبهٔ $P(A)$ شانس رخداد پیشامد A را اندازه‌گیری می‌کنیم.



مثال ۱

فرض کنیم هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و بدون تکرار رقم می‌توانیم بسازیم، روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم :

اگر پیشامدهای A و B را به ترتیب «خارج شدن عدد زوج» و «خارج شدن عدد فرد» تعریف کنیم، شانس رخداد کدام پیشامد بیشتر است؟



$S = \{۴۳,۳۴,۲۴,۴۲,۲۳,۳۲\}$

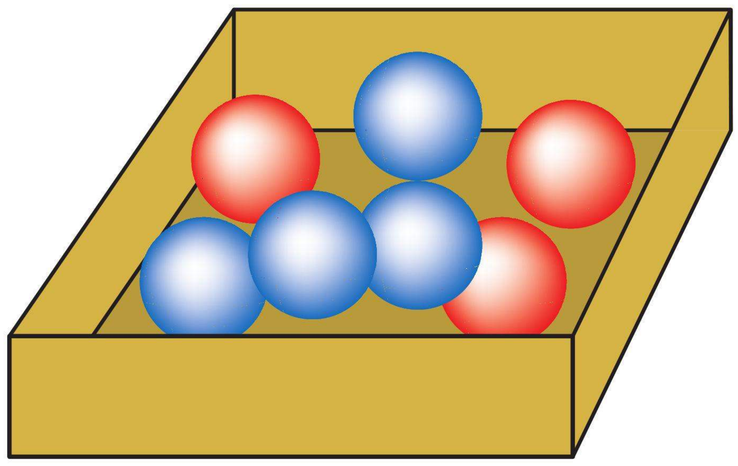
$A = \{۳۴ , ..۲۴.. , ..۴۲.. ,۳۲\} , B = \{..۴۳.. , ..۲۳..\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳} \ , \ P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

واضح است که $P(A) > P(B)$ ، پس شانس رخداد پیشامد A از شانس رخداد پیشامد B بیشتر است. (در این مثال تعداد عددهای زوج از تعداد عددهای فرد ، بیشتر است)

مثال ۲

در جعبه‌ای ۴ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه سه مهره به تصادف خارج کنیم، چقدر احتمال دارد :



الف) هر سه مهره آبی باشند.

ب) هر سه مهره همرنگ باشند.

پ) دقیقاً ۲ مهره همرنگ باشند.

الف) $n(S) = \binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۳!۴!} = ۳۵$

$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۳}}{۳۵} = \frac{۴}{۳۵}$$

ب) $P(B) = \frac{\binom{۴}{۳} + \binom{۳}{۳}}{۳۵} = \frac{۱}{۷}$

یا هرسه مهره آبی ، یا هر سه قرمز

پ) $P(C) = \frac{\binom{۴}{۲} \times \binom{۳}{۱} + \binom{۳}{۲} \times \binom{۴}{۱}}{۳۵} = \frac{۱۸+۱۲}{۳۵} = \frac{۶}{۷}$

دو مهرهٔ قرمز و یک مهرهٔ آبی یا دو آبی و یک قرمز

فعالیت

اگر S فضای نمونه‌ای متناهی و ناتهی برای یک آزمایش تصادفی باشد و A و B پیشامدهایی در این فضا باشند، در این‌صورت :

I) $۰ \le P(A) \le ۱$

زیرا : $A \subseteq S \Rightarrow ۰ \le n(A) \le n(S) \Rightarrow \frac{۰}{n(S)} \le \frac{n(A)}{n(S)} \le \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow ۰ \le P(A) \le ۱$

II) $P(\varnothing) = ۰ \ , P(S) = ۱$

آندری نیکولاویچ کولموگوروف ریاضی‌دان اهل روسیه بود که دستاوردهای برجسته‌ای در زمینه های احتمال دارد. او برای اولین بار در سال ۱۹۳۳ میلادی اصولی تحت عنوان اصول احتمال را معرفی کرد.

زیرا : $P(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n(S)}=\frac{۰}{n(S)}=۰$, $P(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=۱$

III) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

زیرا : $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ $\xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر } n(S)}$

$$\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S، همواره تساویِ زیر برقرار است :

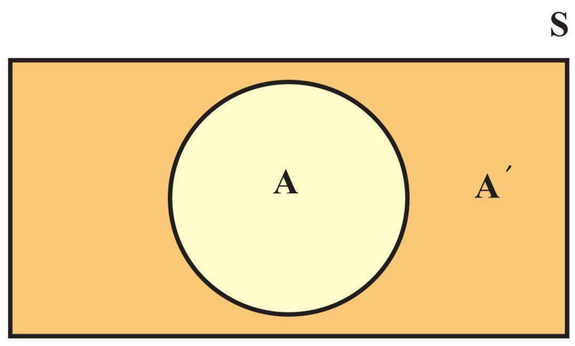
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، این تساوی به‌صورت زیر نوشته می شود :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

کار در کلاس

اگر A' متمم پیشامد A در فضای نمونه‌ایِ S باشد، (A و A' ناسازگارند) نشان دهید.



$P(A)=۱-P(A')$

می‌دانیم $P(A\cup A')=P(S)=$ ۱

از طرفی $P(A\cup A')=P(A)+P(A')\Rightarrow P(A)+P(A')=۱\Rightarrow \begin{cases}P(A)=۱-P(A')\\P(A')=۱-P(A)\end{cases}$

مثال ۱

اگر دو تاس را با هم بیندازیم، چقدر احتمال دارد :

الف هر دو تاس زوج باشند؟ (می‌دانیم در انداختن دو تاس $n(S)=۶^۲=۳۶$)

پیشامد هر دو زوج $A=\{(۲,۲)\ ,\ (۲,۴)\ ,\ (۴,۲)\ ,\ (۲و۶),(۶و۲),(۴و۶),(۶و۴),(۴و۴),(۶,۶)\}$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

ب مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس فرد باشند

مجموع دو تاس ۸ $=B\rightarrow B=\{(۳,۵)\ ,\ (۵,۳)\ ,\ (۲,۶)\ ,\ (۶,۲),(۴,۴)\}$

هر دو تاس فرد $=C\rightarrow A=\{(۱و۱),(۱و۳),(۱و۵),(۳و۱),(۳و۳),(۳و۵),(۵و۱)\ ,\ (۵و۳),\ (۵و۵)\}$

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=\frac{۵}{۳۶}+\frac{۹}{۳۶}-\frac{۲}{۳۶}=$$

$$\left((B\cap C)=\{(۳,۵)\ ,\ (۵,۳)\}\Rightarrow P(B\cap C)=\frac{۲}{۳۶}\right)$$

پ مجموع دو تاس ۷ یا هر دو زوج باشند؟

$$D=\text{مجموع دو تاس }۷\rightarrow D=\{(۱,۶)\ ,\ (۶,۱)\ ,\ (۲,۵)\ ,\ (۵,۲),\ (۳,۴),\ (۴,۳)\}$$

$$A=\text{هر دو تاس زوج}\rightarrow n(A)=۹\ ,\ (A\cap B)=\varnothing$$

$$\Rightarrow P(D\cup A)=P(D)+P(A)=\frac{۶}{۳۶}+\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱۵}{۳۶}$$

ت مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ باشد؟

می‌دانیم مجموع دو تاس از ۲ تا ۱۲ می‌تواند تغییر کند و چون تعداد حالت‌هایی که مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ است، زیاد و محاسبهٔ آن طولانی است، از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم.

پیشامد مجموع کمتر از ۱۱ $=A$

$$A'=\{(۶,۶)\ ,\ (۶,۵)\ ,\ (۵,۶)\}\ \text{(پیشامد مجموع، بزرگ‌تر یا مساوی ۱۱)}$$

$$\Rightarrow P(A')=\frac{۳}{۳۶}\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۳}{۳۶}=\frac{۳۳}{۳۶}$$

ث حاصل‌ضرب دو عدد رو شده ۱۲ باشد؟

$$A=\{(۲,۶)\ ,\ (۶و۲)\ ,\ (۴و۴)\ ,\ (۴و۳)\}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}$$

مثال۲

اگر حروف کلمهٔ جهانگردی را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر احتمال دارد :

الف حرف «ی» آخر باشد؟

ب دو حرف «ی» و «د» کنار هم باشند؟

پ با حرف «ج» شروع و به حرف «ی» ختم شود؟

حل :

طبق مثال حل شده در فصل ۶ داریم :

$$n(C)=۱\times۲\times.....\times۶$$

$$P(C)=\frac{۶!}{۸!}=\frac{۱}{۵۶}$$

الف) $P(A)=\frac{۷!}{۸!}=\frac{۱}{۸}$

ب) $P(B)=\frac{۲!\times۷!}{۸!}=\frac{۲}{۸}$

پ) ج ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ی

تو کز سرای طبیعت نمیروی بیرون
کجا به کوی طریقت گذر توانی کرد

فرض کنیم تعداد دکمه‌های یک رایانه ۵۰ عدد باشد و کودکی که خواندن و نوشتن نمی‌داند، به صورت تصادفی شروع به تایپ کردن کند. چقدر احتمال دارد که یک کلمه مانند «طبیعت» را تایپ کند؟

از آنجایی که رایانه ۵۰ دکمه دارد احتمال انتخاب هر حرف مانند «ط» برابر است با $\frac{۱}{۵۰}$ چون این کلمه ۵ حرف دارد احتمال تایپ آن برابر است با

$$\frac{۱}{۵۰}\times\frac{۱}{۵۰}\times\frac{۱}{۵۰}\times\frac{۱}{۵۰}\times\frac{۱}{۵۰}=\frac{۱}{۵۰^{۵}}$$

اگر همین کودک بخواهد بیت بالا را به طور تصادفی تایپ کند احتمال آن چقدر است؟ این عدد چقدر کوچک است؟

حال اگر شعری که این بیت در آن قرار دارد بخواهیم تصادفی تایپ کنیم احتمال آن چقدر می‌شود؟

اگر کسی به شما بگوید به طور تصادفی کودکی کتاب حافظ را تایپ کرد شما باور می‌کنید؟

طبیعتی که در اطراف ما است بسیار پیچیده‌تر از شعر حافظ است، آیا می‌توان پذیرفت که به طور تصادفی به‌وجود آمده است؟

تمرین

۱ هر یک از اعداد طبیعی و زوجِ کوچک‌تر از ۱۱ را روی یک کارت می‌نویسیم و یکی از این کارت‌ها را به‌تصادف برمی‌داریم :

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش یا پدیدهٔ تصادفی را مشخص کنید. $S=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$

ب) چه تعداد پیشامد تصادفی را روی این فضای نمونه‌ای می‌توان تعریف کرد؟ $۲^۵=۳۲$

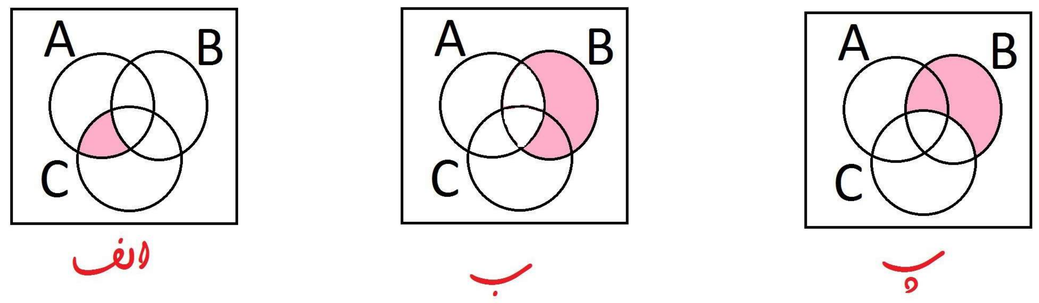
پ) پیشامد A را که در آن «عدد روی کارت انتخاب شده بر ۴ بخش‌پذیر باشد»، مشخص کنید. $A=\{۴,۸\}$

۲ فرض کنید A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. هر یک از عبارت‌های توصیفی زیر را با نمودار ون نمایش دهید و هاشور بزنید.

الف) پیشامدهای A و C رخ بدهند؛ ولی B رخ ندهد.

ب) فقط پیشامد B رخ بدهد.

پ) پیشامد B رخ بدهد و C رخ ندهد.



۳ هر یک از ارقام ۱ تا ۸ را روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در یک کیسه قرار می‌دهیم؛ سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را تعیین کنید :

الف) فضای نمونه‌ای و پیشامد A که در آن «عدد روی کارت زوج باشد». $A=\{۲,۴,۶,۸\}$ ، $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ فضای نمونه ای

ب) پیشامد B که در آن «عدد روی کارت اول باشد». $B=\{۲,۳,۵,۷\}$

پ) پیشامد C که در آن «عدد رو شده بزرگ‌تر از ۲ باشد». $C=\{۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$

۴ خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان این خانواده را و پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید.

$S=\{ppp,ppd,pdp,dpp,pdd,dpd,ddp,ddd\}$ فضای نمونه ای $E=\{ppd,pdp,dpp,pdd,dpd,ddp,ddd\}$ پیشامد

۵ سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید دو سکّهٔ دیگر را می‌اندازیم :

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد آنکه «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید. $\{(p,۱),(p,۲),(p,۳).(p,۴),(p,۵),(p,۶),(r,r,r),(r,p,r),(r,r,p),(r,p,p)\}$

پ) پیشامد آنکه «حداقل ۲ سکه رو بیاید» را مشخص کنید.

$\{(p,۲)(p,۴)(p,۶)\}$

$\{(r,r,r),(r,p,r),(r,r,p)\}$

۶ می‌خواهیم از بین ۳ دانش‌آموز کلاس دهم رشتهٔ ریاضی و ۲ دانش‌آموز دهم رشتهٔ تجربی یک تیم دو نفرهٔ تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد :

الف) هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۲}\times\binom{۲}{۰}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۴\times۱}{۱۰}=\frac{۴}{۱۰}$$

ب) هر دو نفر، هم‌رشته باشند؟

$$P(B)=\frac{\binom{۴}{۲}\times\binom{۲}{۰}+\binom{۴}{۰}\times\binom{۲}{۲}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۴+۱}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

پ) ۱ نفر از رشتهٔ ریاضی و ۱ نفر از رشتهٔ تجربی باشد؟

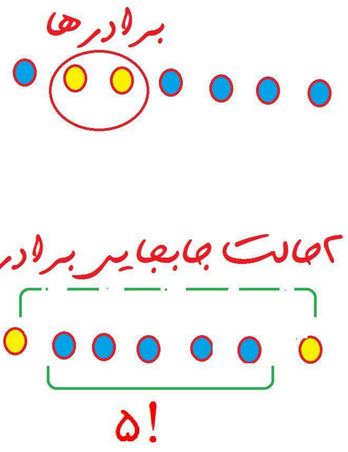
$$P(C)=\frac{\binom{۴}{۱}\times\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۴\times۲}{۱۰}=\frac{۴}{۵}$$

Hamkelasi.ir

۷ یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A و B را می‌پذیرد. اگر ۳۴ درصد از مشتریان کارت نوع A ($P(A)=\frac{۳۴}{۱۰۰}$) و ۶۲ درصد کارت نوع B و ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۴۴}{۱۰۰}+\frac{۶۲}{۱۰۰}-\frac{۱۵}{۱۰۰}=\frac{۸۱}{۱۰۰}$$

۸ اگر ۷ نفر که دو نفر آنها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند ، چقدر احتمال دارد :



الف) دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟

تعداد حالت های دو برادر

$$P(A)=\frac{۶!\times ۲!}{۷!}=\frac{۲}{۷}\qquad \Rightarrow P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۲}{۷}=\frac{۵}{۷}$$

ب) یکی از آنها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

$$P(B)=\frac{۵!\times ۲}{۷!}=\frac{۱}{۲۱}$$

۹ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $A\subseteq B$ ، ثابت کنید، $P(A)\le P(B)$.

$$A\subseteq B\Rightarrow n(A)\le n(B)\xrightarrow{\div n(S)}\frac{n(A)}{n(S)}\le\frac{n(B)}{n(S)}\Rightarrow P(A)\le P(B)$$

مادر عصر احتمال به سر می‌بریم
در عصر شک و شاید
در عصر پیش بینی وضع هوا
از هر طرف که باد بیاید
در عصر قاطعیت تردید

عصر جدید
عصری که هیچ اصلی
جز اصل احتمال، یقینی نیست

اما من
بی نام تو
حتی
یک لحظه احتمال ندارم

چشمان تو
عین الیقین من
قطعیت نگاه تو

دین من است
من از تو ناگزیرم
من
بی نام ناگزیر تو می میرم

قیصر امین پور

تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه

آیا تاکنون به نقش اعداد و ارقام در زندگی روزمرهٔ یک خانواده فکر کرده‌اید؟

خانواده‌ای را که شامل پدر، مادر و فرزندان است، در نظر بگیرید.

اعضای این خانواده در فصل بهار، می‌خواهند به یک مسافرت تفریحی به یکی از شهرهای کشور بروند.

برای این منظور پدر و مادر خانواده با پیگیری اخبار هواشناسی، به دنبال تعیین مناسب ترین زمان برای مسافرت خود هستند. در این اخبار، کارشناس هواشناسی می گوید :

«براساس اعداد و ارقام جمع آوری شده، دربارهٔ میزان دمای هوا، رطوبت جوی و بارش باران طی ده روز گذشته و با استفاده از روش‌های مدل‌بندی هواشناسی، پیش‌بینی می‌شود، دمای هوا طی سه روز آینده ۵ درجه گرم‌تر شود و بدون تغییر در میزان رطوبت جوی، هوا صاف آفتابی باشد.»

آنها پس از شنیدن این گزارش، تصمیم می‌گیرند سه روز آینده را برای مسافرت انتخاب کنند.

بنابراین هرچه اطلاعات دقیق‌تر و کامل‌تر باشد و از روش‌های مناسب‌تری برای پیش‌بینی استفاده شود، تصمیم‌گیری‌های بهتری در خانواده گرفته می‌شود.

تعریف آمار و علم آمار :

آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

کار در کلاس

۱ در پیرامون خود، مثال‌هایی را از تصمیم‌گیری یا پیش‌بینی بر اساس اعداد و ارقام بیاورید.

تصمیم گیری برای کشت انواع نفل با توجه به میزان محصول آنها / تصمیم گیری برای انتخاب دانشجو نمونه

۲ مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.

جمع آوری اعداد و ارقام ← سازماندهی و نمایش اعداد؟ ← تحلیل و تفسیر داده ← نتیجه گیری و قضاوت؟

۳ با درنظر گرفتن اخبار هواشناسی مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.

جمع آوری اطلاعات؟ ← سازمان دهی و نمایش آمار مربوط به دمای هوا، میزان رطوبت و بارش در ایستگاه‌های هواشناسی ← تحلیل و تفسیر آمار هواشناسی ← پیش‌بینی و تصمیم گیری در مورد وضعیت هوا در روز های آینده؟

۴ تفاوت آمار و علم آمار در چیست؟ آمار، مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار، مجموعه ای از روش ها است، این روش ها عبارتند از جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده ها و در نهایت نتیجه گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده ها و آزمایش های تصادفی

۵ مدیر کارخانه‌ای برای پیدا کردن تعدادکل لامپ‌های معیوب در یک ماه آینده، می‌خواهد یک تحقیق آماری انجام دهد. برای این منظور تعداد لامپ‌های معیوب را در چند روز کاری به صورت زیر جمع آوری کرده است.

روز کاری پنجم	روز کاری چهارم	روز کاری سوم	روز کاری دوم	روز کاری اول	روزهای کاری
۱۸۰	۱۲۰	۹۰	۷۰	۵۰	تعداد لامپ‌های معیوب

کارخانه لامپ‌سازی

براساس داده‌های به دست آمده، به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) روند تغییر اعداد و ارقام در این تمرین نشان دهندهٔ چه چیزی است؟ افزایش تعداد لامپ های معیوب

ب) در این تمرین چه چیزی به‌عنوان آمار محسوب می‌شود؟ داده ها (۱۸۰و۱۲۰و۹۰و۷۰و۵۰)

پ) بهترین تصمیمی که مدیر کارخانه براساس «علم آمار» می‌تواند بگیرد، چیست؟

توقف یا اصلاح خط تولید لامپ‌ها ☑ ادامهٔ خط تولید لامپ‌ها ☐

۶ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است :

الف) اولین قدم در استفاده از «علم آمار»، جمع آوری داده‌هاست درست

ب) پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده، نتیجهٔ استفاده از «علم آمار» است درست

پ) «علم آمار»، همان اعداد و ارقام است نادرست

۷ به شکل روبه‌رو توجه کنید : آیا این شکل را می‌توان به اعداد و ارقام تبدیل کرد؟ اعداد و ارقام آن چگونه‌اند؟ برای پاسخ به این سؤالات، کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر را مطالعه کنید. بله ، کیفیت تصویر به کمک پیکسل های آن

کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر (پردازش تصویر)

کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر

هر تصویر از تعداد زیادی مربع‌های کوچک تشکیل شده است. هر یک از این مربع‌های کوچک «پیکسل» نام دارند و به هر پیکسل می‌توان یک عدد را نسبت داد که بیانگر مقدار روشنایی آن است.

در واقع هر تصویر از یک جدول عددی تشکیل می‌شود که هر یک از اعداد، مقدار روشنایی هر پیکسل را نشان می‌دهند. جدول مربوط به هر تصویر را به راحتی می‌توان به دست آورد.

در اینجا نکتهٔ حایز اهمیت، کاربرد «پردازش تصویر» است.

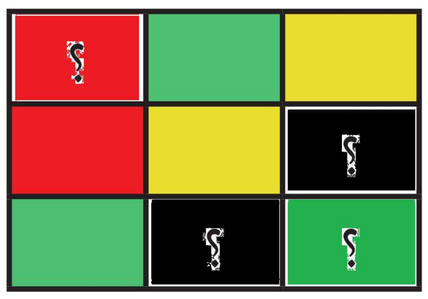
«پردازش تصویر» یکی از موضوعات بسیار مهم در مهندسی کامپیوتر محسوب می‌شود. رشد استفاده از پردازش تصویر در سیستم‌های «کنترل هوشمند سرعت»، «خواندن اتوماتیک پلاک خودرو در طرح های زوج و فرد»، «طرح ترافیک» و «ثبت تخلفات خودرو» در سال‌های اخیر مشهود بوده است.

با استفاده از معیارهایی که در علم آمار وجود دارد، می‌توان به بررسی کیفیت تصاویر پرداخت و تصاویر مخدوش و نامناسب را با تصاویر حقیقی‌شان مقایسه کرد.

۸ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ نامیده می‌شود. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ زرد را با عدد ۲، رنگ قرمز را با عدد ۱ و رنگ مشکی را با عدد صفر، نشان دهیم. جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید.

۱	۴ ؟	۲ ؟
۱ ؟	۲ ؟	۰
۴ ؟	۰	۳

جدول عددی



شکل

جامعه و نمونه

فعالیت

الف چاقی امروزه، به عنوان یکی از مسائل مهم و اساسی در زمینهٔ سلامت افراد محسوب می‌شود. برای اطلاع بیشتر، کاربرد علم آمار در علوم پزشکی را مطالعه کنید.

کاربرد علم آمار در پزشکی (چاقی)

یکی از کاربردهای علم آمار در علوم پزشکی، بررسی موضوع چاقی است. برای اینکه میزان چاقی یک فرد را بسنجیم، از معیاری تحت عنوان، معیار «شاخص تودهٔ بدن» استفاده می کنیم. این معیار از تقسیم وزن افراد (W) برحسب کیلوگرم بر توان دوم قد افراد (H) برحسب متر یا به عبارت دیگر $\frac{W_{kg}}{(H_m)^2}$ محاسبه می‌شود و براساس آن نتایج زیر به دست می‌آید :

شاخص تودهٔ بدن	طبقه‌بندی
کمتر از ۱۸/۵	کم وزن
۱۸/۵ تا ۲۴/۹	وزن طبیعی
۲۵ تا ۲۹/۹	اضافه وزن
۳۰ تا ۳۴/۹	چاقی درجه یک
۳۵تا۳۹/۹	چاقی درجه دو
بیشتر از ۴۰	چاقی درجه سه

کاربرد علم آمار و احتمال در پزشکی

براساس علم آمار با استفاده از مدل‌های آماری مناسب، عوامل مؤثر بر شاخص تودهٔ بدن شناسایی می‌شود.

به عنوان مثال، عواملی همچون «رژیم غذایی ناسالم» و«کم تحرکی» می‌توانند در بالا رفتن این معیار و ایجاد بیماری چاقی مؤثر باشند. بنابراین، امروزه با توجه به تغییر شیوه‌های زندگی، از جمله ماشینی شدن و استفاده از خوراکی‌های آماده، نیاز به استفاده از رژیم غذایی سالم، عدم مصرف خوراکی‌های مضر و همچنین ورزش و فعالیت بدنی، بسیار ضروری است. به‌همین منظور، ورزش صبحگاهی و ایجاد بوفهٔ سالم در مدارس، گامی کوچک؛ اما مؤثر در جهت سلامت افراد است.

همکار محترم ، این عدد به ۷۴ تصحیح شود.

مثال ۱

فرض کنید وزن شخصی ۱۰۰ کیلوگرم و قدش ۱ متر و ۴۷ سانتی‌متر باشد. شاخص تودهٔ بدن شخص به‌صورت زیر است :

$$\text{شاخص تودهٔ بدن} = \frac{۱۰۰}{(۱/۷۴)^۲} = ۳۳/۰۲$$

۱ با مراجعه به جدول موجود در کاربرد علم آمار و احتمال در پزشکی، دربارهٔ چاق بودن این شخص به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟ چاق (چاقی درجه ۱)

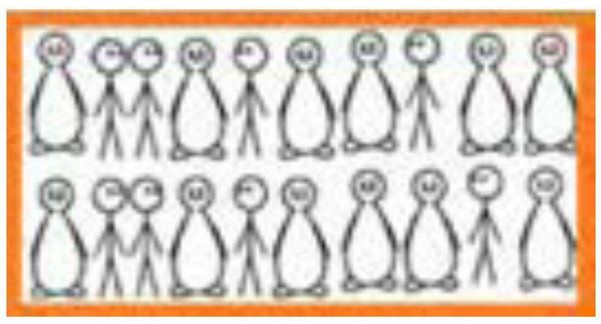
۲ دربارهٔ چاق بودن خودتان و اعضای خانوادهٔ خود اظهار نظر کنید.

ب شکل «الف»، افراد یک شهر را نشان می دهد که شامل افراد عادی و افراد چاق می‌باشند.

شکل الف ــ افراد یک شهر

با هدف به دست آوردن آمار افراد چاق و درصد این افراد، فرض کنیم بخواهیم تعداد کل افراد چاق را که در این شهر زندگی می‌کنند، بشماریم یا به عبارت دیگر سرشماری کنیم.

به نظر شما، این کار به سادگی انجام می‌شود؟



شکل ب ــ افراد انتخابی از شهر

همان گونه که احتمالاً حدس زده‌اید، جمع آوری آمار تمام شهر، کار آسانی نیست. همان‌گونه که در شکل «ب» دیده می‌شود، به جای شمارش کل افراد این شهر، می‌توان تعدادی از افراد شهر را انتخاب کرد و براساس آن، پیش‌بینی کرد که چند درصد از افراد این شهر چاق‌اند.

به کمک افراد انتخابی از شهر در شکل «ب» پیش‌بینی کنید که چند درصد افراد این شهر چاق‌اند.

همان‌طور که می‌بینید این بار پاسخ به سؤالات، با دقت بیشتر و آسان‌تر داده می‌شود و به‌راحتی درصد افراد چاق در زیر مجموعهٔ انتخابی قابل محاسبه است.

تعریف جامعه یا جمعیت

مجموعهٔ تمام افراد یا اشیایی که دربارهٔ یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد، **جامعه** یا **جمعیت** نامیده می‌شود و هریک از این افراد یا اشیا را **عضو جامعه** می‌نامند.

تعریف اندازه یا حجم جامعه

تعداد اعضای جامعه را **اندازهٔ جامعه** یا **حجم جامعه** گویند.

به عنوان مثال، دانش‌آموزان یک مدرسه می‌توانند یک جامعه باشند و هریک از دانش‌آموزان مدرسه عضو این جامعه هستند.

تعریف نمونه

بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، **نمونه** گویند و هریک از افراد یا اشیای انتخاب شده را **عضو نمونه** گویند.

تعریف اندازه یا حجم نمونه

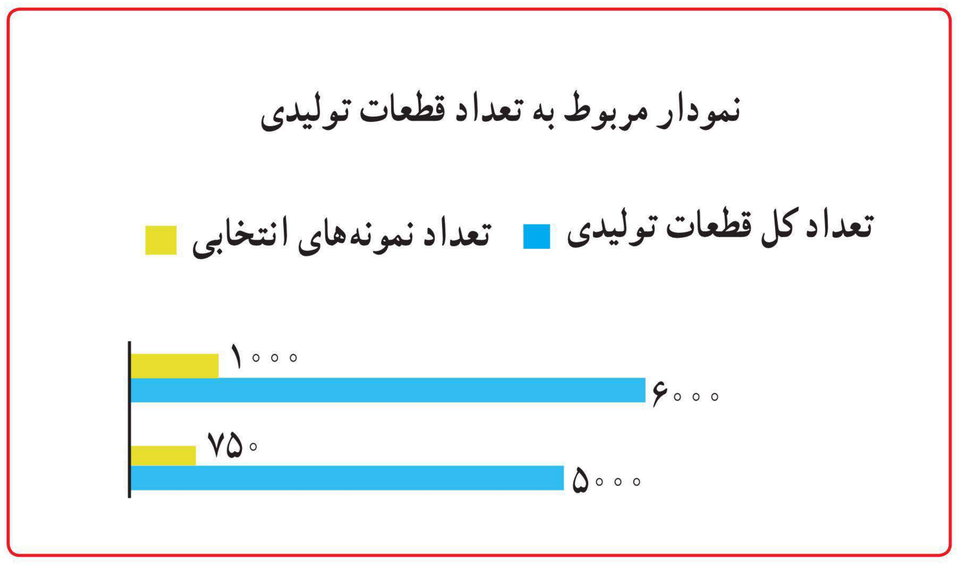
تعداد اعضای نمونه را **اندازهٔ نمونه** یا **حجم نمونه** گویند.

به عنوان مثال دانش‌آموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانش‌آموزان مدرسه هستند و هریک از دانش‌آموزان کلاس، عضو نمونه محسوب می‌شوند.

کار در کلاس

در نمودار روبه‌رو تعداد کل قطعات تولیدی دو کارخانهٔ «الف» و «ب» مشخص شده است. برای شناسایی تعداد قطعات معیوب، نمونه‌هایی از تعداد کل قطعات تولیدی انتخاب شده که در نمودار روبه‌رو ارائه شده است.

با توجه به اعداد و ارقام موجود در نمودار، جدول صفحهٔ بعد را کامل کنید.



اندازهٔ نمونه	نمونه	اندازهٔ جامعه	عضو جامعه	جامعه
۱۰۰۰	قطعات تولیدی انتخابی	۶۰۰۰	قطعات تولیدی	کارخانه الف
۷۵۰	قطعات تولیدی انتخابی	۵۰۰۰	قطعات تولیدی	کارخانه ب

تمرین

۱ می‌خواهیم دربارهٔ کیفیت محصولات تولیدی یک کارخانه، تحقیقی انجام دهیم. برای این منظور، از تعداد کل قطعات تولید شده در کارخانه که برابر با ۱۰۰۰۰ قطعه است، ۱۰۰ قطعه انتخاب می‌شود. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را کامل کنید :

ویژگی مورد بررسی	اندازهٔ نمونه	اندازهٔ جامعه	جامعه
کیفیت محصولات تولیدی	۱۰۰	۱۰۰۰۰	کل قطعات تولید شده

۲ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است :

الف) اندازهٔ جامعه کمتر از اندازهٔ نمونه است نادرست

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه‌اند نادرست

پ) نمونهٔ زیر مجموعه‌ای از جامعه است درست

۳ در شکل زیر، دانش‌آموزان یک مدرسه در صف صبحگاهی مشاهده می‌شوند.

هر صف افقی نشان‌دهندهٔ تعداد دانش‌آموزان یک کلاس است. جامعه و اعضای آن را مشخص کنید و دو نمونه دلخواه از این جامعه را ارائه کنید.

جامعه : کل دانش آموزان مدرسه

اعضای جامعه : هر یک از دانش آموزان مدرسه

نمونه :

الف) دانش آموزانی که یکان کد ملی آنها مضرب ۴ باشد .

ب) دانش آموزانی که ماه تولد آنها زوج باشد .

تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس سوم: متغیر و انواع آن

فعالیت

شکل روبه‌رو محصولات هلوی یک مزرعهٔ کشاورزی را نشان می‌دهد. میوه‌های هلوی این مزرعه را به عنوان اعضای جامعه در نظر بگیرید. یکی از میوه‌ها را انتخاب کنید. برای بررسی مرغوبیت این میوه، می‌توان به چند ویژگی از آن مانند وزن و کیفیت توجه کرد.
به کمک یک ترازوی دیجیتالی، وزن آن به راحتی قابل اندازه‌گیری است.

مزرعه هلو

الف) برای اندازه‌گیری کیفیت میوهٔ هلو چه باید کرد؟ آیا به کمک ابزار اندازه‌گیری می‌توان به این سؤال پاسخ داد؟ درجه بندی میوه ها

ب) آیا ترازو، پاسخ این سؤال را هم می‌دهد؟ خیر

پ) کشاورز چگونه می‌تواند کیفیت میوهٔ هلوی تولیدی خود را بالا ببرد؟ درجه بندی میوه ها

برای پاسخ به سؤالات «الف» و «ب» باید گفت که هیچ ترازو و یا وسیله‌ای که بتواند میزان کیفیت میوهٔ هلو را اندازه‌گیری کند، وجود ندارد. با این حال کشاورزان با توجه به کیفیت آن، این میوه را به صورت «درجهٔ یک»، «درجهٔ دو» و «درجهٔ سه» به بازار عرضه می‌کنند. به عبارت بهتر، عدد یک را به میوه‌های هلوی بسیار مرغوب و درشت، عدد دو را به میوه‌های هلوی متوسط و عدد سه را به میوه‌های هلوی ریز نسبت می‌دهند.
برای پاسخ به سؤال «پ»، کاربرد علم آمار در مهندسی کشاورزی را مطالعه کنید.

کاربرد علم آمار در مهندسی کشاورزی (طراحی و نحوه تولید محصولات)

علم آمار در مهندسی کشاورزی کاربرد بسیار زیادی دارد. یک مهندس کشاورزی همواره علاقه‌مند است تا کمیت و کیفیت تولید محصولاتش به بیشترین حد ممکن برسد. برای این منظور، مهندس کشاورزی از انواع کودها مانند نیترات آمونیوم، فسفر و ... استفاده می‌کند. اما سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود، آن است که چه میزان کود باید استفاده شود تا کمیت و کیفیت تولید محصولات آن به بیشترین مقدار برسد؟
اینجاست که علم آمار با طراحی آزمایش‌هایی، به این سؤال پاسخ می‌دهد. بدین‌منظور، قطعات مختلفی از زمین به طوری که از نظر رطوبت، حاصلخیزی خاک، نور و ... کاملاً یکسان باشند، در نظر گرفته می‌شود. سپس به مطالعهٔ درصدهای مختلف کودهای مورد نظر در این قطعات زمین پرداخته می‌شود.
به عبارت دیگر علم آمار در تعیین عوامل مؤثر مانند کودهای مورد استفاده در زمین کشاورزی و سطوحی از عوامل مانند درصدهایی از میزان استفادهٔ کودها برای رسیدن به تولیدات بیشتر کشاورزی به مهندسان کشاورزی کمک می‌کند.

تعریف متغیر و مقدار متغیر

شکل الف

متغیر، ویژگی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند. عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌گویند.

به عنوان مثال در شکل «الف» وزن و کیفیت میوهٔ هلو به عنوان دو متغیر مربوط به میوهٔ هلوست و مقادیر آن در جدول زیر آمده است :

مقدار متغیر	متغیر مربوط به میوهٔ هلو
۲۰۰ گرم	وزن هلو
درجه یک (۱)، درجه دو (۲) ، درجه سه (۳)	کیفیت هلو

کار در کلاس

شکل ب

۱ شکل «ب» یک خودرو را نشان می‌دهد، برخی از ویژگی‌های این خودرو مانند سرعت، میزان بنزین مصرفی و رنگ خودرو در شکل مشخص شده است.

«سرعت خودرو» و «میزان بنزین مصرفی»، قابل اندازه‌گیری است. به عنوان مثال حداکثر سرعت این خودرو در جاده‌ها ۱۲۰ کیلومتر برساعت است. به عبارت دیگر مقدار متغیر «سرعت خودرو» برابر با ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت است.

همچنین اگر خودرویی به عنوان مثال برای هر ۱۰۰ کیلومتر، ۸ لیتر بنزین مصرف کند؛ بنابراین مقدار متغیر «میزان مصرف خودرو» برابر با ۸ لیتر برای هر ۱۰۰ کیلومتر است.

ولی در این مثال رنگ خودرو قابل اندازه‌گیری نیست. می‌توان انواع رنگ‌های مشکی، سفید و . . . را به عنوان مقادیر متغیر «رنگ خودرو» در نظر گرفت و آنها را با اعداد دلخواهی مانند عدد یک برای رنگ مشکی و عدد دو برای رنگ سفید نشان داد.

به نظر شما چه متغیرهای دیگری در این خودرو می‌توان معرفی نمود؟

در سطرهای خالی مقدار هریک از متغیرهای معرفی شدهٔ جدید را بیان کنید.

متغیرهای یک خودرو	مقدار متغیر
حداکثر سرعت مجاز خودرو در جاده	۱۲۰
میزان بنزین مصرفی برای هر ۱۰۰ کیلومتر	۸
رنگ خودرو	سفید
تاریخ تولید خودرو	
سوخت مصرفی خودرو (بنزینی، دوگانه)	

۲ جدول زیر متغیرهایی را که دربارهٔ یک دانش‌آموز مطالعه شده است، نشان می‌دهد. مقدار این متغیرها را دربارهٔ خودتان در جدول زیر بنویسید.

متغیرهای یک دانش آموز	مقدار متغیر
سن دانش آموز	۱۵
نمره ریاضی نهم دانش آموز	۱۸
گروه خونی (A ، B ، O، AB)	B
قد دانش آموز	۱۴۰
وزن دانش آموز	۷۵

۳ با توجه به مطالب مربوط به کاربرد علم آمار در محیط زیست ، متغیرها و مقدار متغیرهای مربوط به یوزپلنگ ایرانی را در جدول روبه‌رو بنویسید.

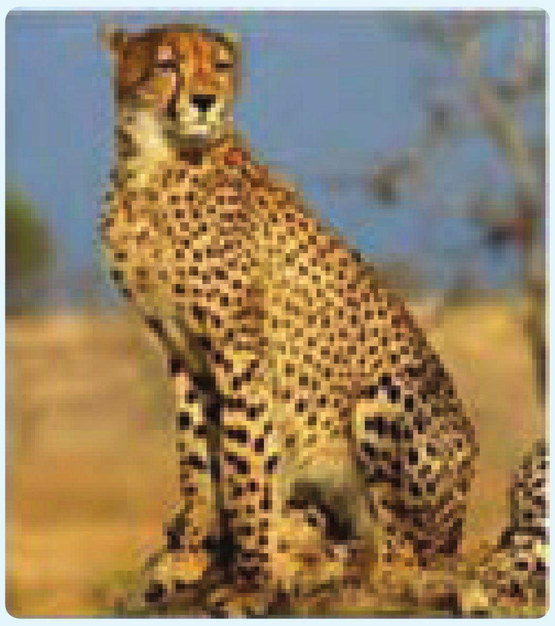
متغیر	مقدار متغیر
طول بدن	۱/۲ متر
ارتفاع شانه ار	
وزن	
طول دُم	

۴ در یک کارخانه، کارگران مشغول کارند. مهندس این کارخانه، این کارگران را بر اساس مهارت به صورت بسیار ماهر، ماهر، متوسط و ضعیف درجه بندی کرده است. متغیر و مقدار متغیر را برای کارگران بنویسید. متغیر : مهارت

بسیار ماهر ، ماهر ، متوسط ، ضعیف

۴ ۲ ۱ ۰

کاربرد علم آمار و احتمال در محیط زیست



کاربرد علم آمار و احتمال درمحیط زیست

علم آمار و احتمال در محیط زیست کاربرد دارد. به عنوان مثال با استفاده از این علم می‌توان به شناسایی و شناخت عوامل مؤثر بر زیستگاه‌های مطلوب حیوانات در حال انقراض اشاره کرد. این موضوع مدیران محیط زیست را در مدیریت و حفاظت از این زیستگاه‌ها یاری می‌کند.

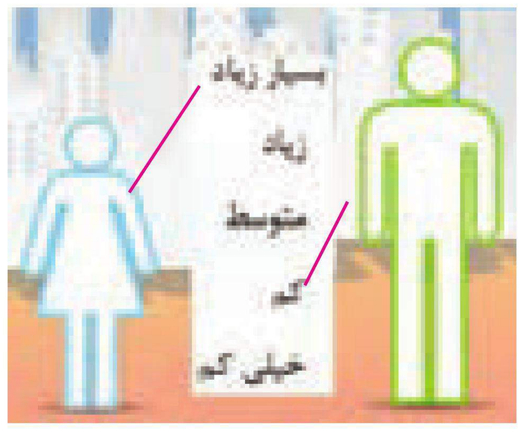
یکی از این حیوانات در حال انقراض «یوزپلنگ ایرانی» است. یوزپلنگ ایرانی یک زیرگونهٔ به شدّت در معرض خطر انقراض از یوزپلنگ است که اکنون تنها چند ده قلاده از آن در ایران یافت می‌شود. این جانور در مناطق بیابانی در سطح منطقه زندگی می‌کرد و سال‌هاست که نسل آن در معرض نابودی کلی قرار دارد. یوزپلنگ از خانوادهٔ گربه سانان به شمار می‌آید؛ اما به دلیل داشتن دست و پایی بلند، بدنی کشیده و باریک، و سینه‌های فراخ تا حدود زیادی به سگ‌های تازی شبیه است. در میان گربه‌سانان، یوز با داشتن ارتفاع شانه‌ای برابر با ۳۸ تا ۶۷ سانتی‌متر و وزنی بین ۲۷ تا ۴۰ کیلوگرم از جمله گربه سانان کوچک جثه به شمار می‌رود. اندازهٔ طول بدن آن به ۱/۲ متر می‌رسد و طول دم آن نیز میان ۴۸ تا ۶۶ سانتی‌متر است. همچنین سر این جانوران به نسبت کوچک است.

متغیرهای کمی و کیفی

فعالیت

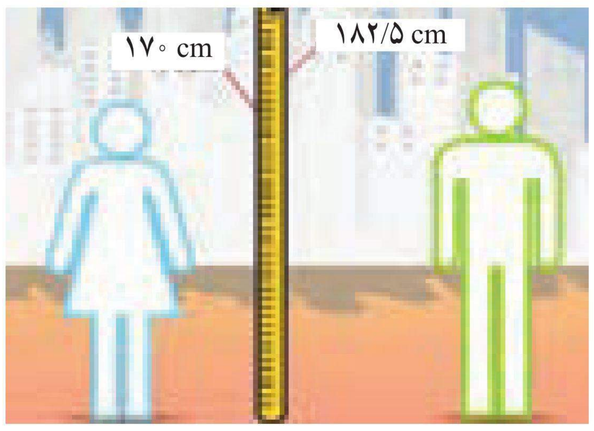
در یک شهر، با افراد مختلفی رو به رو می‌شویم و از آنها سؤالاتی می‌کنیم. آنها به صورت زیر، به سؤالات ما پاسخ داده‌اند. به عنوان مثال :

از یک آقا و خانم می‌پرسیم :
«چقدر از آشپزی کردن لذت می‌برید؟»

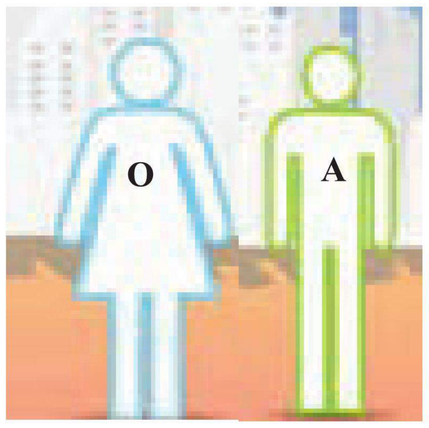


از مادر یک خانواده می‌پرسیم :
«چند فرزند دارید؟»

از همان خانم و آقا می‌پرسیم :
«قد شما چند سانتی متر است؟»



و سؤال آخر :
«گروه خونی خود را بگویید؟»

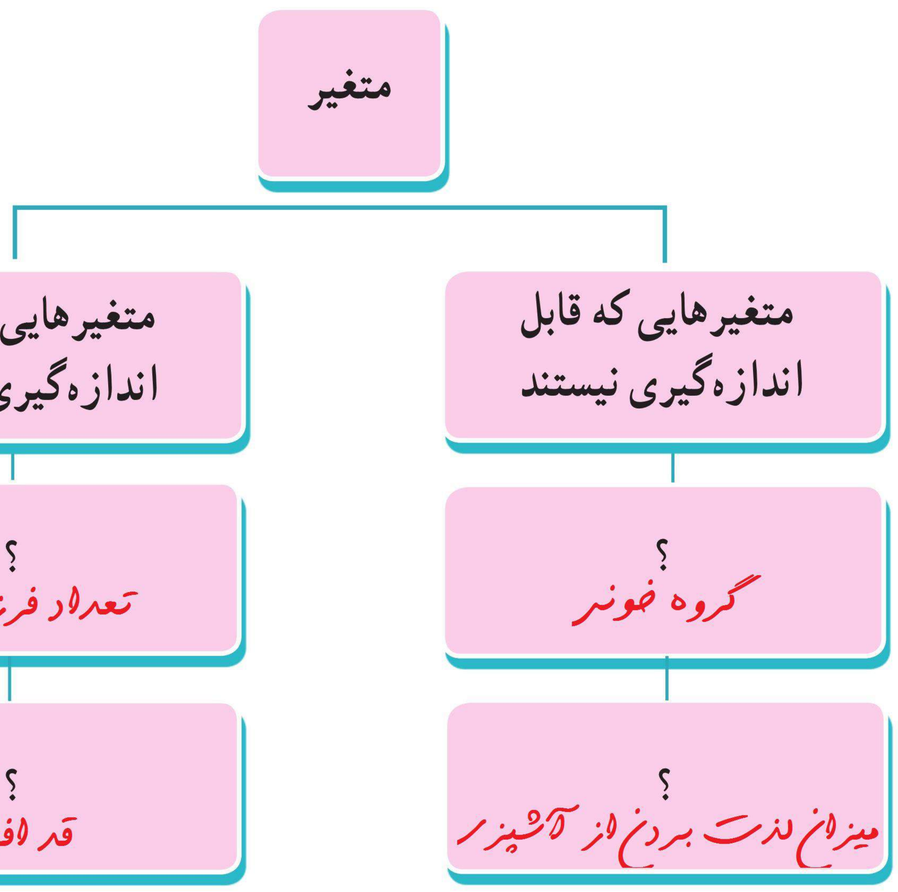


حال به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف با توجه به شکل‌های مورد نظر، پاسخ‌های افراد را در جدول زیر قرار دهید و آن را کامل کنید.

نام متغیر		
تعداد فرزندان	–	۲
قد افراد	۱۴۵	۱۴۰
گروه خونی	B	A
میزان لذت بردن از آشپزی	کم	زیاد

ب با توجه به متغیرهای بیان شده، کدام متغیرها قابل اندازه‌گیری‌اند و کدام نیستند؟ به‌جای علامت سؤال، نام متغیر مورد نظر را بنویسید.



تعریف متغیرهای کمی

متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری‌اند، «متغیرهای کمی» گویند. به عنوان مثال تعداد فرزندان خانواده و وزن افراد متغیرهای کمی‌اند.

تعریف متغیرهای کیفی

متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند، «متغیرهای کیفی» گویند. به عنوان مثال گروه خونی افراد و پاسخ سؤال «میزان لذت بردن از آشپزی» متغیرهای کیفی‌اند.

کار در کلاس

۱ با توجه به شکل‌ها، جملات را کامل کنید :

در شکل «الف»، تعداد مسافران یک قطار، یک متغیر کمی است.

در شکل «ب»، اقوام ایرانی یک متغیر کیفی است.

در شکل «پ»، قد فرد، یک متغیر کمی است.

در شکل «ت»، جنسیت افراد یک متغیر کیفی است.

۲ نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید :

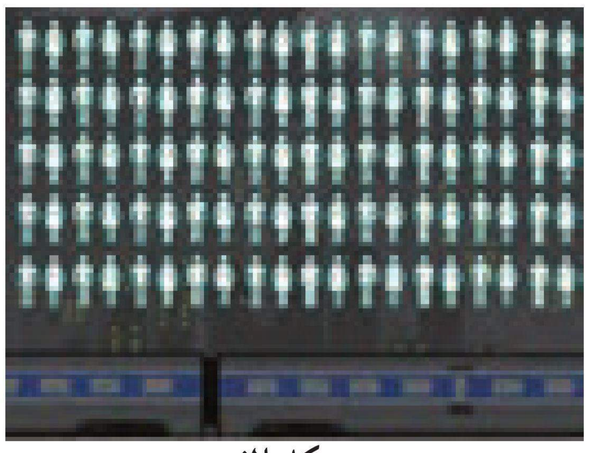
الف) انواع هواپیما (مسافربری، باربری، جنگنده) کمّی ☐ کیفی ☑

ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید. کمّی ☑ کیفی ☐

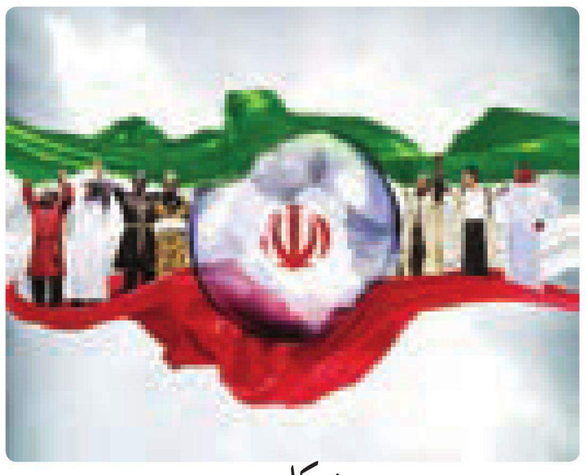
پ) رنگ چشم (میشی، آبی، قهوه‌ای) کمّی ☐ کیفی ☑

۳ جدول زیر را کامل کنید.

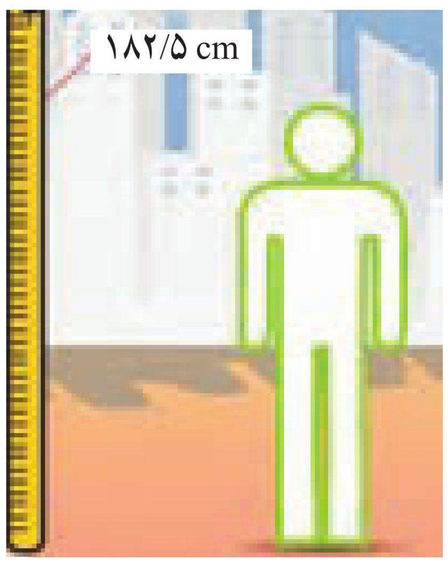
سؤال (متغیر)	پاسخ (مقدار متغیر)	نوع متغیر
موی شما چه رنگی است؟	مشکی، قهوه‌ای، طلایی، سفید، قرمز	کیفی
وزن شما چه عددی است؟	۶۰ تا ۷۰ کیلوگرم	کمی
چقدر از تماشای بازی فوتبال لذت می‌برید؟	بسیار زیاد، زیاد، متوسط، کم، بسیار کم، لذت نمی‌برم	کیفی



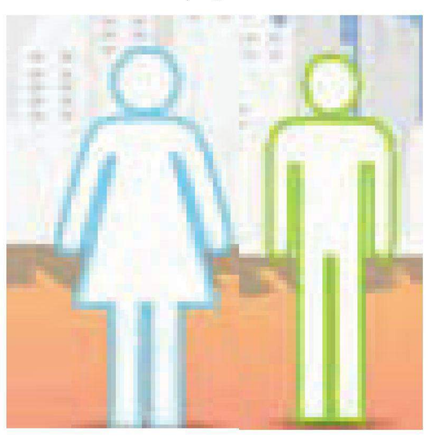
شکل الف



شکل ب



شکل پ



شکل ت

انواع متغیرهای کمّی

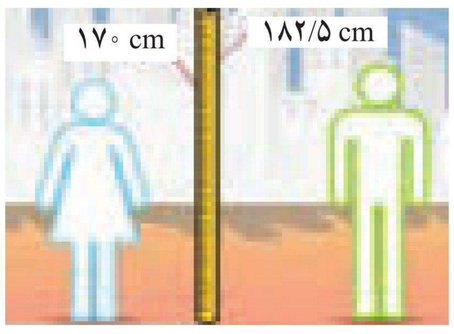
فعالیت

همان‌گونه که در فعالیت قبل مطرح شد، پاسخ دو سؤال زیر، متغیرهایی از نوع کمی‌اند.

۱ از مادر یک خانواده می‌پرسیم : چند فرزند دارید؟

برخی از جواب‌های ممکن : ۰، ۱، ۲، ۳و . . . .

۲ قد شما چند سانتی‌متر است؟



برخی از جواب‌های ممکن : ۱۵۰ سانتی‌متر تا ۱۷۰ سانتی‌متر، ۱۵۹ سانتی‌متر، ۱۶۰/۵ سانتی‌متر و . . .

۳ فرض کنید کمترین و بیشترین وزن در جامعهٔ دانش‌آموزان پایهٔ دهم کشور به‌ترتیب ۴۶ کیلوگرم و ۷۵ کیلوگرم باشد. در این صورت وزن تمام دانش‌آموزان کشور در بازهٔ [۷۵ , ۴۶] قرار می‌گیرد.

آیا هر عددی از این بازه می‌تواند وزن یک دانش‌آموز باشد؟ بله

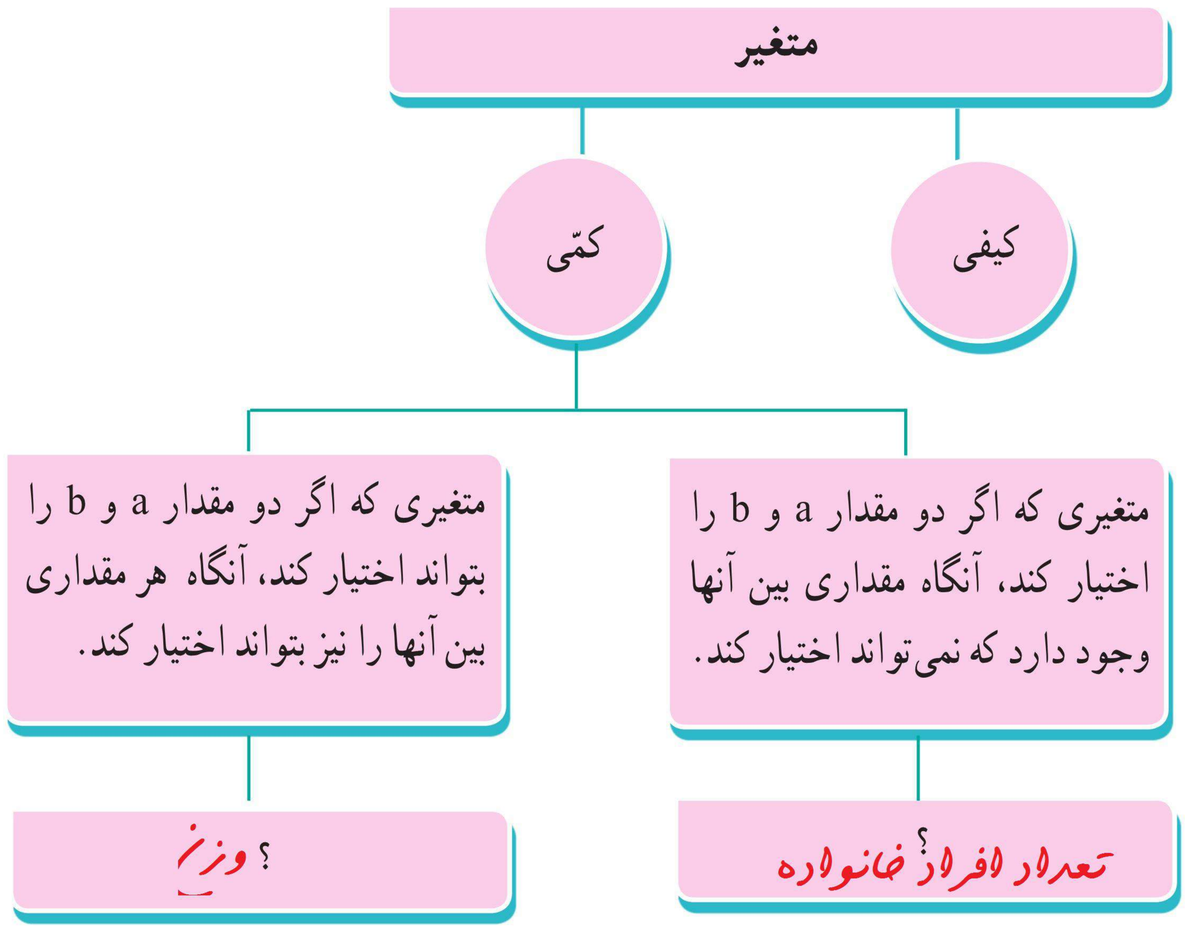
۴ فرض کنید کمترین و بیشترین تعداد فرزندان یک خانواده در کشور به‌ترتیب ۰ و ۲۰ باشد. در این صورت تعداد فرزندان هر خانواده در این کشور عددی صحیح از بازهٔ [۰ ,۲۰] خواهد بود. آیا هر عددی از این بازه می‌تواند نشان‌دهندهٔ تعداد فرزندان یک خانواده باشد؟ خیر

۵ متغیرهای مطرح شده در قسمت‌های ۳و ۴ کمی‌اند و یا کیفی؟ کمی

۶ چه تفاوتی در متغیرهای مطرح شده در قسمت‌های ۳ و ۴ وجود دارد که جواب‌های مربوط به آنها متفاوت است؟

وزن متغیر کمی و اعشار پذیر است ولی تعداد افراد خانواده متغیر کمی و اعشار ناپذیر می باشد .

۷ با توجه به قسمت‌های ۳و ۴ در شکل زیر به‌جای علامت سؤال، پاسخ مناسب قرار دهید.



انواع متغیر کمّی :

۱) متغیر پیوسته ۲) متغیر گسسته

تعریف متغیر پیوسته

متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آنها را نیز بتواند اختیار کند.
به عنوان مثال وزن یک دانش‌آموز می‌تواند ۴۶ کیلوگرم، ۴۷ کیلوگرم یا هر عددی بین این دو رقم باشد.

تعریف متغیر گسسته

متغیر گسسته، متغیری است که پیوسته نباشد. به‌عنوان مثال تعداد فرزندان یک خانواده متغیر گسسته است.

کار درکلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی، پیوسته یا گسسته بودن متغیرهای کمّی زیر را مشخص کنید.

همکاران محترم ، این کلمه از قلم افتاده ، لطف اصلاح شود .

الف سرعت خودرو یک متغیر کمّی پیوسته است. مقدار آن متغیر ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت است.

ب میزان مصرف بنزین این خودرو ، یک متغیر کمی پیوسته و مقدار آن برای هر ۱۰۰ کیلومتر ۸ لیتر است.

پ تعداد سرنشینان مجاز در این خودرو، یک متغیر کمی گسسته است و این تعداد برابر با ۴ است.

۲ انواع متغیرهای زیر را مشخص کنید :

الف) تعداد ماهی‌های یک دریا — گسسته ☑ پیوسته ☐

ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید. — گسسته ☐ پیوسته ☑

پ) وزن افراد — گسسته ☐ پیوسته ☑

ت) تعداد دانش‌آموزان یک مدرسه — گسسته ☑ پیوسته ☐

۵ در جدول زیر، پاسخ شما چه نوع متغیری (گسسته یا پیوسته) است؟

سؤال (متغیر)	پاسخ (مقدار متغیر)	نوع متغیر
قد شما چه عددی است؟	عددی بین ۱۷۲ تا ۱۸۵ سانتی‌متر	پیوسته
وزن شما چه عددی است؟	۸۰/۵ کیلوگرم	پیوسته
تعداد دوستان شما چند نفر است؟	۰، ۱، ۲، ۳،	گسسته
وزن دوستتان چه عددی است؟	۷۰، ۷۱، ۷۲ و ..... کیلوگرم	پیوسته
شاخص تودهٔ بدن خانوادهٔ شما چه عددی است؟	۲۲، ۳۲/۵، ۳۰ و	پیوسته
ارتفاع شانه یوزپلنگ ایرانی چقدر است؟	عددی بین ۳۸ تا ۶۷ سانتی‌متر	پیوسته

انواع متغیرهای کیفی

فعالیت

به سؤال‌های زیر توجه کنید :

سؤال : از یک آقا و خانم می‌پرسیم : چقدر از آشپزی کردن لذت می‌بری؟

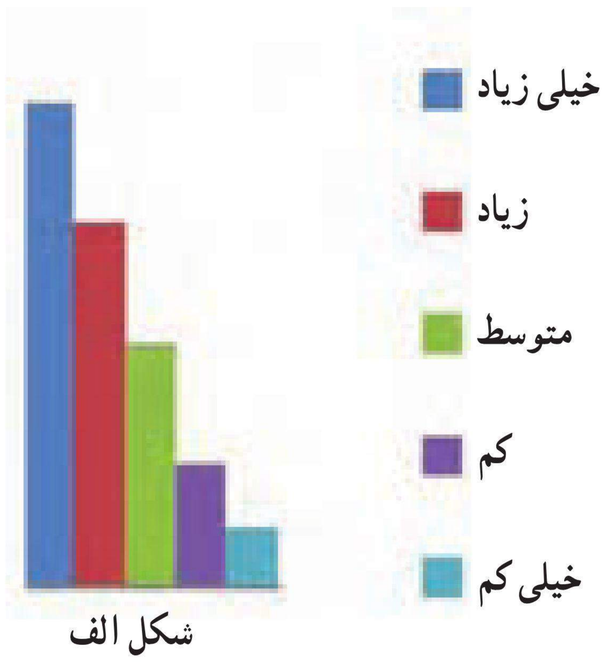
برخی از جواب‌های ممکن : خیلی زیاد، زیاد ، متوسط، کم، خیلی کم

سؤال : گروه خونی خود را بگویید.

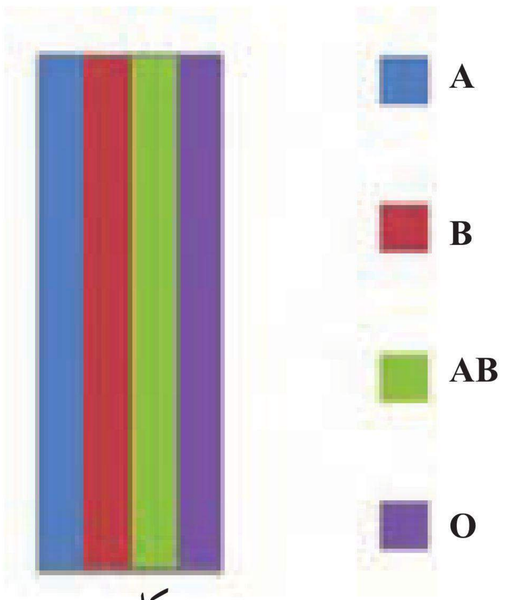
برخی از جواب‌های ممکن : گروه خونی A ، B، AB، O

در پاسخ به سؤال اول، یک ترتیب طبیعی وجود دارد؛ همانند شکل «الف» در صورتی که در پاسخ به سؤال دوم نمی‌توان ترتیب طبیعی قائل شد، شکل «ب» را ملاحظه کنید.

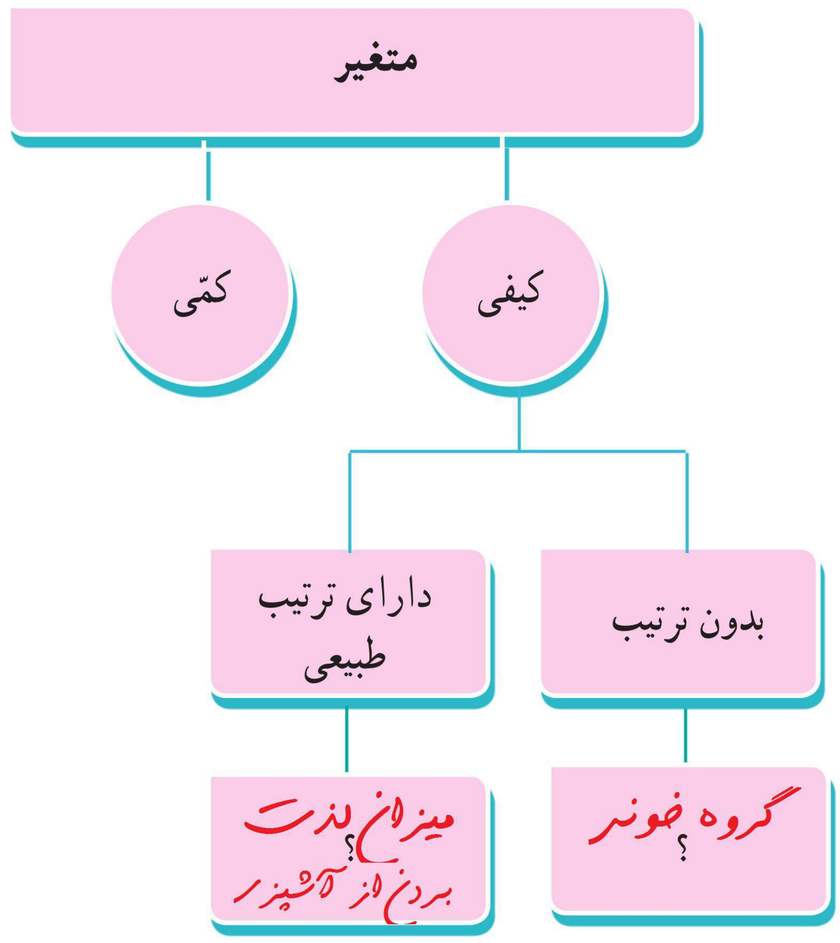
در شکل زیر به جای علامت سؤال، پاسخ مناسب را قرار دهید.



شکل الف



شکل ب



متغیرهای ترتیبی و اسمی

انواع متغیر کیفی :

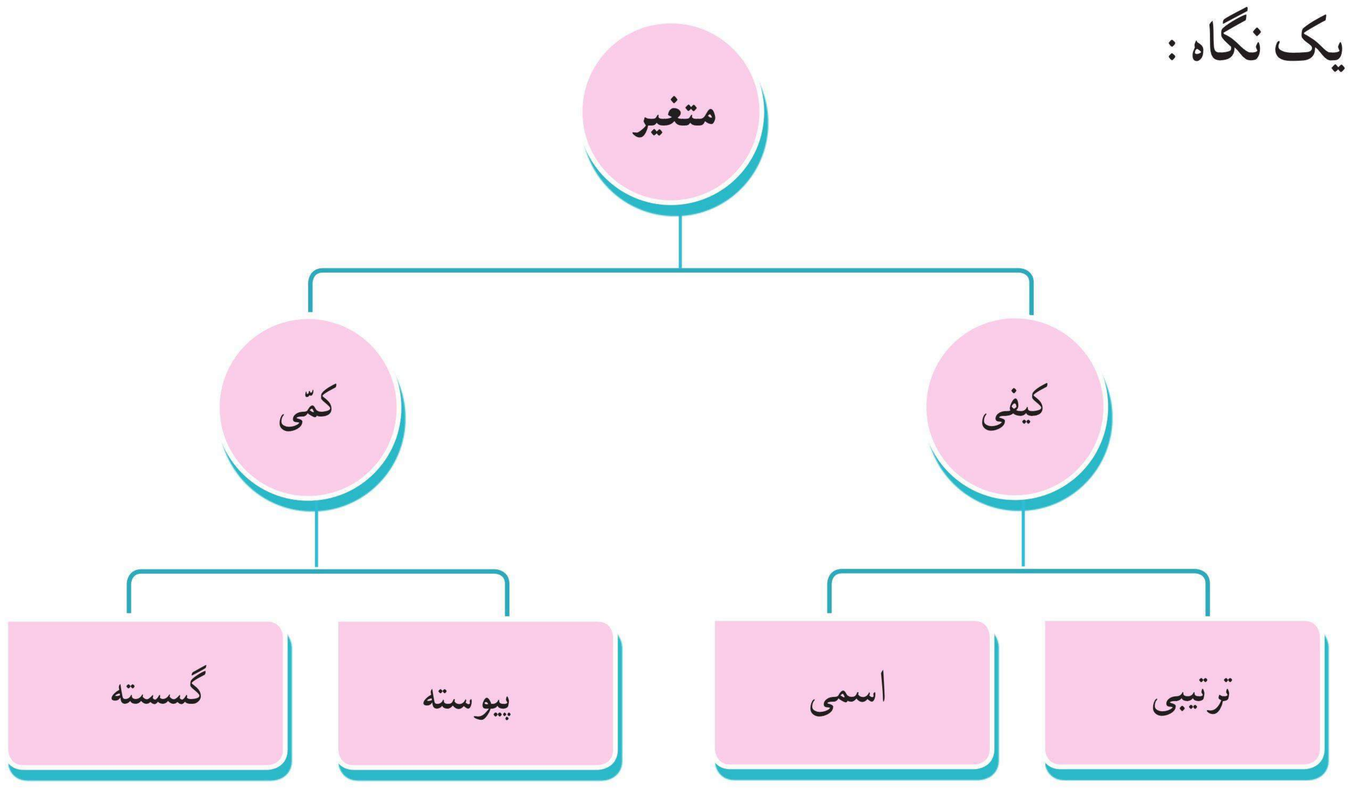
متغیرهای کیفی قابل اندازه‌گیری نیستند. این متغیرها به دو دستهٔ زیر تقسیم می‌شود :

۱) متغیر ترتیبی ۲) متغیر اسمی (غیر ترتیبی)

متغیر ترتیبی : متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد. به عنوان مثال سطح تحصیلات (دیپلم، فوق دیپلم، کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری)

متغیر اسمی (غیر ترتیبی) : متغیری کیفی است که ترتیبی نیست؛ مانند جنسیت (زن و مرد)

انواع متغیرها در یک نگاه :



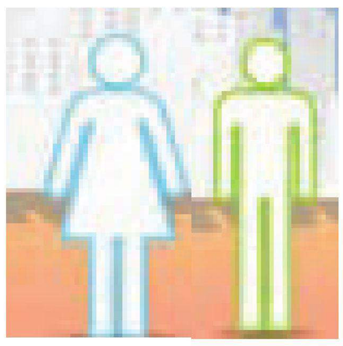
کار درکلاس

با توجه به شکل‌های زیر جملات زیر را کامل کنید :

در شکل «الف»، جنسیت افراد، یک متغیر اسمی است و مقادیر آن زن و مرد است.

در شکل «ب»، مقام‌هایی که یک ورزشکار در مسابقه به‌دست می‌آورد، یک متغیر ترتیبی است و مقادیر آن مقام اول ، مقام دوم و مقام سوم است.

در شکل «پ»، میزان علاقهٔ شما دربارهٔ خورش قیمه سؤال شده است که یک متغیر ترتیبی است و مقادیر آن بسیار زیاد ، زیاد ، متوسط ، کم ، بسیار کم است.



شکل الف

شکل ب

شکل پ

تمرین

۱ با پر کردن جاهای خالی، اسمی یا ترتیبی بودن متغیرهای زیر را مشخص کنید.

الف) مراحل رشد یک انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میان سال، کهن‌سال) اسمی ☐ ترتیبی ☑

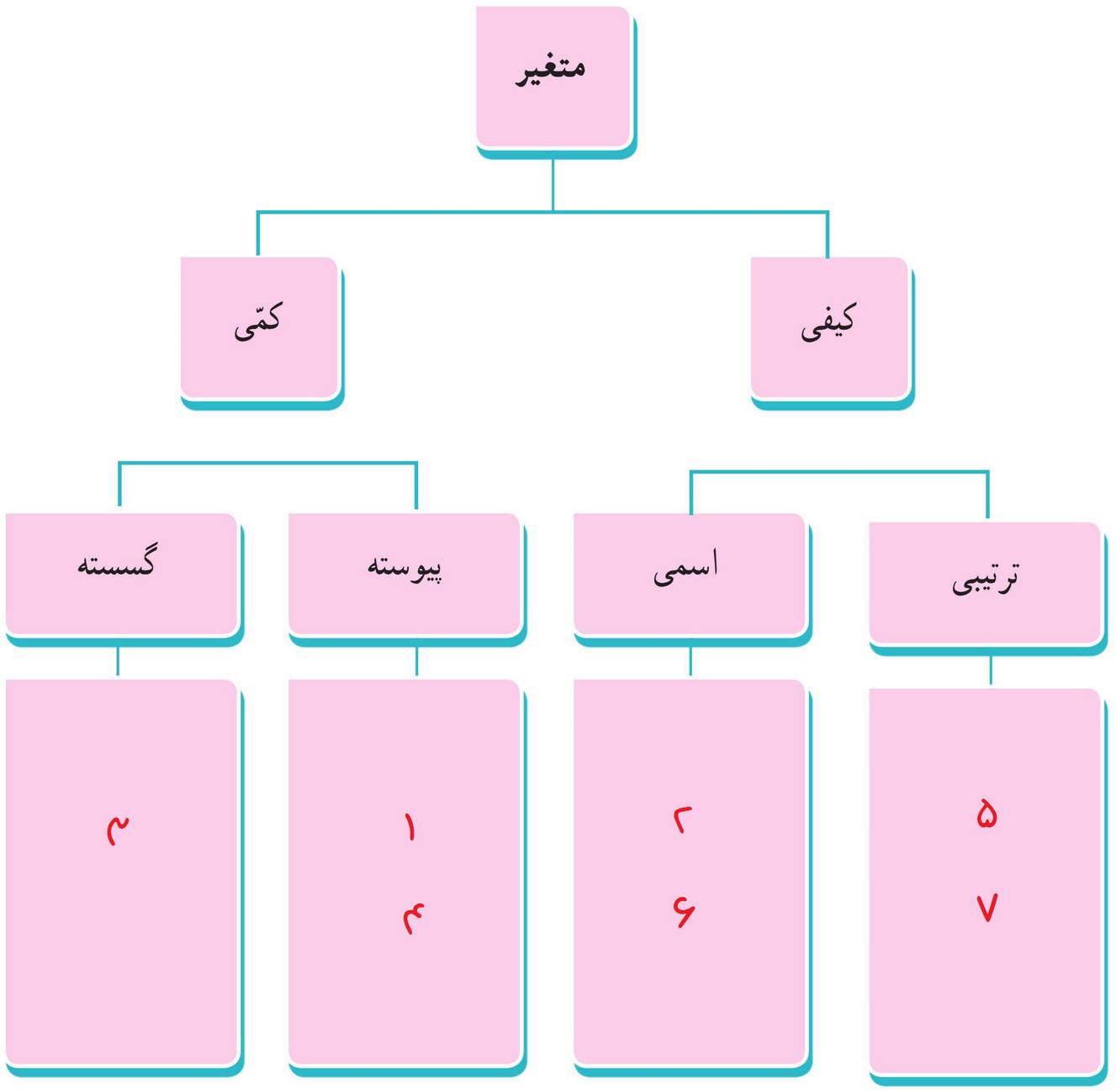
ب) نژاد افراد (سفید پوست، زرد پوست، سیاه پوست) اسمی ☑ ترتیبی ☐

پ) رنگ موی افراد (مشکی، قهوه‌ای، طلایی) اسمی ☑ ترتیبی ☐

ت) کیفیت میوهٔ هلو (درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳) اسمی ☐ ترتیبی ☑

۲ نوع متغیرها را در نمودار زیر، دسته‌بندی کنید.

متغیر	نوع متغیر
۱ــ میزان بارندگی برحسب سانتی‌متر در یک شهر	کمّی پیوسته
۲ــ نوع بارندگی (باران، برف)	کیفی اسمی
۳ــ تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند	کمّی گسسته
۴ــ میزان دمای هوا	کمّی پیوسته
۵ــ شدت آلودگی هوا(زیاد، متوسط، کم)	کیفی ترتیبی
۶ــ انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)	کیفی اسمی
۷ــ شدت بارندگی (زیاد،متوسط، کم)	کیفی ترتیبی



۳ جدول زیر متغیرهای دانش‌آموزان را نشان می‌دهد. انواع متغیرها از نظر کمّی، کیفی، گسسته، پیوسته، ترتیبی و اسمی را در جدول زیر کامل کنید.

متغیرهای دانش‌آموزان	متغیر کمّی	متغیر کیفی	متغیر گسسته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی	متغیر اسمی
سن	×			×		
نمرهٔ ریاضی نهم	✗		✗			
جنسیت (دختر و پسر)		✗				✗
قد	✗			✗		
وزن	✗			✗		
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)		×			×	
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)		✗			✗	
شاخص تودهٔ بدن	✗			✗		
تعداد مسافران قطار	✗		✗			

۴ فرض کنید وزن شخصی ۹۵ کیلوگرم و قد او ۱/۶۰ سانتی‌متر باشد. (اصلاح شود ۱۶۰)

الف) شاخص تودهٔ بدن این شخص را حساب کنید. شاخص توده بدن $= \frac{۹۵}{(۱/۶)^۲} = ۳۷/۱۰$

ب) شاخص تودهٔ بدن شخص چه نوع متغیری از نظر کمّی، کیفی، گسسته، پیوسته، اسمی و ترتیبی است؟ کمّی، پیوسته

(تکراری است که در جدول فوق پرسیده شده است.)

۵ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ است. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ سفید را با عدد ۲ و رنگ قرمز را با عدد ۱ نشان دهیم، جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید. این شکل چه چیزی است؟

۳؟	۳	۳
۲	۲؟	۲
۱؟	۱	۱

جدول عددی

؟	؟	؟
؟		؟
	؟	؟

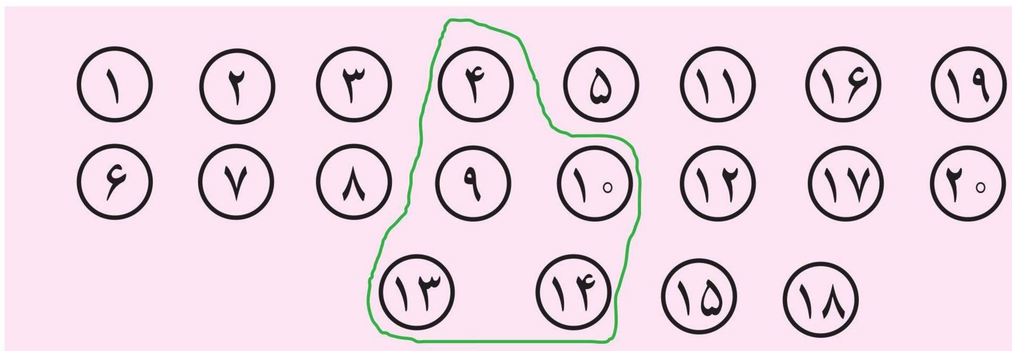
شکل

۶ جامعه و نمونه را تعریف کنید و برای هر یک مثال بزنید.

جامعه: مجموعه‌ی تمام افراد یا اشیایی که در باره‌ی یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت گیرد. مانند دانش‌آموزان یک

نمونه: بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود. مانند دانش‌آموزان یک کلاس که به عنوان یک نمونه از دانش‌آموزان مدرسه هستند.

۷ شکل زیر یک جامعهٔ فرضی را نشان می‌دهد که اعضای آن را با شماره‌های ۱ تا ۲۰ مشخص کرده‌ایم. همچنین اعضای نمونه با خط سبز رنگ انتخاب شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید:



الف) اندازهٔ جامعه چه عددی است؟ ۲۰ نفر

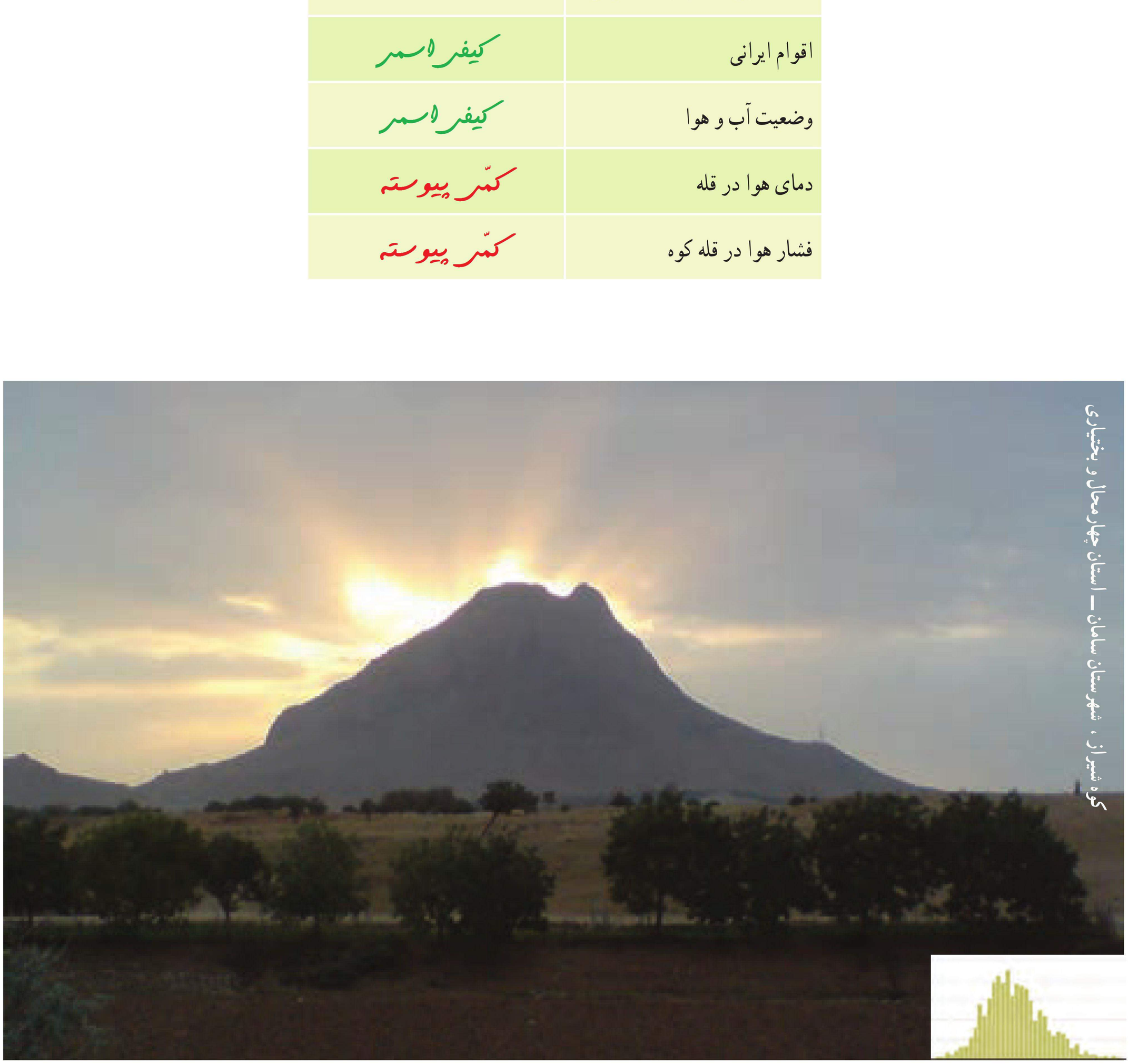
ب) اندازهٔ نمونهٔ انتخابی چه عددی است؟ ۵ نفر

پ) اعضای نمونهٔ انتخابی را بنویسید.

{۱۴ و ۱۳ و ۱۰ و ۹ و ۴}

۸ جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	نوع متغیر
وزن یک هلو	کمّی پیوسته
کیفیت یک هلو	کیفی ترتیبی
اندازهٔ طول بدن یوزپلنگ ایرانی	کمّی پیوسته
اقوام ایرانی	کیفی اسمی
وضعیت آب و هوا	کیفی اسمی
دمای هوا در قله	کمّی پیوسته
فشار هوا در قله کوه	کمّی پیوسته



کوه شیراز ، شهرستان سامان ــ استان چهارمحال و بختیاری