

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های اعداد

انسان در طول تاریخ بر حسب نیاز خود از مجموعه‌های مختلف اعداد استفاده کرده است.

برخی از این مجموعه‌ها که در سال‌های قبل با آنها آشنا شدیم، به شرح زیرند:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots\} : \text{مجموعه اعداد اول}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} : \text{مجموعه اعداد طبیعی}$$

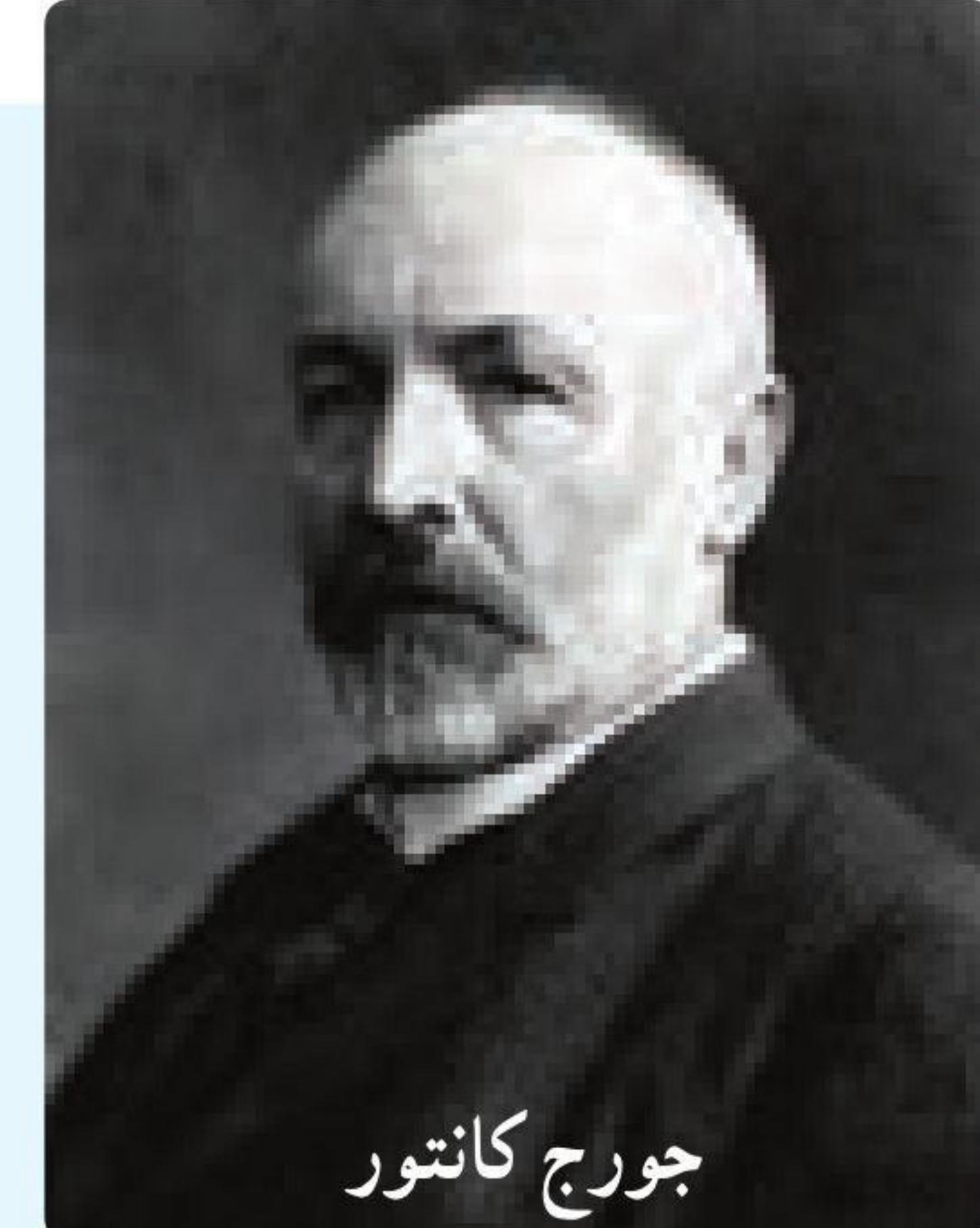
$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} : \text{مجموعه اعداد حسابی}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} : \text{مجموعه اعداد صحیح}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\} : \text{مجموعه اعداد گویا}$$

مجموعه اعدادی که نتوان آنها را به صورت $= Q'$ مجموعه اعداد گنگ نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' : \text{مجموعه اعداد حقیقی}$$



جورج کانتور

«مجموعه» یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که بسیاری از نظریه‌های دیگر ریاضی در یک قرن اخیر بر مبنای آن پایه‌گذاری یا سازماندهی شده‌اند. مطالعات جدی درباره مجموعه‌ها با کار جورج کانتور در سال ۱۸۷۰ آغاز می‌شود.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود رابطه زیر مجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به شکل $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ برقرار است. به عبارت دیگر تمام مجموعه‌های اعدادی که تاکنون با آنها آشنا شده‌ایم، زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند. در نتیجه، هر عدد دلخواهی را که در نظر بگیریم، باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد و همچنین هر نقطه روی این محور نشان‌دهنده یک عدد حقیقی مشخص است.

کاردرکلاس

۱) الف) مجموعه $\mathbb{Q} - \mathbb{R}$ چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو

دلخواه از آن را در ناحیه هاشور خورده بنویسید. آن مجموعه‌ی اعداد گنگ است که با نام \mathbb{Q}' نمایش می‌دهیم

ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید.

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$$

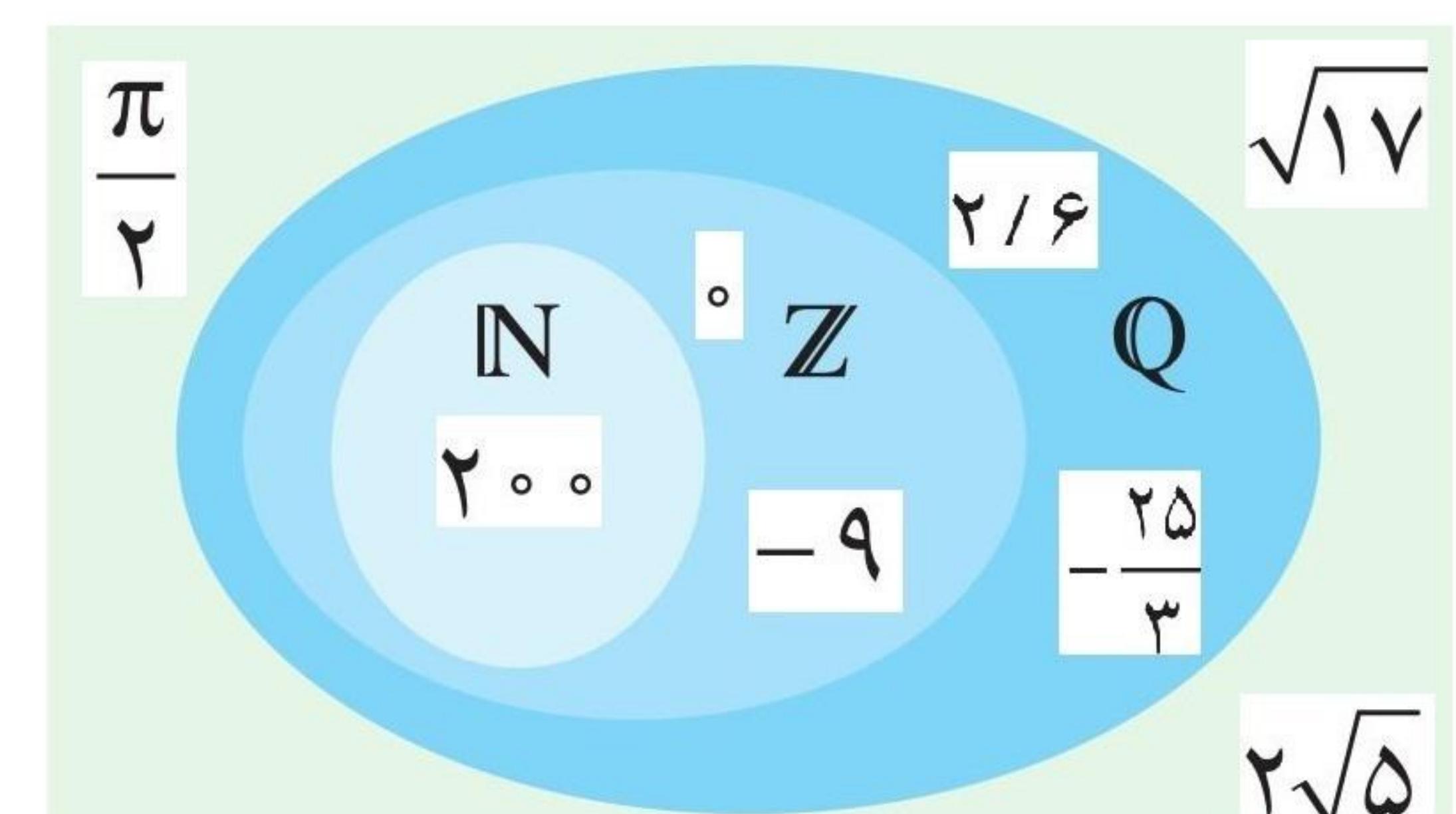
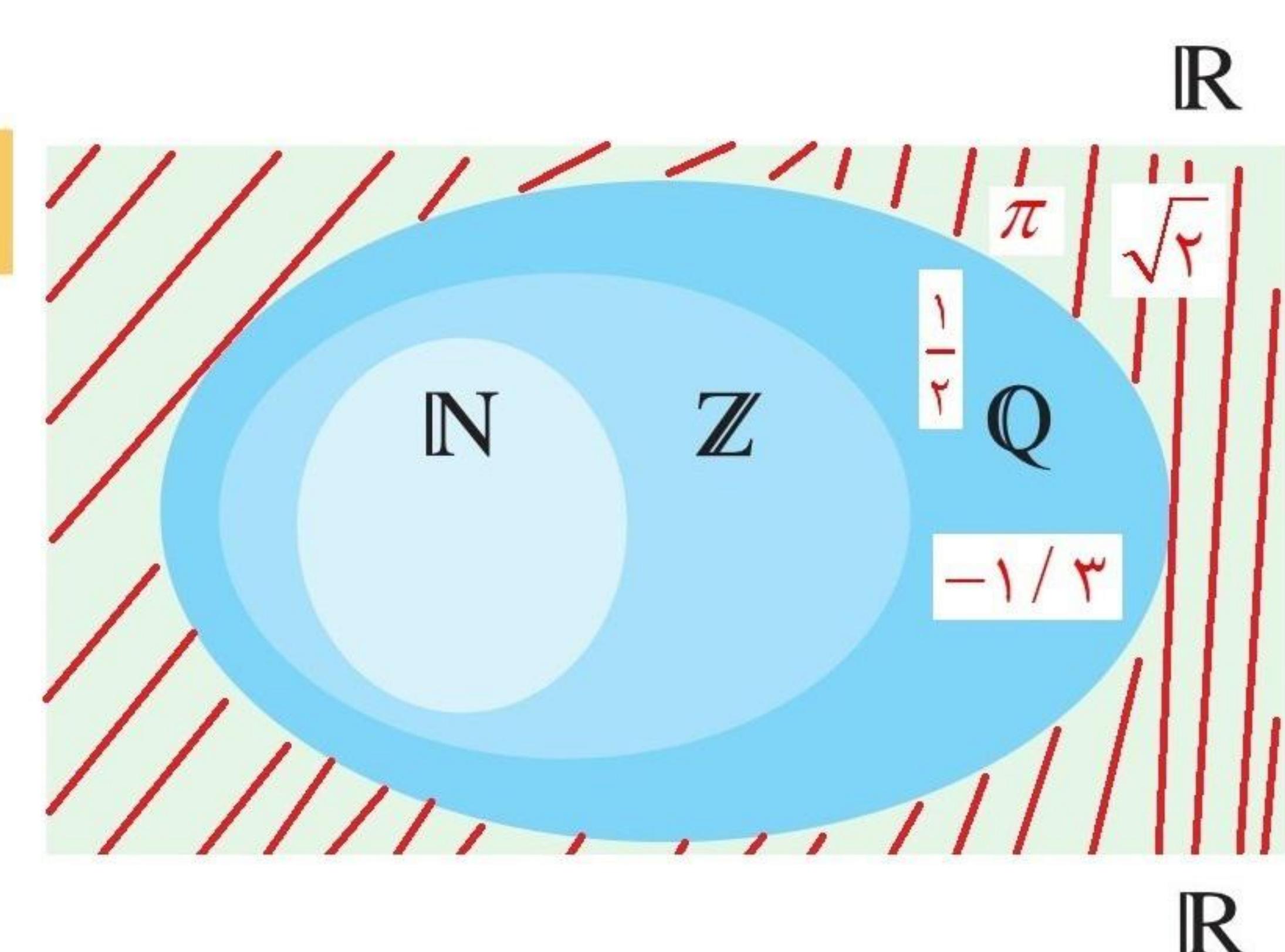
پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

$$\sqrt{17}, 0, 200, \frac{\pi}{2}, 2/6, 2\sqrt{5}, -\frac{25}{3}, -9$$

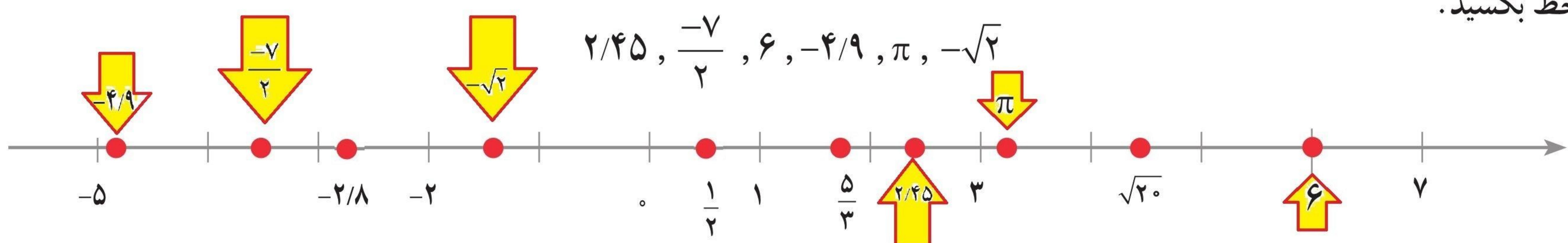
ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضا بنویسید. $\{-1, -2, -3, -4, -5, \dots\}$

$$W - \mathbb{N} = \{0\}$$

توجه داشته باشید که $\mathbb{N} - W = \emptyset$



۲ هریک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ است؟ زیر آنها خط بکشید.



بازه ها

در اینجا گونه دیگری از زیرمجموعه های \mathbb{R} را در نظر می گیریم. فرض کنید A مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی بین -2 و 1 به همراه خود این دو عدد باشد؛ یعنی $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$. اعضای A را روی محور زیر، با رنگ کردن مشخص کنید. آیا می توان تمام اعضای A را فهرست کرد؟ آیا می توان اولین عدد حقیقی بعد از -2 را مشخص کرد؟



زیرمجموعه هایی از \mathbb{R} را که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص است، «بازه» یا «فاصله» می نامیم. بازه ها در ریاضیات از اهمیت نسبتاً زیادی برخوردارند و ما هم در برخی از فصل های بعدی این کتاب به دفعات با آنها سرو کار خواهیم داشت. از این رو شایسته است که برای نشان دادن آنها از نماد ساده تری استفاده شود. بنابراین A را با نماد $[-2, 1]$ نشان می دهیم و آن را **بازه بسته** از -2 تا 1 می نامیم. حال اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه یعنی -2 و 1 را از A حذف کنیم، آنگاه مجموعه ای مانند $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$ به دست می آید که آن را **بازه باز** بین -2 و 1 می نامیم و با نماد $(-2, 1)$ نشان می دهیم. به طور خلاصه:

$$A = [-2, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\} : \text{بازه بسته بین } -2 \text{ و } 1$$

$$B = (-2, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\} : \text{بازه باز بین } -2 \text{ و } 1$$

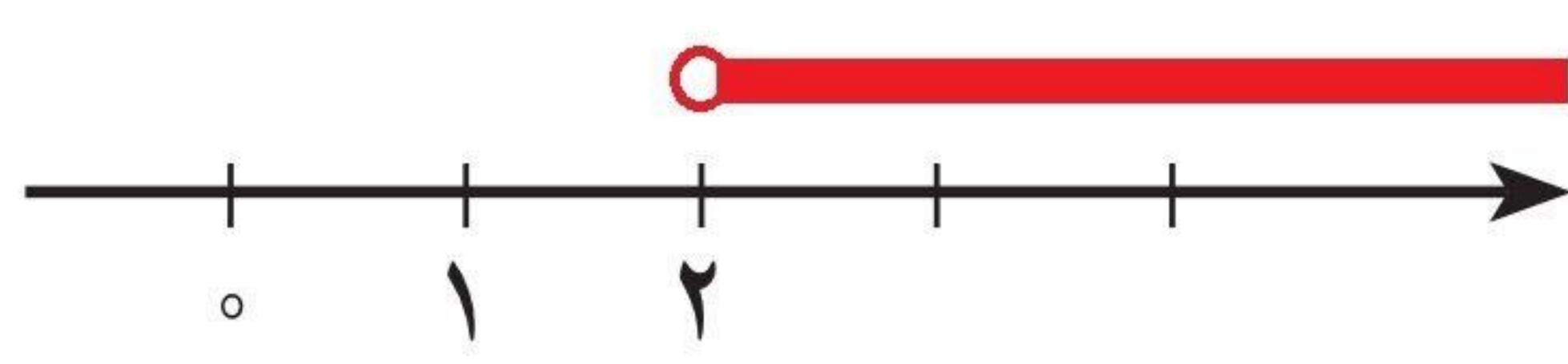
بازه های **نیم باز** هم به روش مشابه تعریف می شوند.

فعالیت

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $a < b$ آنگاه جدول زیر را کامل کنید:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه ای	نمایش هندسی
باز	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
نیم باز	$(1, 5]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$	
نیم باز	$[-3, 2)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$	

گاهی تمام اعداد حقیقی مثلاً بزرگ‌تر از ۲ مورد نظر است. به عنوان مثال، می‌دانیم که مجموعه جواب نامعادله $x > 2$ به صورت $C = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$ است. اعضای C را روی محور زیر نشان دهید.



آیا می‌توانید C را به صورت یک بازه بنویسید؟ برای اینکه این مجموعه را به شکل بازه بنویسیم، از نماد $+\infty$ (بخوانید: مثبت بی‌نهایت) استفاده می‌کنیم. مجموعه C را در قالب بازه با نماد $(2, +\infty)$ نمایش می‌دهیم که یک بازه باز محسوب می‌شود. به همین ترتیب برای مجموعه‌ای مثل $\{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$ نمایش بازه‌ای به صورت $[1, -\infty)$ خواهد بود که یک بازه نیم باز است. توجه داریم که $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند. در سال‌های آینده با این دو نماد بیشتر آشنا خواهیم شد.

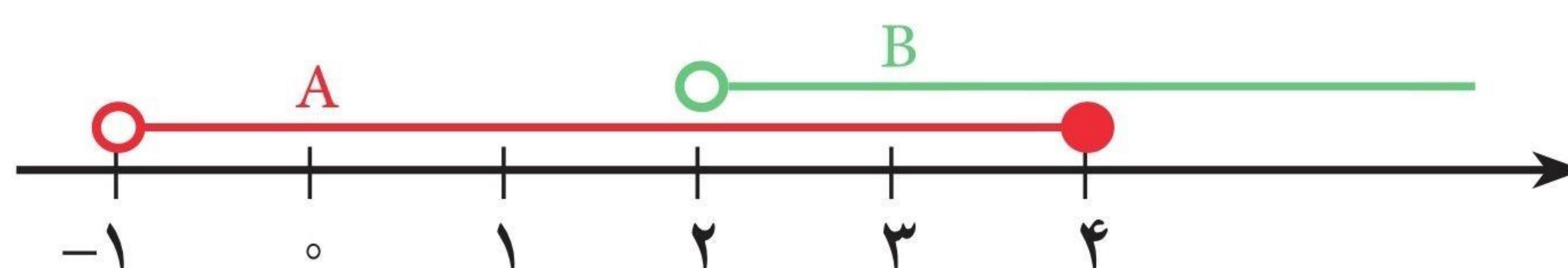
فعالیت

اگر a عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} x > a\}$	
نیم باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} x \geq a\}$	
نیم باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} x < a\}$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	\mathbb{R}	
نیم باز	$[3, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} x \geq 3\}$	
باز	$(-\infty, 5)$	$\{x \in \mathbb{R} x < 5\}$	

مثال

می‌خواهیم اجتماع و اشتراک دو بازه $A = (-1, 4)$ و $B = (2, +\infty)$ را به دست آوریم. نمایش هندسی هر دو بازه را مطابق شکل روی یک محور رسم می‌کنیم.



از روی شکل دیده می‌شود که $A \cup B$ برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از -1 یعنی:

$$(-1, +\infty) = (-1, 4) \cup (2, +\infty)$$

همچنین با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که $A \cap B$ برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بین 2 و 4 به همراه خود عدد 4 ؛ یعنی:

$$(-1, 4) \cap (2, +\infty) = (2, 4]$$

توضیح دهید که چرا $A \cap B \neq \emptyset$.

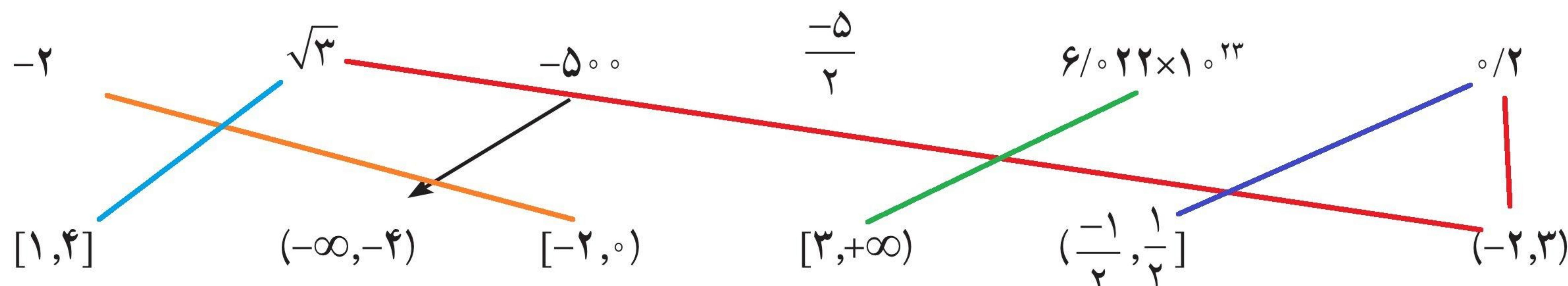
زیرا 2 در بازه B نیست، پس در اشتراک وجود ندارد.

۱ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید :

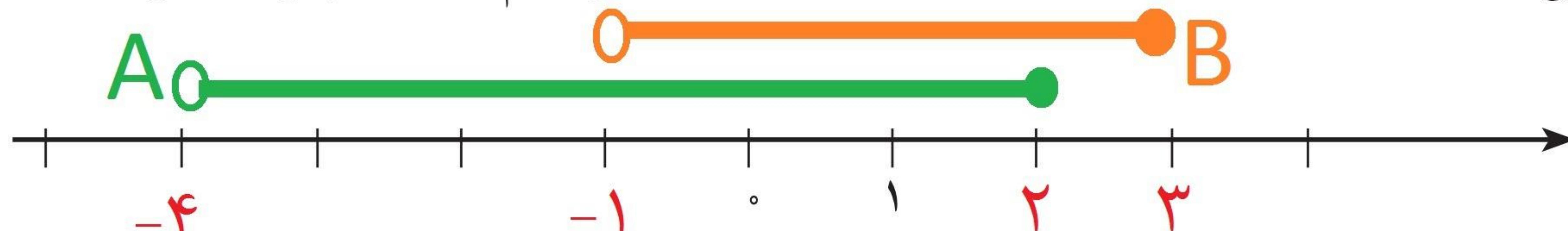
الف) $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{2}, 2)$ ب) $-2 \in (-2, 0]$ پ) $0 \in (-2, 0]$ ت) $-2 \in \{-2, 0\}$

ج) $\emptyset \subseteq (-1, 2)$ خ) $\{1, 2\} \subseteq [-1, 2]$ د) $\sqrt{2} \in (0, 1)$

۲ هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه های نظری آن وصل کنید.



۳ نمایش هندسی دو بازه $A = [-4, 2]$ و $B = [1, 3]$ را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت های زیر را بنویسید.



الف) $A \cap B = [-1, 2]$ ب) $A \cup B = [-4, 3]$ پ) $A - B = [-4, -1]$ ت) $B - A = [2, 3]$

مجموعه های متناهی و نامتناهی

فعالیت

فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

ب) A چند عضو دارد؟ عضو دارد

پ) درباره تعداد اعضای B چه می توان گفت؟ دارای بی شمار عضو است.

مجموعه هایی مانند A را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، **مجموعه های متناهی** می نامیم.

با توجه به مطلب فوق، B یک مجموعه متناهی نیست؛ زیرا نمی توان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ تر است. چنین مجموعه هایی را **مجموعه های نامتناهی** می نامیم.

CAR CAR MUS

۱ متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. درباره مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.

مجموعه	در یک مول مشخص از آب	موجود در یک مولکول های موجود	نامتناهی	متناهی	تعداد اعضا (در مورد مجموعه های متناهی)
مجموعه اعداد اول یک رقمی				✓	{۲, ۳, ۵, ۷}
مجموعه انسان های روی زمین			✓		۷۵.....
مجموعه اعداد طبیعی فرد			✓		۵۳.....
مجموعه سلول های عصبی مغز یک انسان			✓	✓	۱۸۰
مجموعه تمام دایره های به مرکز مبدأ مختصات			✓	✓	۱۰۹ - ۱۰۱
مجموعه دانش آموزان مدرسه شما			✓		۳۹.....
مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی			✓		
مجموعه درخت های جنگل های آمازون			✓		
مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک			✓		
مجموعه مضرب های طبیعی عدد ۱۰			✓		
بازه (۱, ۰)	← بازه ۴ نا متناصر اند.	✓			۶ / ۰۲ × ۱۰۲۳

۲- مجموعه‌ی ماشین‌های پلاک سر ۶

دو مجموعهٔ متناهی نام بیرید. ۱- مجموعهٔ دیگران ریاضی

دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعه دیگری باشد.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی که زیر مجموعه‌ی اعداد حسابی است.

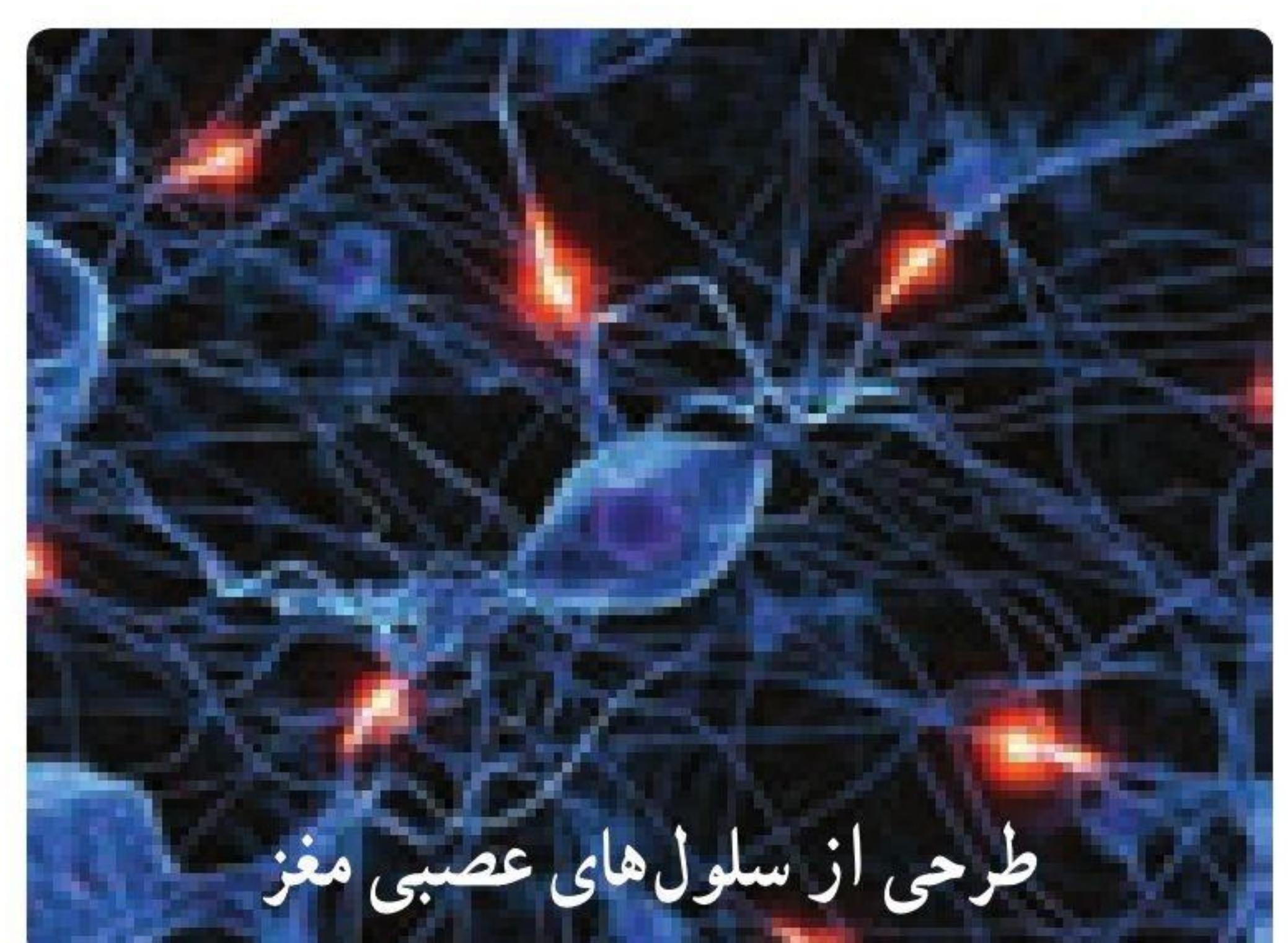
دو مجموعهٔ نامتناهی مثل A و B بزرگ‌تر از $A \subseteq B$ باشند.

$$B = [\gamma, \gamma] \quad A = (\gamma, \gamma) \quad \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ B - A = \{\gamma\} \end{cases}$$

تذکر : تعداد اعضای متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را به دست آورد.



جنگل‌های آمازون



الف $\frac{1}{3}$ عددی بین 0 و 1 است. چهار عدد گویای دیگر از بازه $(0, 1)$ بنویسید و جواب خود را با جواب های دوستانان مقایسه کنید.

 $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \dots$

ب آیا می توان بین 0 و 1 به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟ بله

عدد آنکادرو

در شیمی تعداد 6×10^{22} عدد از هر ذره (مولکول یا اتم) را یک مول از آن ذره می نامند. برای درک میزان بزرگی این عدد، فرض کنیم تعداد مولکول های موجود در یک مول آب را که 18 گرم است، بتوانیم مولکول به مولکول بشماریم و کار شمردن هر مولکول آن هم یک ثانیه زمان بیرد. در این صورت کار شمارش تزدیک به 20 میلیون میلیارد سال به طول خواهد انجامید که این زمان حدود یک میلیون برابر عمر جهان است!

به نظر شما، مجموعه مولکول های یک مول مشخص از آب، یک مجموعه متناهی است یا نامتناهی؟

پ در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه $(0, 1)$ چه نتیجه ای می گیرید؟ نامتناهی است.

ت در مورد متناهی یا نامتناهی بودن \mathbb{Q} چه می توان گفت؟ نامتناهی است.

ث اگر A دارای یک زیر مجموعه نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعه خواهد بود.

تمرین

۱ فرض کنید U مجموعه تمام مضرب های طبیعی عدد 5 باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

$U = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, \dots\}$

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟ نامتناهی

پ) یک زیر مجموعه متناهی از U بنویسید.

ت) دو زیر مجموعه نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به طوری که $C \subseteq D$.

$$D = \{10, 20, 30, \dots\} \quad C = \{20, 40, 60, \dots\}$$

۲ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی. نامتناهی

ب) مجموعه شمارنده های طبیعی عدد 36 . متناهی

پ) بازه $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. نامتناهی

ت) $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$. متناهی زیرا $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$

ث) مجموعه مضرب های طبیعی عدد 100 . نامتناهی

۳ دو مجموعه نامتناهی مثل بزنید که اشتراک آنها مجموعه ای متناهی باشد.

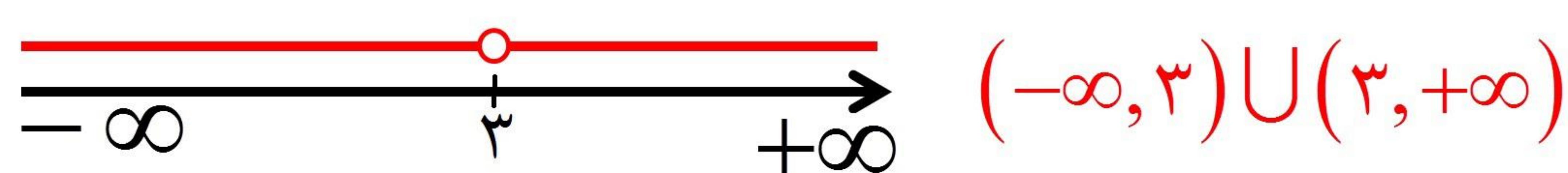
۴ حاصل هر یک از مجموعه های زیر را با رسم بازه های آنها روی یک محور به دست آورید:

$$\text{الف) } (-2, 5) \cup (-3, 0) = (-3, 5) \quad \text{ب) } (2, 6] = (2, 6]$$

$$\text{ت) } \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = (-\infty, 1) \cup [1, +\infty) \quad \text{پ) } [6, 10] = (6, 10]$$

$$\text{ج) } [2, 4] = [2, 4] - (3, +\infty) \quad \text{ث) } (4, +\infty) = (3, +\infty) - [2, 4]$$

۵ مجموعه $\{-3\} - \mathbb{R}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.



۶ اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟ نامتناهی

درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع

فرض کنیم U نشان‌دهنده مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه آیت‌الله العظمی مرعشی نجفی (ره) و A مجموعه کتاب‌های خطی آن باشد. اگر مجموعه‌ای را که شامل کتاب‌های چاپی این کتابخانه است، با A' نشان‌دهیم، آنگاه می‌توانیم نمودار پایین صفحه را درباره کتاب‌های این کتابخانه رسم کنیم. در این مثال U را که شامل تمام کتاب‌های کتابخانه می‌باشد، مجموعه مرجع و A' را متمم مجموعه A می‌نامیم.

در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، **مجموعه مرجع** می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه $U - A$ را **متمم A** می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

فعالیت

الف دو مجموعه زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$$

ب A را با نمایش اعضا و B را به صورت یک بازه بنویسید.

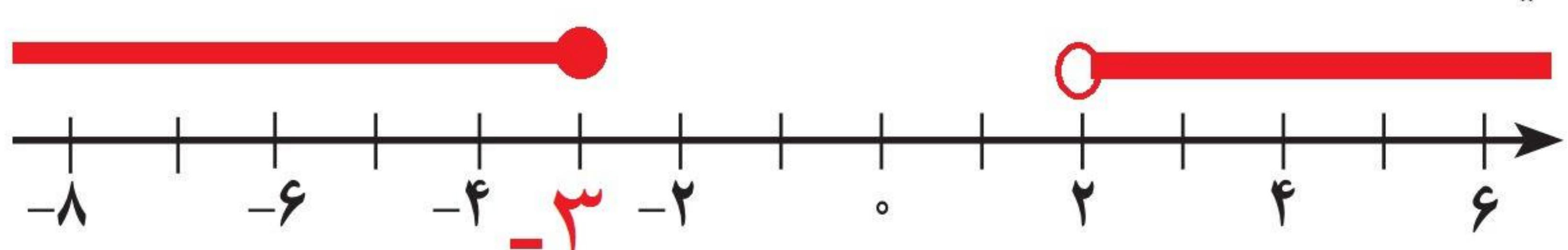
$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$B = [-3, 2]$$

پ در مورد A ، اگر مجموعه مرجع را \mathbb{Z} در نظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

$$A' = \mathbb{Z} - A = \{\pm 3, \pm 4, \dots\} = \{\dots, -4, -3, 2, 3, 4, \dots\}$$

ت در مورد B با فرض این که \mathbb{R} مجموعه مرجع باشد، B' را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.

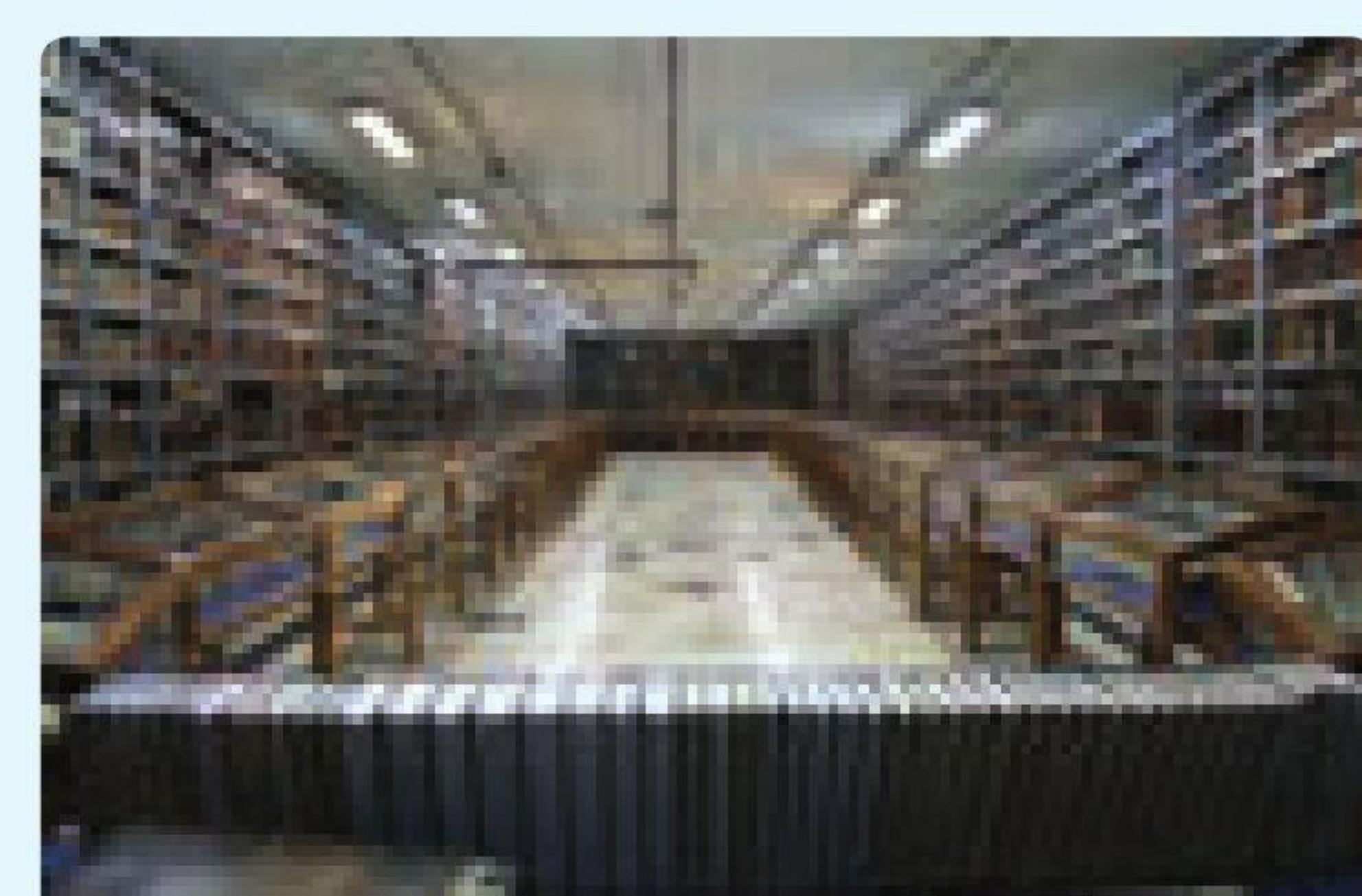


$$B' = \mathbb{R} - B = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$$



کتابخانه آیت‌الله العظمی مرعشی نجفی (ره)، در شهر مقدس قم یکی از بزرگ‌ترین کتابخانه‌های جهان اسلام است که کتاب‌های نفیس و قدیمی بسیاری را در موضوعات مختلف در خود جای داده است. این کتابخانه از نظر فراوانی نسخه‌های خطی، نخستین کتابخانه کشور و سومین کتابخانه جهان اسلام به شمار می‌رود. جدول زیر اطلاعات مختصری درباره تعداد کتاب‌های این کتابخانه در اختیار ما قرار می‌دهد.

نوع کتاب	تعداد
کتاب‌های خطی	۴۲۰۰۰ جلد
کتاب‌های چاپی	۱۰۰۰۰۰ جلد
کل کتاب‌ها	۱۰۴۲۰۰۰ جلد



U : مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه

: کتاب‌های A
خطی

: کتاب‌های چاپی A'

درس دوم: مجموعه های مجموعه



۱۶۸ ج ۱۲

۱ اگر U مجموعه شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و A مجموعه استان‌های غیرساحلی، آنگاه A' را با نمایش اعضای آن بنویسید.

$$A' = U - A$$

$$= \{ \text{سیستان و بلوچستان و هرمزگان و بوشهر و خوزستان و گلستان و مازندران و گیلان واردبیل} \}$$

۲ فرض کنیم U مجموعه تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شده کشور و B مجموعه اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این صورت B' چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

$$B' = U - B =$$

۳ با فرض آنکه \mathbb{N} مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \rightarrow \{1, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

$$\{3, 6, 9, 12, \dots\} \rightarrow \{2, 4, 5, 8, 10, \dots\}$$

$$\{1, 2, 3, \dots, 9\} \rightarrow \{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$$

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\} \rightarrow \{10, 11, 12, 13, 14, \dots\}$$

\cup متمم \emptyset

معاند.

۴ U مجموعه مرجع و A زیرمجموعه دلخواهی از آن می‌باشد. با رسم نمودار، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$\begin{array}{c} U \\ \emptyset' = U \\ \boxed{\quad} \end{array} \quad \begin{array}{c} U \\ U' = \emptyset \\ \boxed{\quad} \end{array} \quad \begin{array}{c} U \\ A \cup A' = U \\ \boxed{A \cup A'} \end{array} \quad \begin{array}{c} U \\ A \cap A' = \emptyset \\ \boxed{A \cap A'} \end{array}$$

۵ (الف) اگر \mathbb{Z} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، آنگاه \mathbb{N}' را با نوشت اعضای آن مشخص کنید.

$$\mathbb{N}' = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, \dots \}$$

(ب) اگر \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، در این صورت \mathbb{N}' را روی محور نمایش دهید.

$$\mathbb{N}' = \mathbb{R} - \mathbb{N} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \text{سیزدهم}$$

۶ فرض کنیم $\{1, 2, 3, 4, 5\} = U$ مجموعه مرجع باشد و $\{1, 2, 3\} = A$ و $\{2, 4\} = B$. ابتدا A' و B' را بنویسید و سپس جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$(A')'$	$A' = \{4, 5\}$
$\{1, 2, 3\}$	

$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$
$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{5\}$	$\{5\}$

$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$
$\{2\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$

$A - B$	$A - (A \cap B)$
$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$

$$\begin{aligned} B' &= \{1, 3\} \\ \Rightarrow (A')' &= A \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$\Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$\Rightarrow A - B = A - (A \cap B)$$

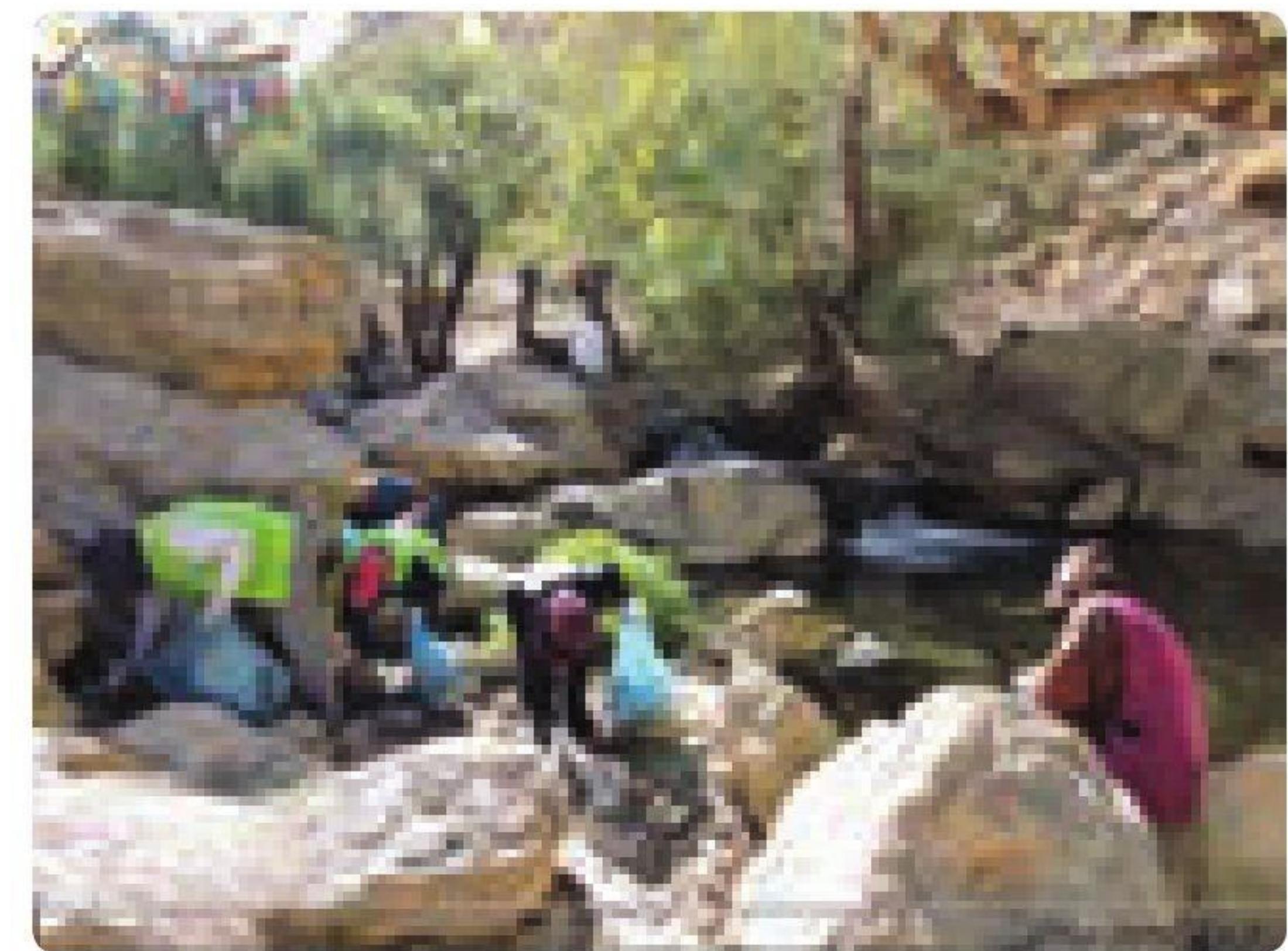
* تلخه حرم :

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

در سال گذشته دیدیم که اگر A یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه برای نشان دادن تعداد عضوهای آن از علامت $n(A)$ استفاده می‌شود. مثلاً اگر $\{2, 3, 5, 7\} = G$ در این صورت می‌توانیم بنویسیم $n(G) = 4$. در این بخش می‌خواهیم رابطه‌ای برای $n(A \cup B)$ به دست آوریم.

فعالیت

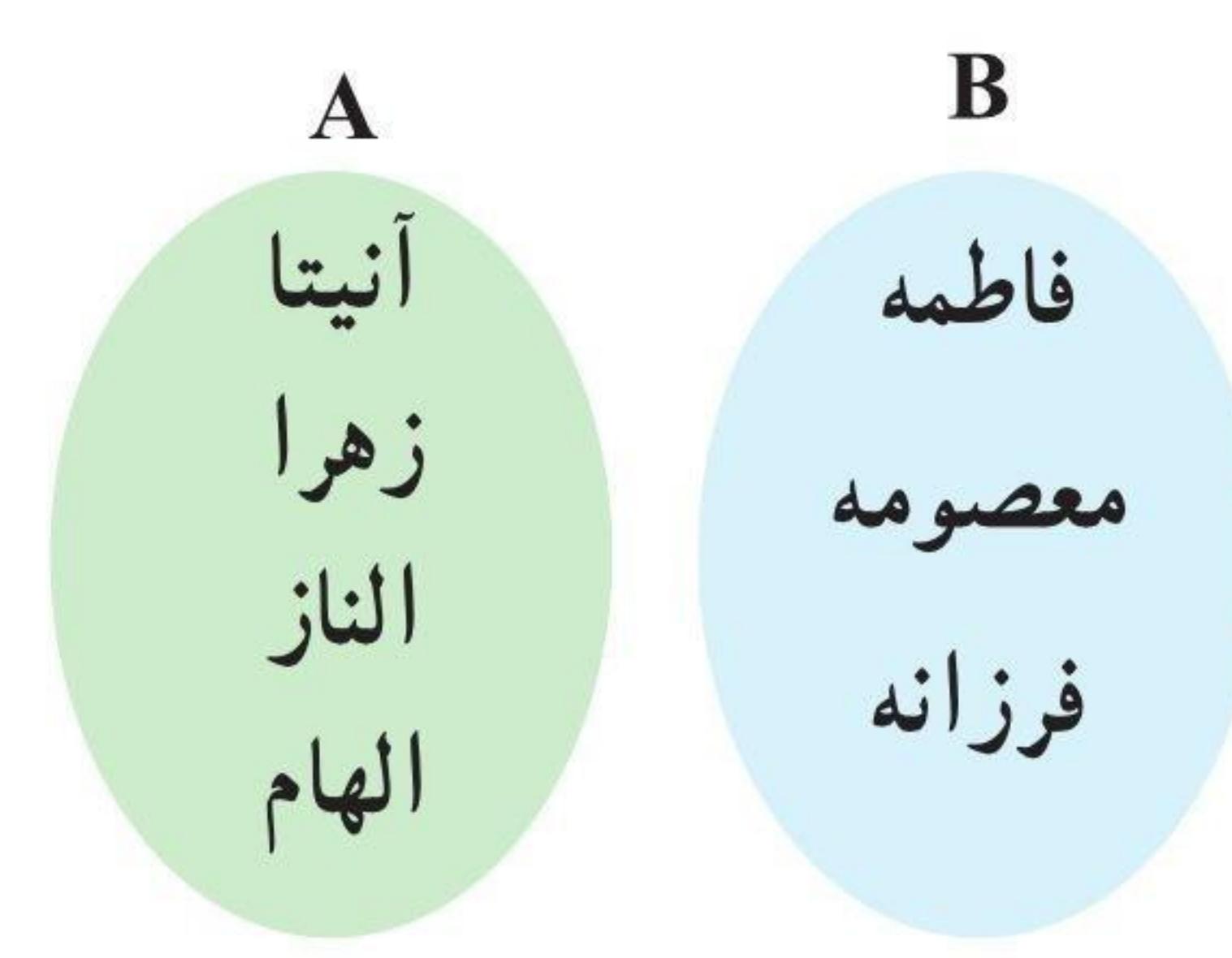
- ۱ یک تیم کوهنوردی متشکل از ۴ دانشآموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسه طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به‌طور داوطلبانه در روزهای جمعه هر هفته کوههای اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک‌سازی می‌کنند.
اعضای دانشآموز این تیم مجموعه $\{\text{آنیتا، زهرا، الناز، الهام}\} = A$ و اعضای دانشجوی آن مجموعه $\{\text{فاطمه، معصومه، فرزانه}\} = B$ هستند. همان‌گونه که دیده می‌شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به عبارت دیگر $A \cap B = \emptyset$.



به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه **جدا از هم** یا **جزا** می‌گوییم.

- الف) اعضای $A \cup B$ را که بیانگر اعضای تیم کوهنوردی می‌باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$\{ \text{فرزانه و معصومه و فاطمه و الهام و الناز و زهرا و آنیتا} \} = A \cup B$



$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$
۴	۳	۷	۰

- ب) تعداد عضوهای $A \cup B$ چه رابطه‌ای با $n(A)$ و $n(B)$ دارد؟ این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید. **جمع تعداد عضوهای A و B برابر با تعداد اعضای $A \cup B$ است.**
- $$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

- پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه A و B برقرار است؟

با شرط این که دو مجموعه جدا از هم باشند $A \cap B = \emptyset$

- الف) مجموعه شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب A و B می‌نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

$$28 \Rightarrow n(A) = 6 \quad A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} : \text{مجموعه شمارنده‌های عدد } 28$$

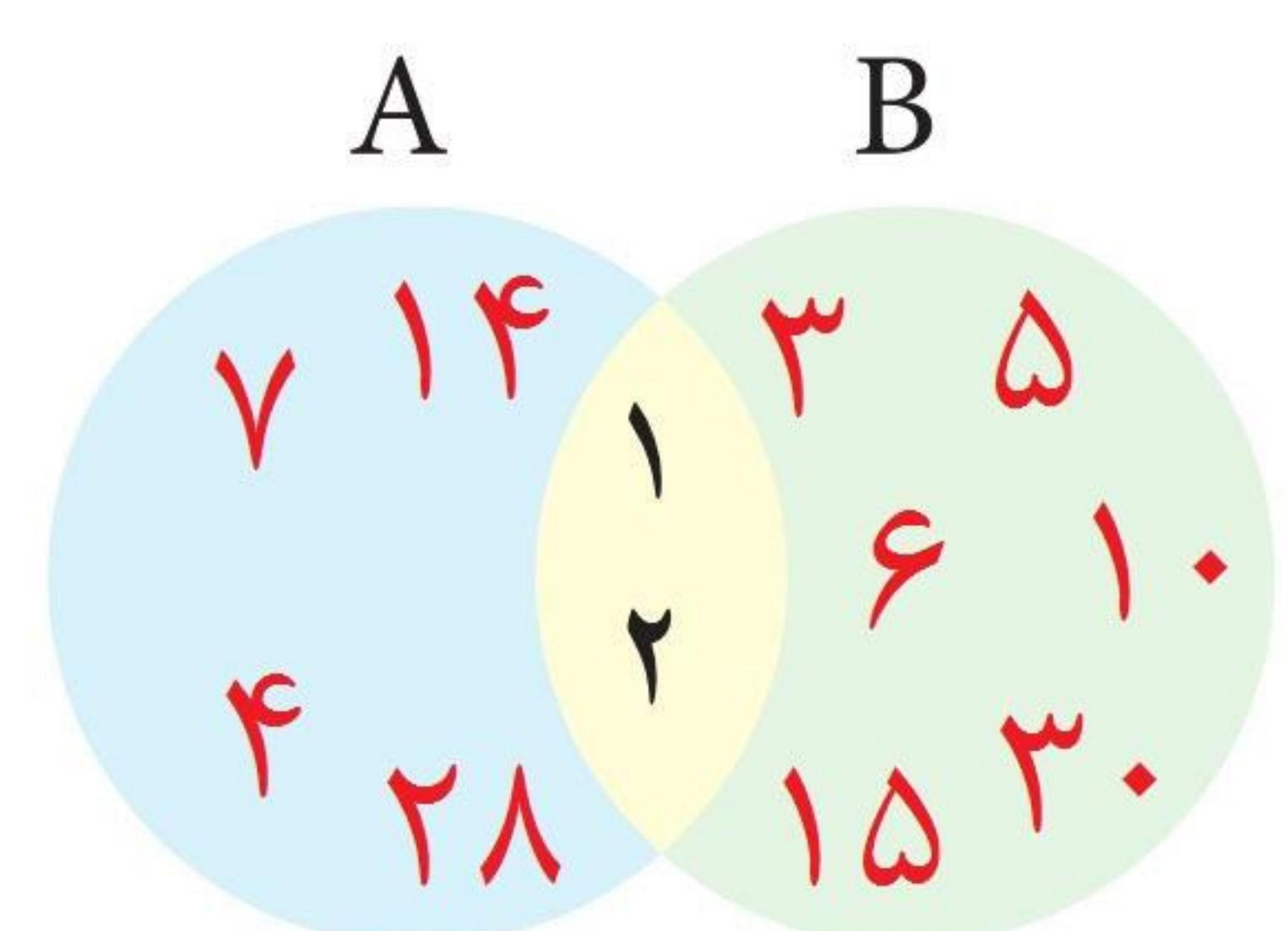
$$30 \Rightarrow n(B) = 8 \quad B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} : \text{مجموعه شمارنده‌های عدد } 30$$

$$A \cap B = \{1, 2\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2 : \text{شمارنده‌های مشترک}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 14, 15, 28, 30\} \Rightarrow n(A \cup B) = 12$$

ب) جدول زیر را کامل کنید.

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
۶	۸	۲	۱۲



پ) چرا رابطه‌ای را که در فعالیت (۱) به دست آوردید؛ یعنی $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ در این مثال برقرار نیست؟ چون عضوهای A و B مشترک دارند یعنی $A \cap B \neq \emptyset$

ت) با تکمیل نمودار مقابل، سعی کنید رابطه درست برای $n(A \cup B)$ را حدس بزنید.

همان طور که دیدیم، اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نمودار رو به رو، در مورد علت درستی این رابطه با دوستان خود بحث کنید.

کاردر کلاس



۱) یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که :

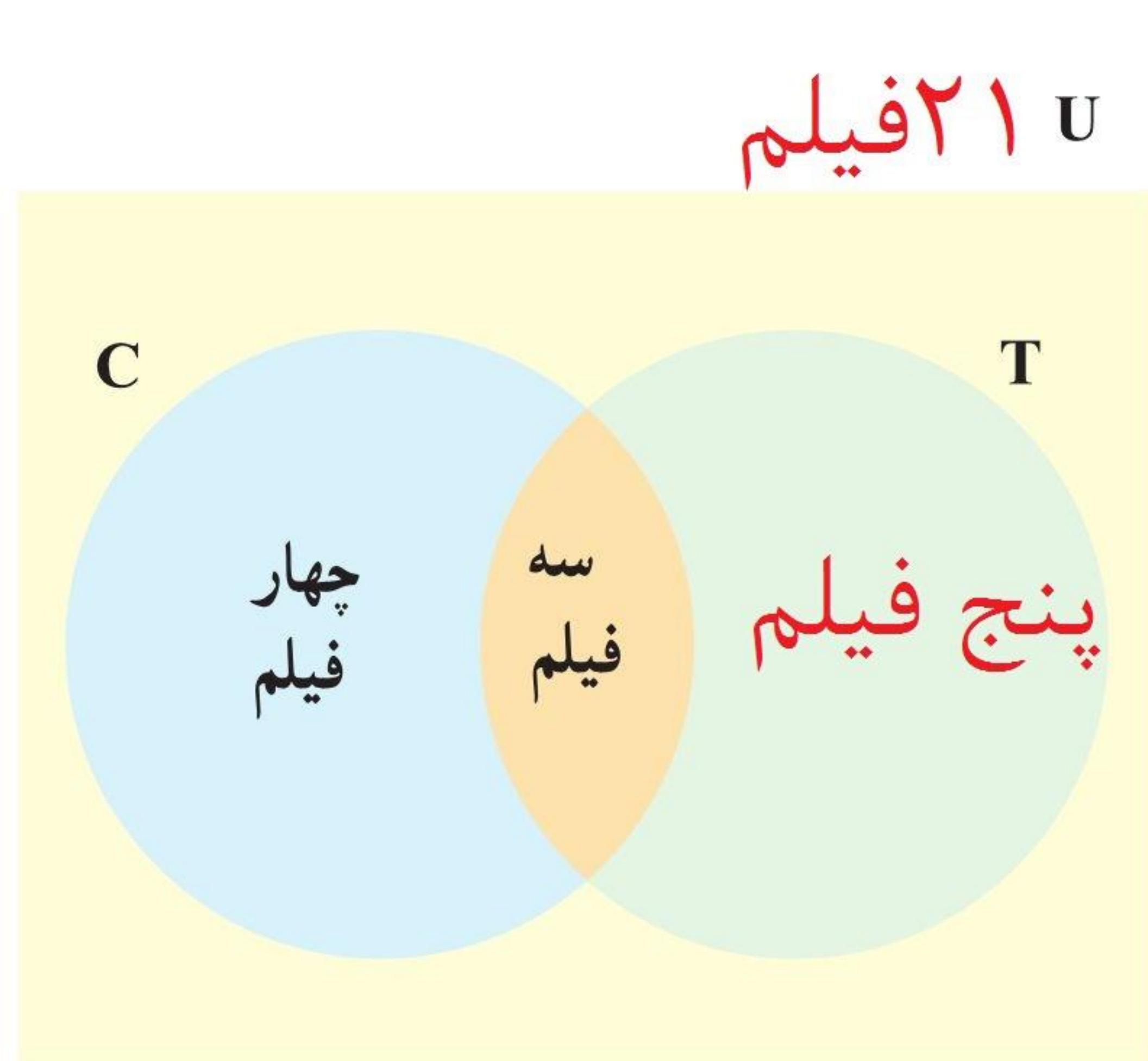
(الف) پویانمایی **با** طنزند.

(ب) غیرپویانمایی **و** غیر طنزند.

روش اول حل : مجموعه شامل تمام فیلم‌ها را با U، مجموعه فیلم‌های پویانمایی را با C و مجموعه فیلم‌های طنز را با T نشان می‌دهیم. جاهای خالی را پرکنید و جواب‌ها را بیابید.

$$n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = 7 + 8 - 3 = 12$$

$$n(C \cup T)' = n(U) - n(C \cup T) = 21 - 12 = 9$$



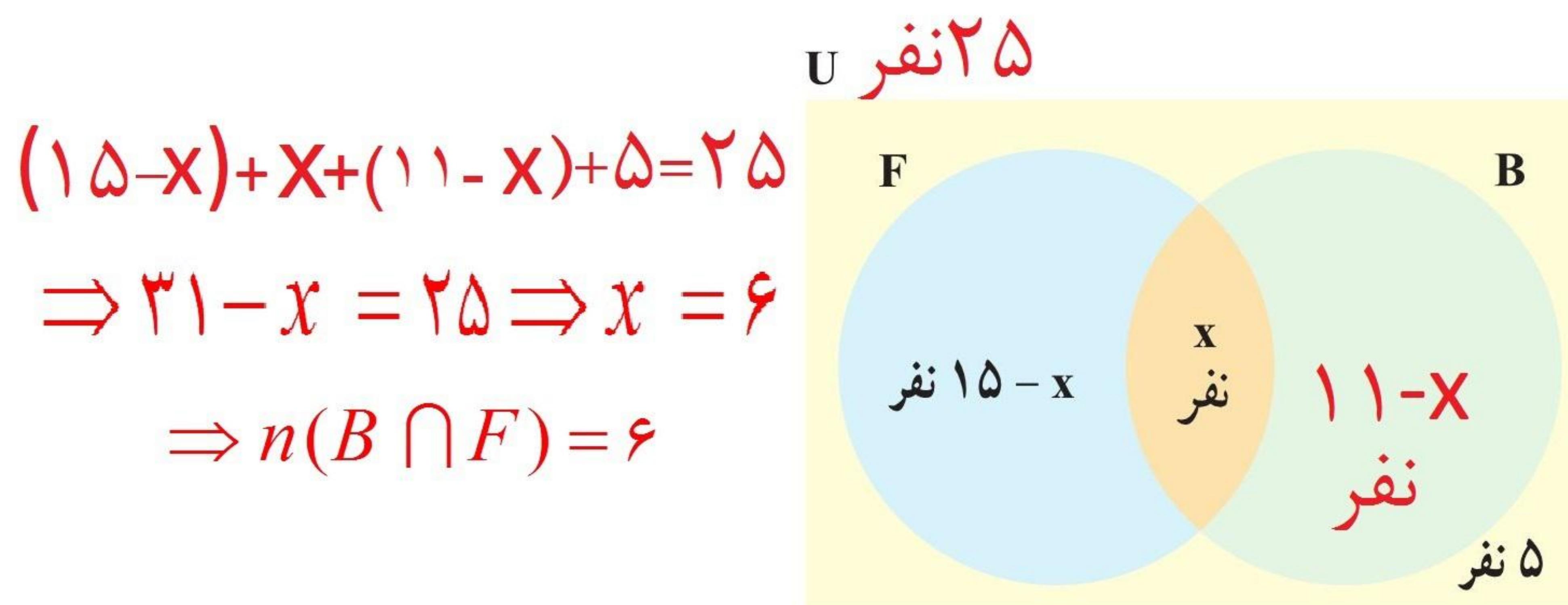
روش دوم حل : در نمودار وین مقابله، دو مجموعه C و T سطح درون U را به چهار ناحیه جداگانه تقسیم کرده‌اند که عدد مربوط به دو تا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را بیابید.

$$4 + 3 + 5 = 12 \quad \text{پویانمایی} \text{ یا طنز (الف)}$$

$$21 - 12 = 9 \quad \text{غیر پویانمایی} \text{ و غیر طنز (ب)}$$

۲ در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانشآموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.

روش اول حل: با تکمیل نمودار زیر مقدار x را باید.



روش دوم حل: چون ۵ نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نیستند، پس $n(B \cup F) = 20$. حال با نوشتن فرمول $n(B \cup F) = n(B) + n(F) - n(B \cap F)$ می‌توان $n(B \cap F)$ را به دست آورد.

$$n(B \cup F) = n(B) + n(F) - n(B \cap F) \Rightarrow 20 = 11 + 15 - n(B \cap F) \Rightarrow n(B \cap F) = 6$$

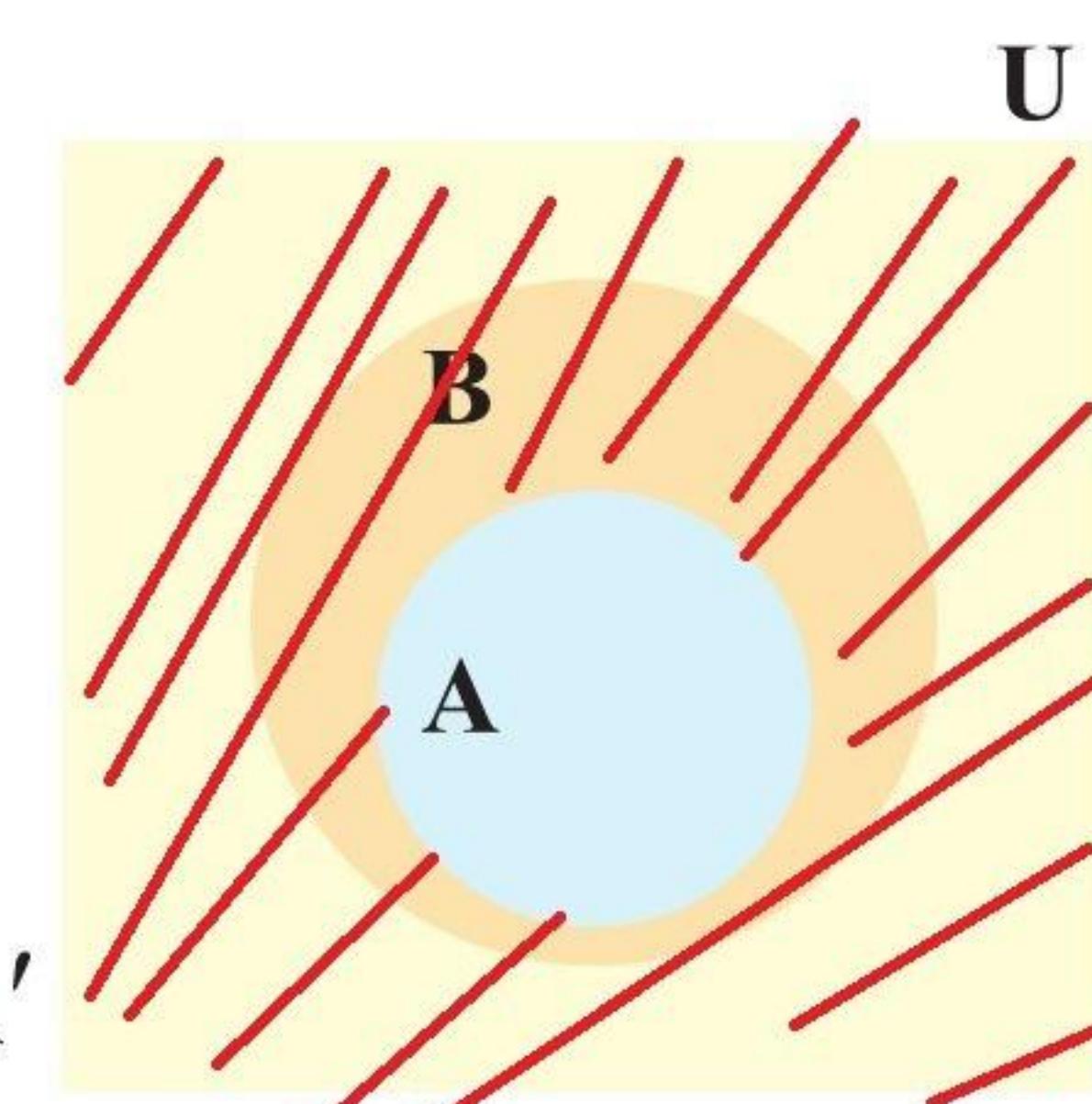
۳ (الف) فرض کنیم $A \subseteq B \subseteq U$ که در آن U مجموعه مرجع است. در نمودارهای مقابل و B' را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین A' و B' هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟

$$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$$

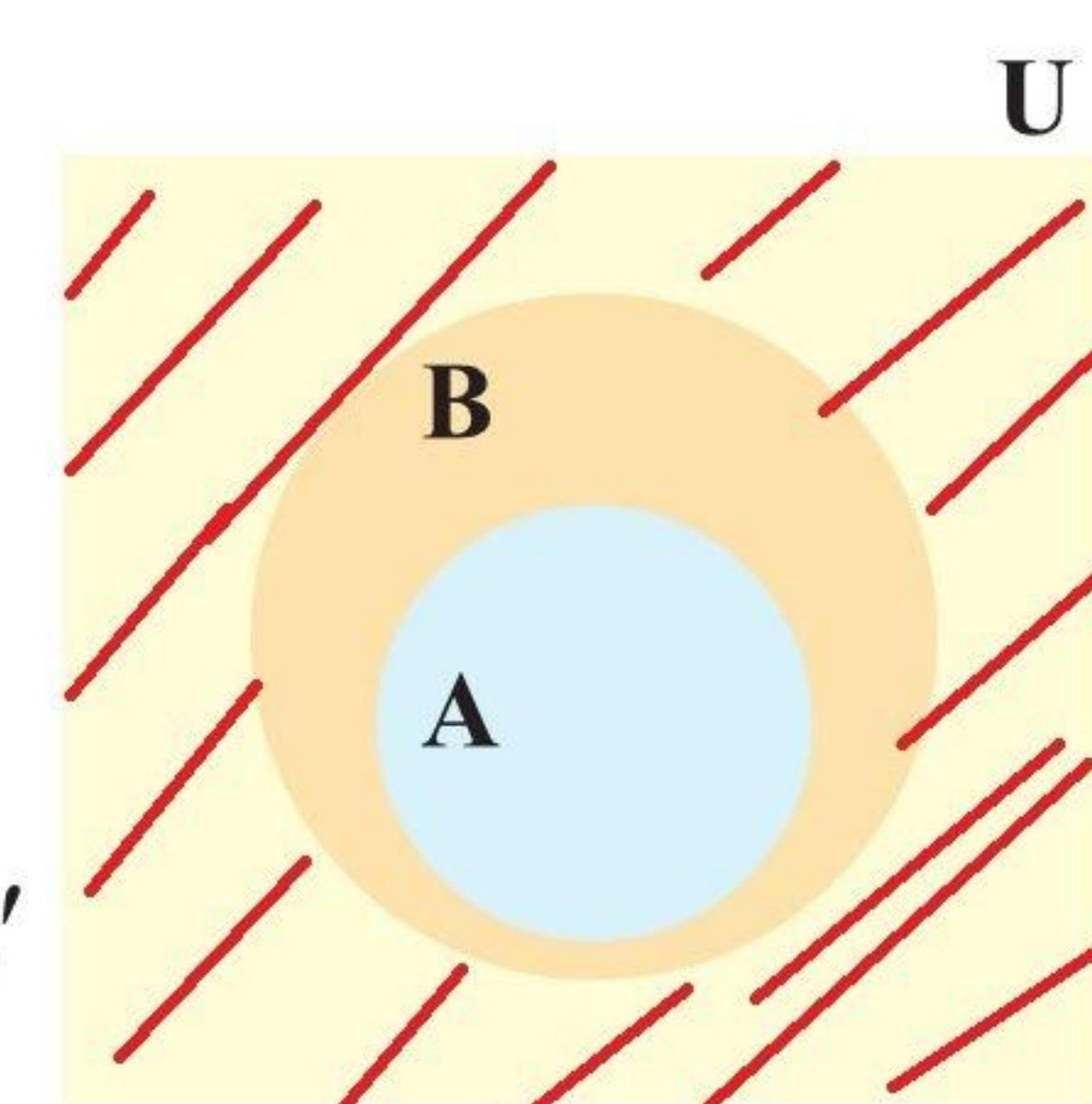
(ب) اگر $U = \{a, b, c, d, e\}$ و $A = \{a, b\}$ در این صورت $B \subseteq A$ می‌باشد. با به دست آوردن A' و B' نشان دهید که بین A' و B' هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است.

$$A' = \{c, d, e\}, \quad B' = \{d, e\} \Rightarrow B' \subset A'$$

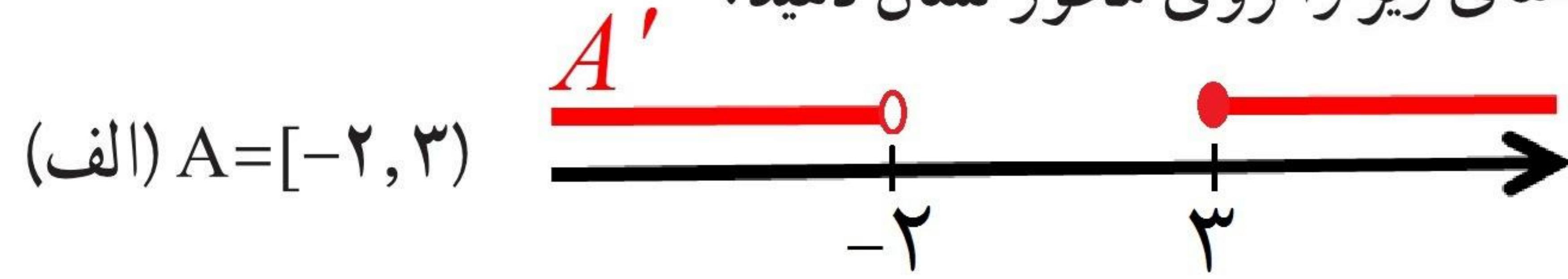
را هاشور بزنید



را هاشور بزنید


تمرین

۱ \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.



۲ \mathbb{N} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

(الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

مجموعه‌ای اعداد طبیعی زوج = A' مجموعه‌ای اعداد طبیعی فرد = A

(ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

$$B = \{5, 6, 7, \dots\} \quad B' = \{1, 2, 3, 4\}$$

(پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

$$C = \{2, 3, 5, 7\} \quad C' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$$

اگر $n(A) = 15$ و $n(B) = 5$ ، $n(A \cap B) = 3$ آنگاه $n(A \cup B) = 30$ را محاسبه کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 30 = 15 + n(B) - 5 \Rightarrow n(B) = 20$$

فرض کنیم A و B زیر مجموعه هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که $n(A \cap B) = 20$ و $n(B) = 40$ ، $n(A) = 60$ و $n(U) = 100$ مطلوب است:

$$(الف) n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = 60 + 40 - 20 = 80$$

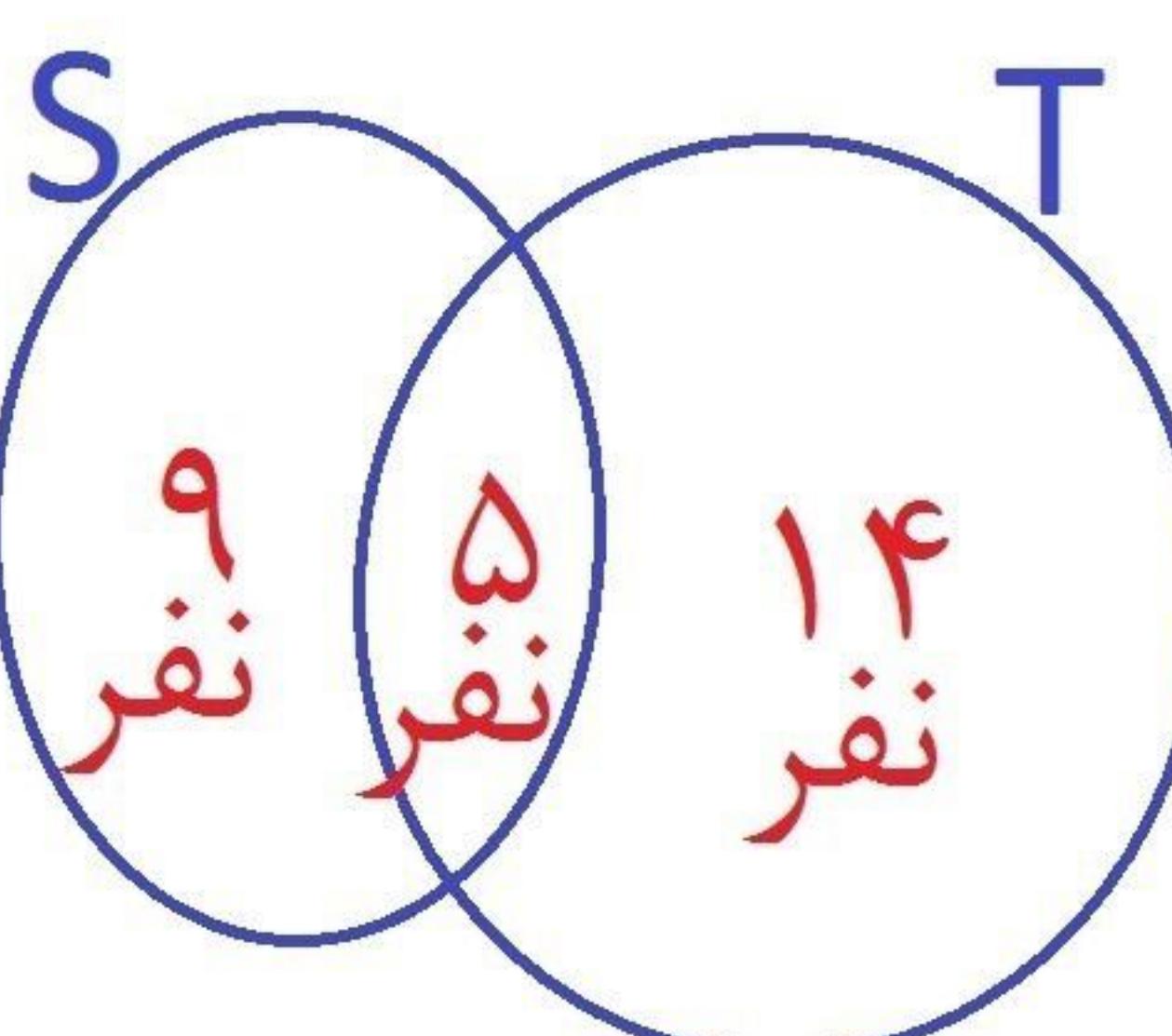
$$(ب) n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 60 - 20 = 40$$

$$(پ) n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 40 - 20 = 20$$

$$(ت) n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 80 = 20$$

۳۱ نفر

X



در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانشآموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانشآموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

الف) تعداد دانشآموزانی که فقط عضو گروه سرودند. ۹

$$x + 14 + 5 + 9 = 31 \Rightarrow x = 3$$

در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

حداقل =

به معنای اجتماع

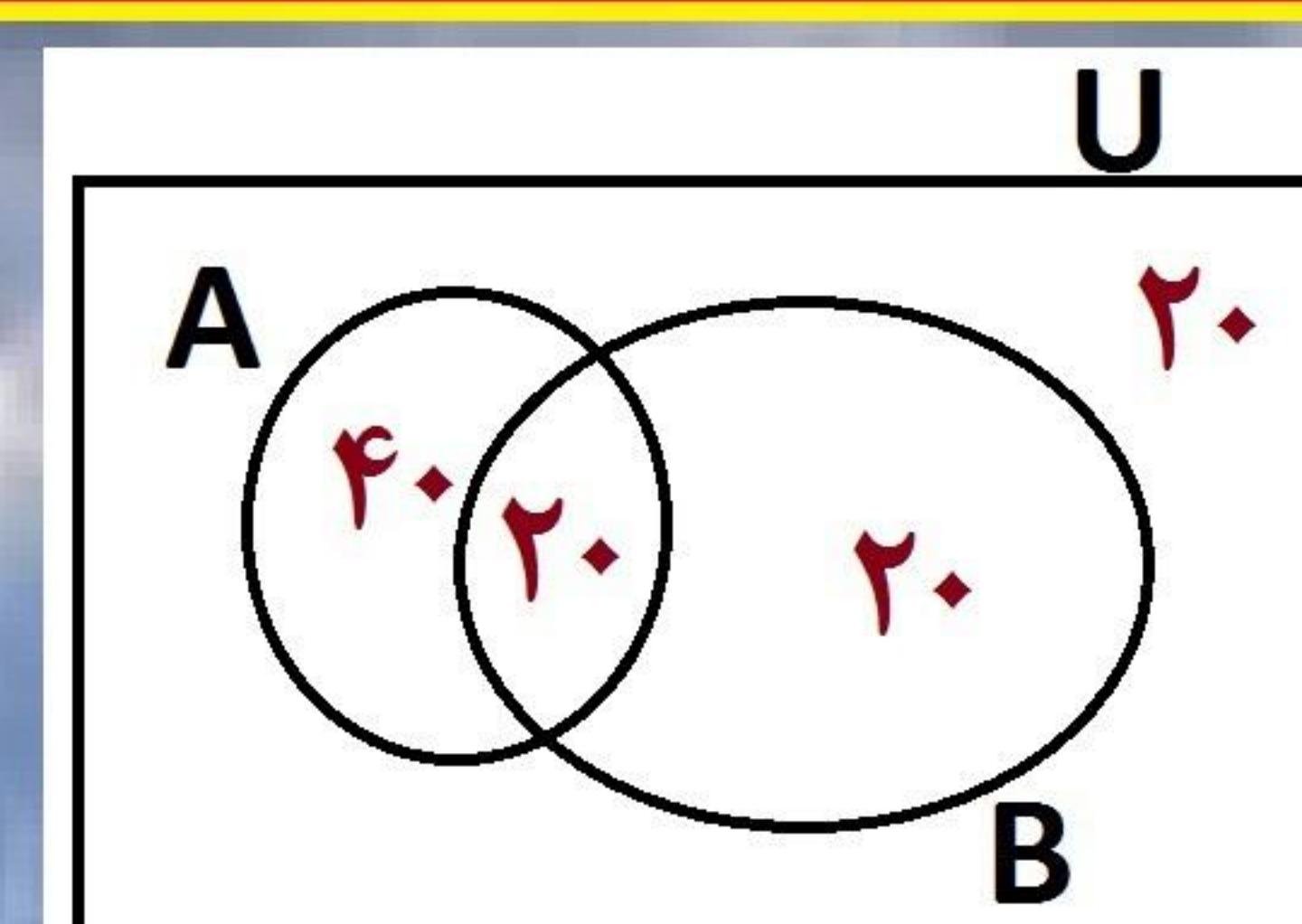
$$70 - 32 = 38$$

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

$$= \text{فقط شرکت B} + \text{فقط شرکت A} = 38 + 25 = 63$$

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = 110 - 95 = 15$$

توجه: مسائل فوق را با شکل راحت‌تر می‌توان پاسخ داد به عنوان نمونه سوال ۴ را مشاهده بفرمایید



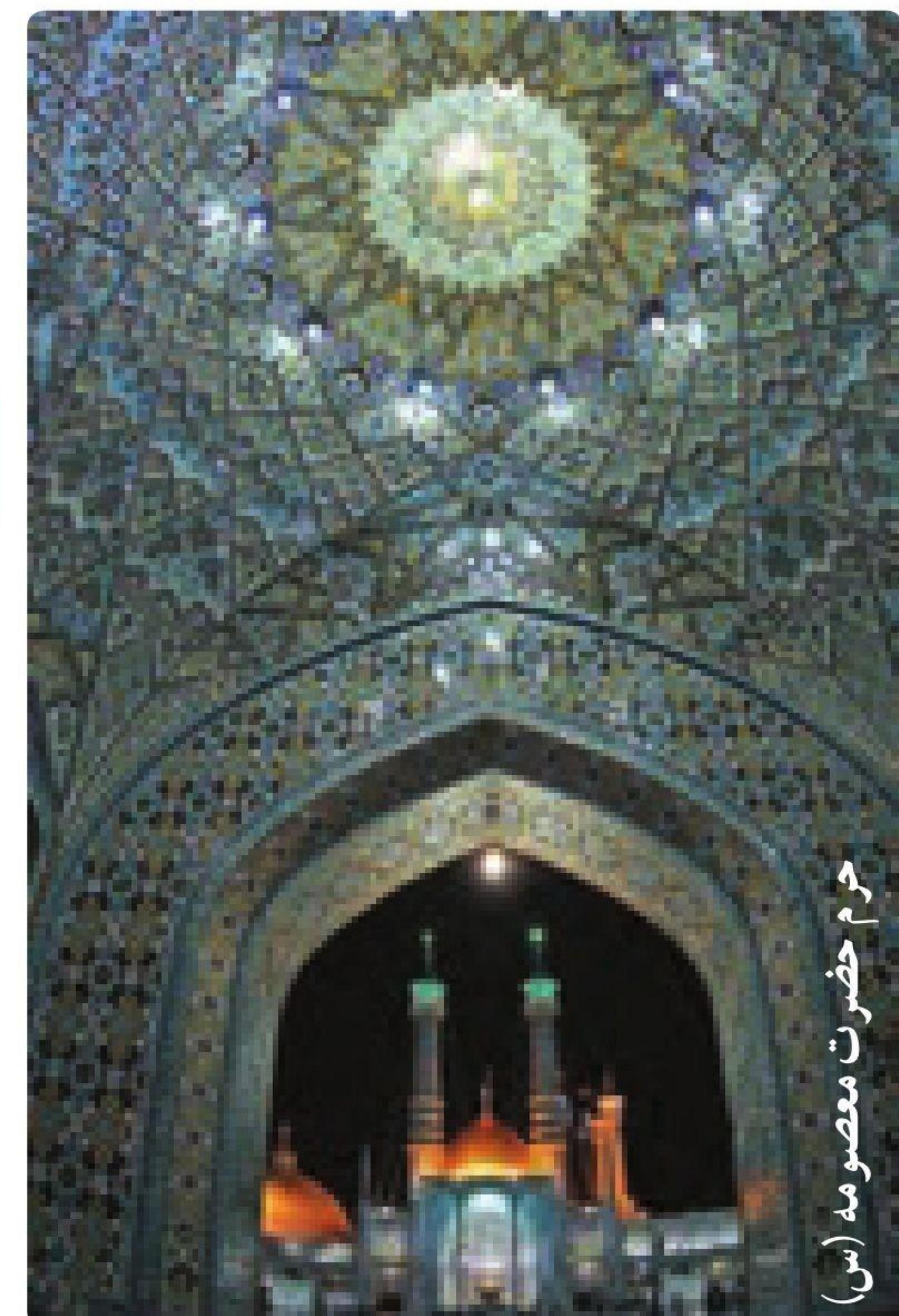
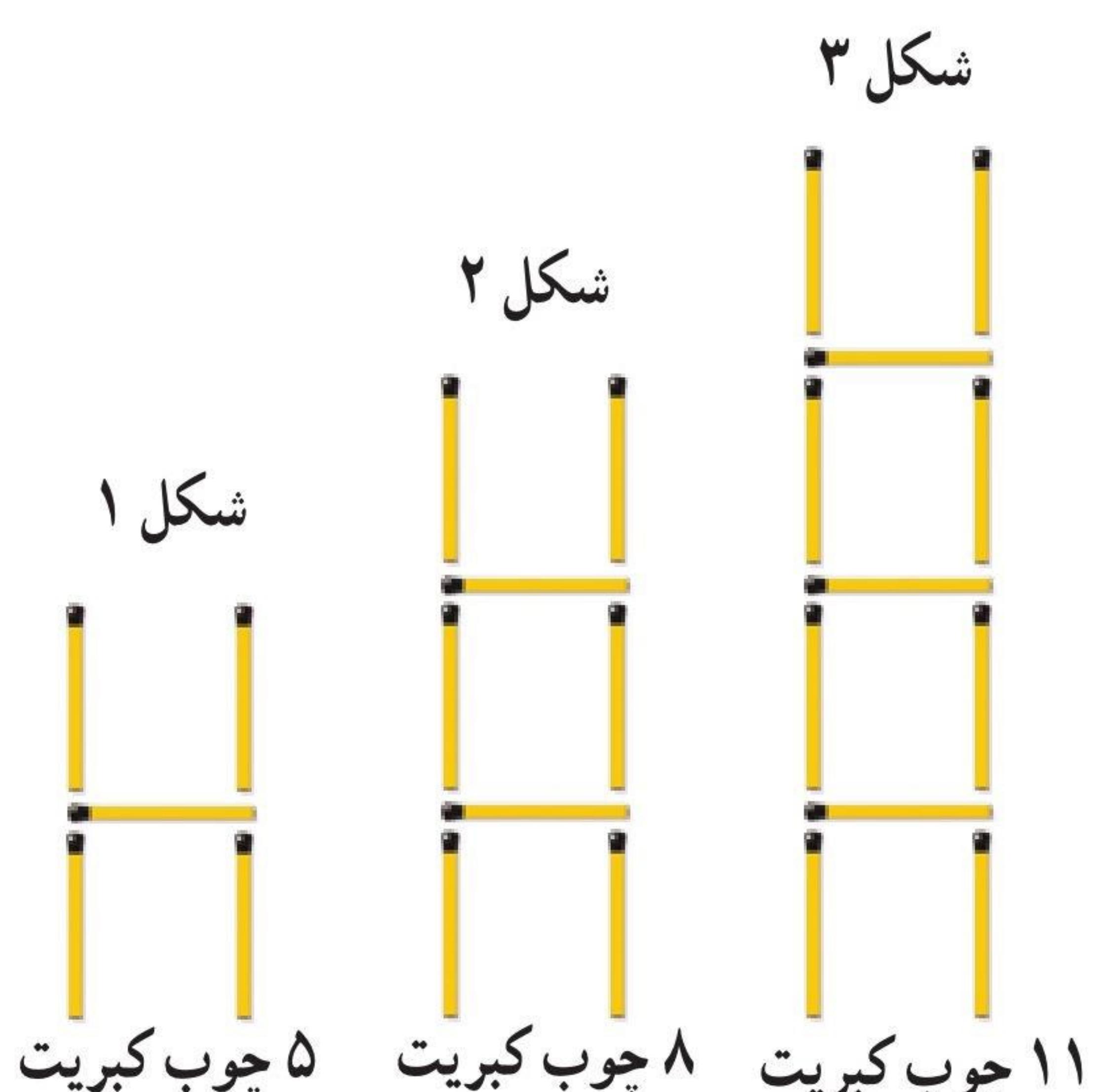
$$\begin{aligned} \text{الف} &= 20 + 20 + 40 \\ &= 80 \\ \text{ب} &= 40 \\ \text{پ} &= 20 \\ \text{ت} &= 20 \end{aligned}$$

درس سوم: الگو و دنباله

الگو

مثال

به شکل‌های زیر و تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید.



n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n	...
a_n : تعداد چوب کبریت‌ها	۵	۸	۱۱
رابطه بین n و a_n	$a_1 = 5$	$a_2 = 8$	$a_3 = 11$	$a_n = \dots$...

به عنوان مثال ملاحظه می‌شود که، «تعداد چوب کبریت‌های شکل اول برابر ۵ است» که این مطلب را به طور خلاصه به صورت $a_1 = 5$ نشان داده‌ایم (می‌خوانیم: a_1 اندیس ۱ برابر ۵). عبارت‌های a_1 ، a_2 و a_3 متغیرهای اندیس دار^۱ نامیده می‌شوند که مقادیر آنها به ترتیب ۵، ۸ و ۱۱ است. به این اعداد جملات الگو هم گفته می‌شود. پس در واقع، عدد ۵ جمله اول الگوست؛ ۸ جمله دوم آن و به همین ترتیب الى آخر.

$$a_1 = 5 \quad a_2 = 8 \quad a_3 = 11$$

الف با این نمادگذاری، a_n نشان‌دهنده چیست و مقدار آن چقدر است؟
جمله‌ی چهارم الگو است که مقدار آن ۱۴ می‌باشد.

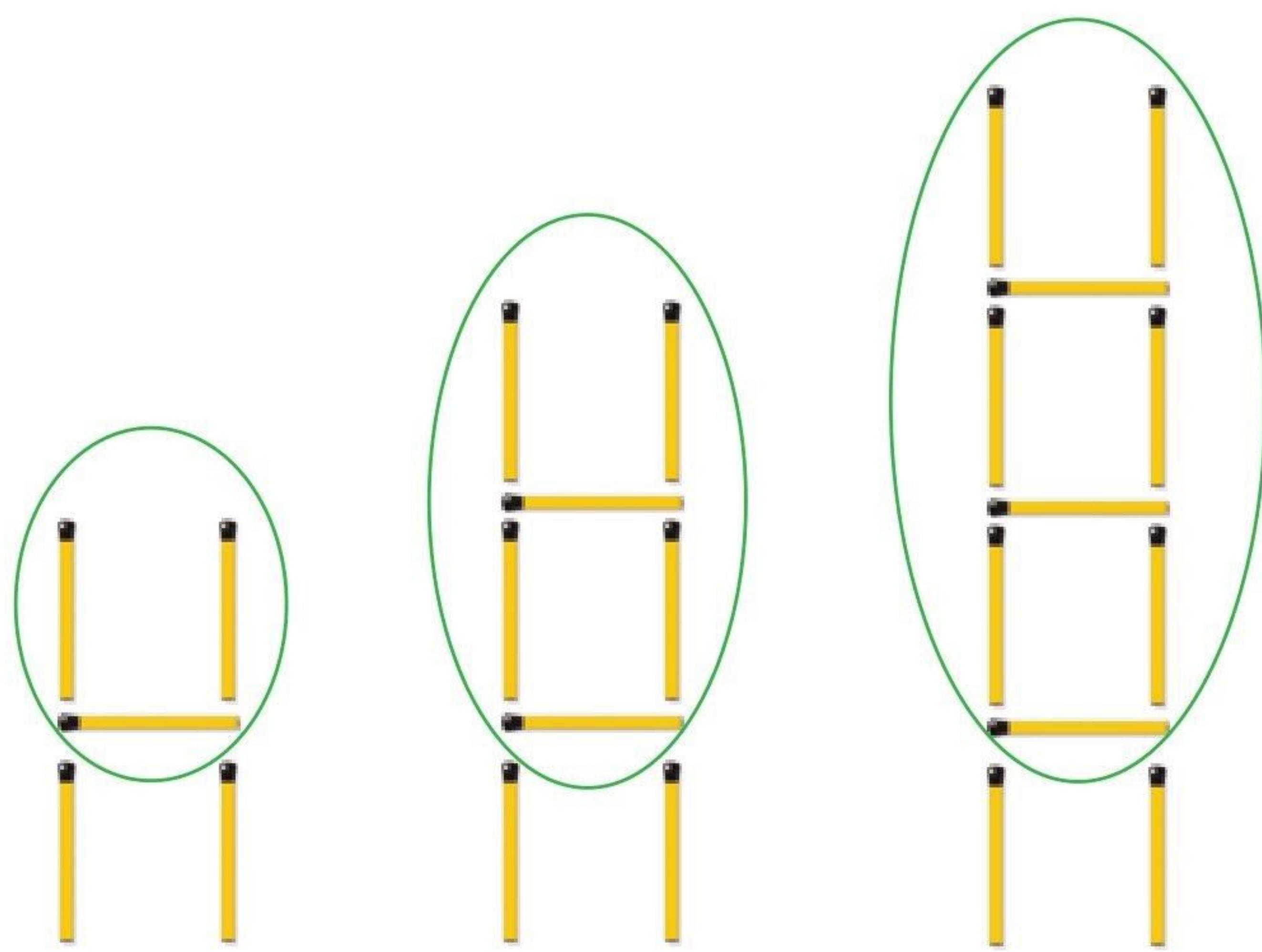
ب a_n به چه معناست؟ جمله‌ی n ام الگو است.

پ آیا می‌توانید حاصل a_n را بر حسب n بدست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.

۱- در سال‌های گذشته با متغیرهایی مثل x ، y و z سروکار داشتیم که اسم آنها تک حرفی بود؛ در حالی که نام متغیرهای اندیس دار که در اینجا به کار می‌بریم، دو بخشی است. پس تفاوت این دو نوع متغیر، تنها در شکل نام‌گذاری آنهاست و از نظر ماهیت، تفاوتی با هم ندارند.

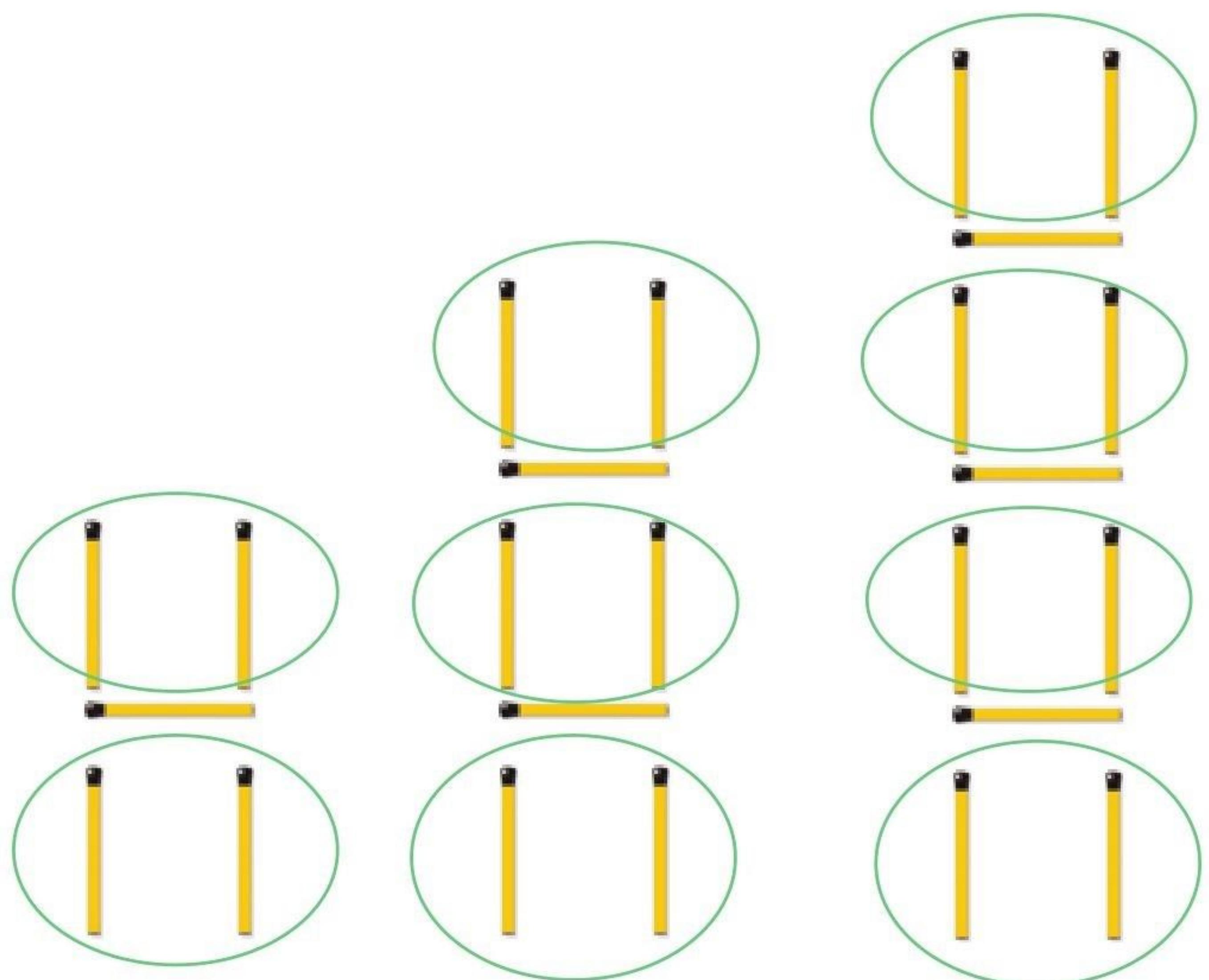
دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به عنوان نمونه، پیدایش شباهه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه‌ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی‌های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح‌های روی یک گل آفتابگردان، شکل‌های هندسی روی یک سطح کاشی کاری شده یا مارپیچ‌های روی میوه آناناس توجه شمارا به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می‌توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

از طرف دیگر یکی از رسالت‌های مهم ریاضیات، مدل‌سازی کردن پدیده‌های طبیعی و بی‌بردن به الگوهای نهفته در آنهاست. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارت است از علم مطالعه الگوها.



۱ آیدا برای به دست آوردن حاصل a_n در مثال بالا، شکل های الگو را به صورت رو به رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار a_1 و a_n را به دست آورید.

$$a_1 = 1(3) + 2 \quad a_2 = 2(3) + 2 \quad a_3 = 3(3) + 2 \quad a_4 = 4(3) + 2 \quad \dots \quad a_{10} = 10(3) + 2 \quad \dots \quad a_n = n(3) + 2 = 3n + 2$$



۲ آیسا روش دیگری را به کار برد. او تعداد چوب کبریت های افقی و عمودی در هر شکل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار a_n دست یابد. مقدار حاصل برای a_n از این روش را درجای مشخص شده بنویسید.

$$a_1 = 1 + 2(2) \quad a_2 = 2 + 3(2) \quad a_3 = 3 + 4(2) \quad a_4 = 4 + 5(2) \quad \dots \quad a_{10} = 10 + (10+1)2 \quad \dots \quad a_n = n + (n+1)2$$

$\Rightarrow a_n = 3n + 2$

۳ آیا شما راه دیگری را برای به دست آوردن حاصل a_n می دانید؟

$$a_1 = 5 + 0 \times 3 \quad a_2 = 5 + 1 \times 3 \quad a_3 = 5 + 2 \times 3 \quad a_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$$

۴ همان طور که در قسمت های (۱) و (۲) دیدیم، آیدا و آیسا مقدار a_n را به ترتیب به صورت های $a_n = n + (n+1)2$ و $a_n = 3n + 2$ به دست آورده اند. جواب آیسا را ساده کنید تا به شکل جواب آیدا درآید.

همان جواب آیدا است $\rightarrow a_n = n + 2n + 2 = 3n + 2$ جواب آیسا

۵ به کمک رابطه $a_n = 3n + 2$ تعداد چوب کبریت های شکل بیستم را باید.

$$n = 20 \Rightarrow a_{20} = 3(20) + 2 = 62$$

با استفاده از رابطه $a_n = 3n + 2$ مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

$$a_n = 77 \Rightarrow 3n + 2 = 77 \Rightarrow 3n = 75 \Rightarrow n = 25$$

تذکر: در مثال بالا دیدیم که بیانگر تعداد چوب کبریت های شکل n است. $a_n = 3n + 2$ را جمله عمومی الگوی نامیم؛ چرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می کند و به کمک آن می توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد. به عبارت دیگر، در اختیار داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگوست.

الگوی خطی

در الگوی مثال قبل دیدیم که هر جمله دقیقاً ۳ واحد بیش از جمله قبل از خودش بود.

a_1	a_2	a_3	a_4	...
۵	۸	۱۱	۱۴	
+3	+3	+3	+3	

چنین الگوهایی را که در آنها اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌نامیم. برای بیان دلیل این نام‌گذاری، ستون سوم جدول مقابل را در نظر می‌گیریم. اگر این نقاط را در صفحه مختصات مشخص کنیم، همگی آنها روی خط $y = 3x + 2$ قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر مختصات تمام این نقاط در معادله خط گفته شده صدق می‌کند. شباهت بین معادله خط $y = 3x + 2$ و جمله عمومی الگو یعنی $a_n = 3n + 2$ اتفاقی نیست. عدد ۳ که در واقع اختلاف بین جملات متوالی الگو بود، در معادله خط به عنوان شیب خط ظاهر شده است که این مطلب همواره درست است.

به طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آنها به صورت $t_n = an + b$ است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

دیدیم که در یک الگوی خطی با جمله عمومی $t_n = an + b$ ، میزان تغییر جملات متوالی برابر a بود. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله متوالی در این الگوی خطی برابر ضریب n است. به عنوان مثال در یک الگوی خطی با جمله عمومی $t_n = -4n + 15$ ، هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش ۴ واحد کاهش می‌یابد:

$$11, 7, 3, -1, -5, -9, \dots$$

مثال

در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

حل: فرض کنیم جمله عمومی به صورت $C_n = an + b$ باشد. پس داریم:

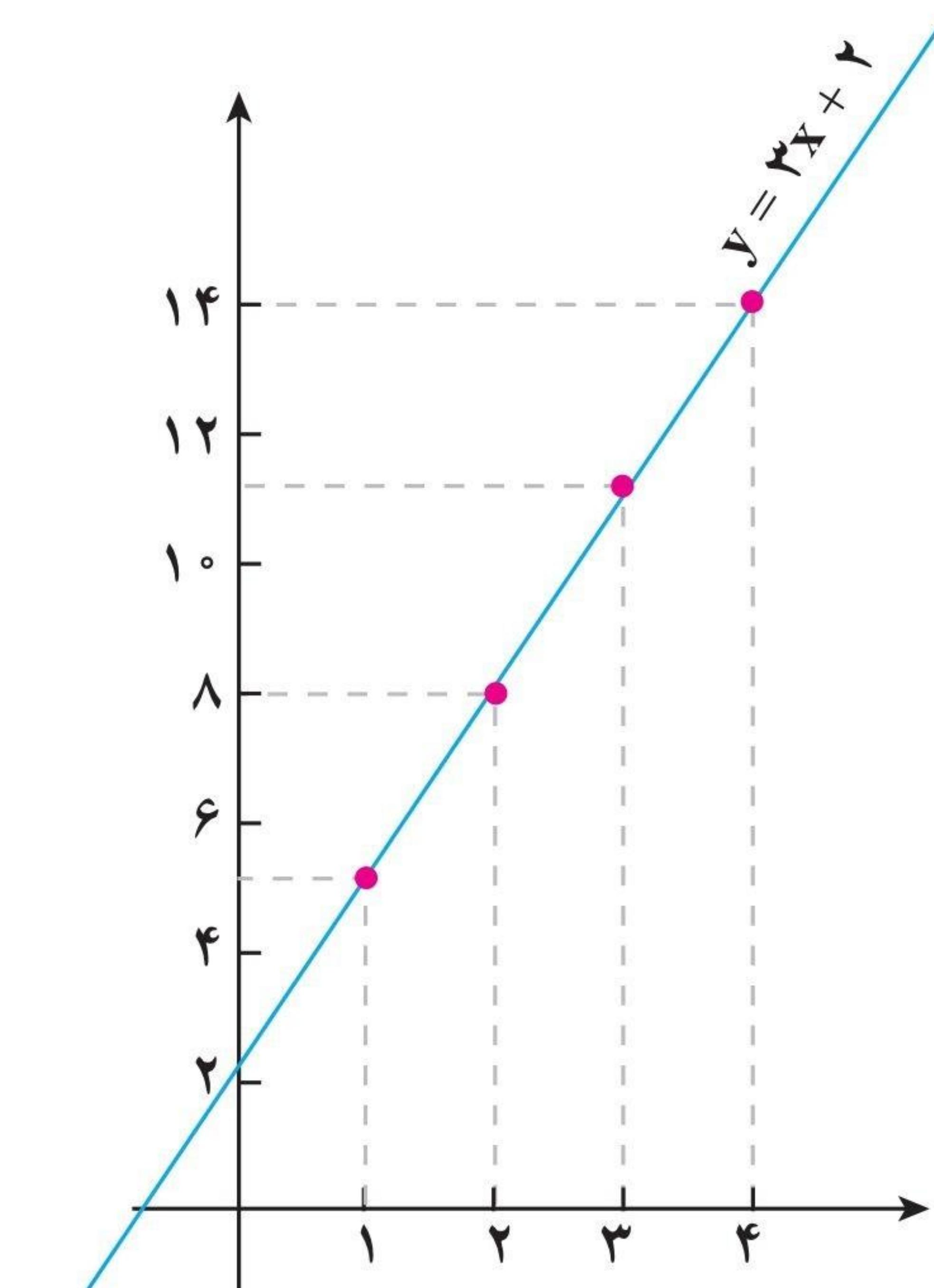
$$C_4 = 17 \Rightarrow a(4) + b = 17$$

$$C_{10} = 41 \Rightarrow a(10) + b = 41$$

$$6a = 24 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 1$$

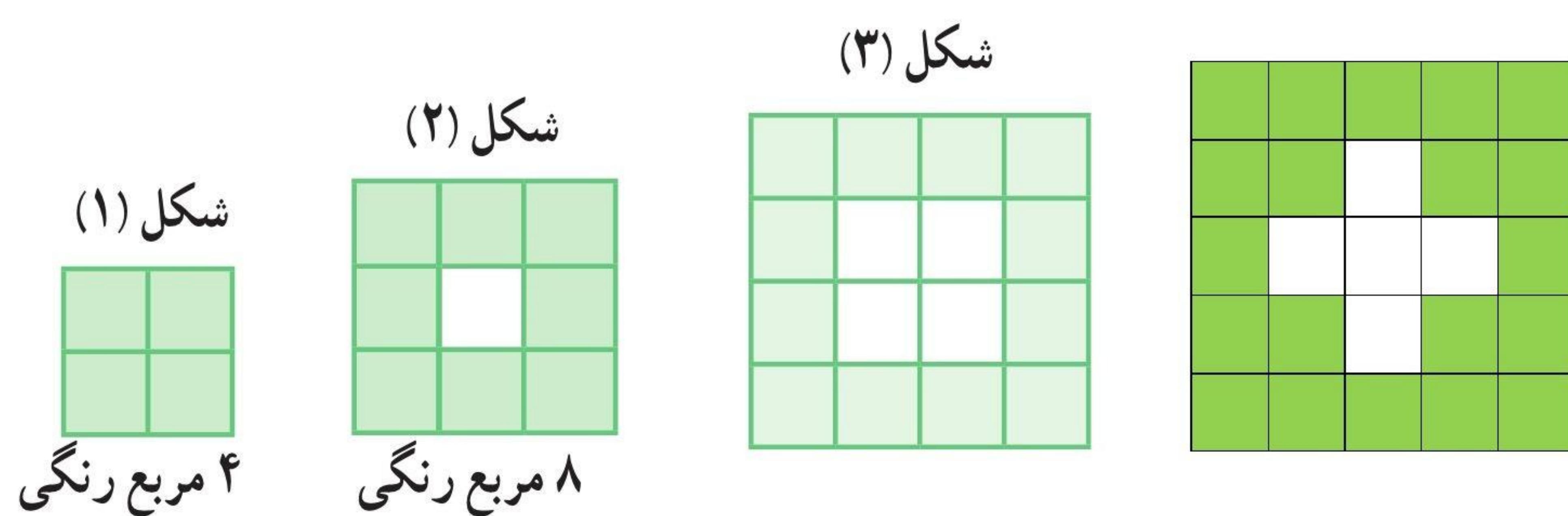
پس $C_n = 4n + 1$. بنابراین جملات الگو به صورت زیر خواهند بود:

$$5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, \dots$$





۱ شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.



n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
b_n : تعداد مربع‌های رنگی	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
رابطه بین n و b_n	$b_1 = 4$	$b_2 = 8$	$b_3 = 12$	$b_4 = 16$	$b_5 = 20$

۲ توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می‌شود.
چون اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی در آن، عددی ثابت است.

۳ با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a در رابطه $b_n = an + h$ را بباید و پس از حدس زدن مقدار h ، حاصل b_n را به دست آورید.

اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی برابر ۴ است پس $a = 4$ و $h = 0$ ، پس:

۴ شکل شماره ۲۵ دارای چند مربع رنگی است؟

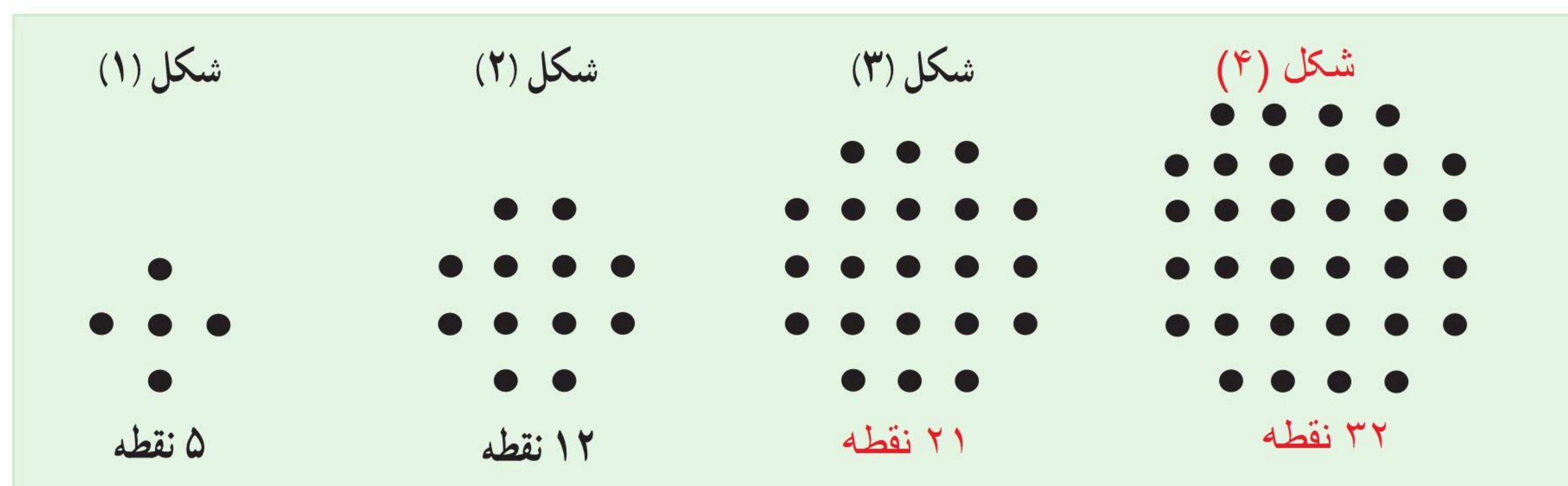
$$b_n = 4n \xrightarrow{n=25} b_{25} = 100$$

۵ در چه مرحله‌ای از الگوی بالا، تعداد مربع‌های رنگی برابر ۱۴۴ است؟ $b_n = 144 \Rightarrow 4n = 144 \Rightarrow n = 36$
یعنی در مرحله‌ی ۳۶ آم، ۱۴۴ مربع رنگی داریم.

الگوهای غیرخطی

فعالیت

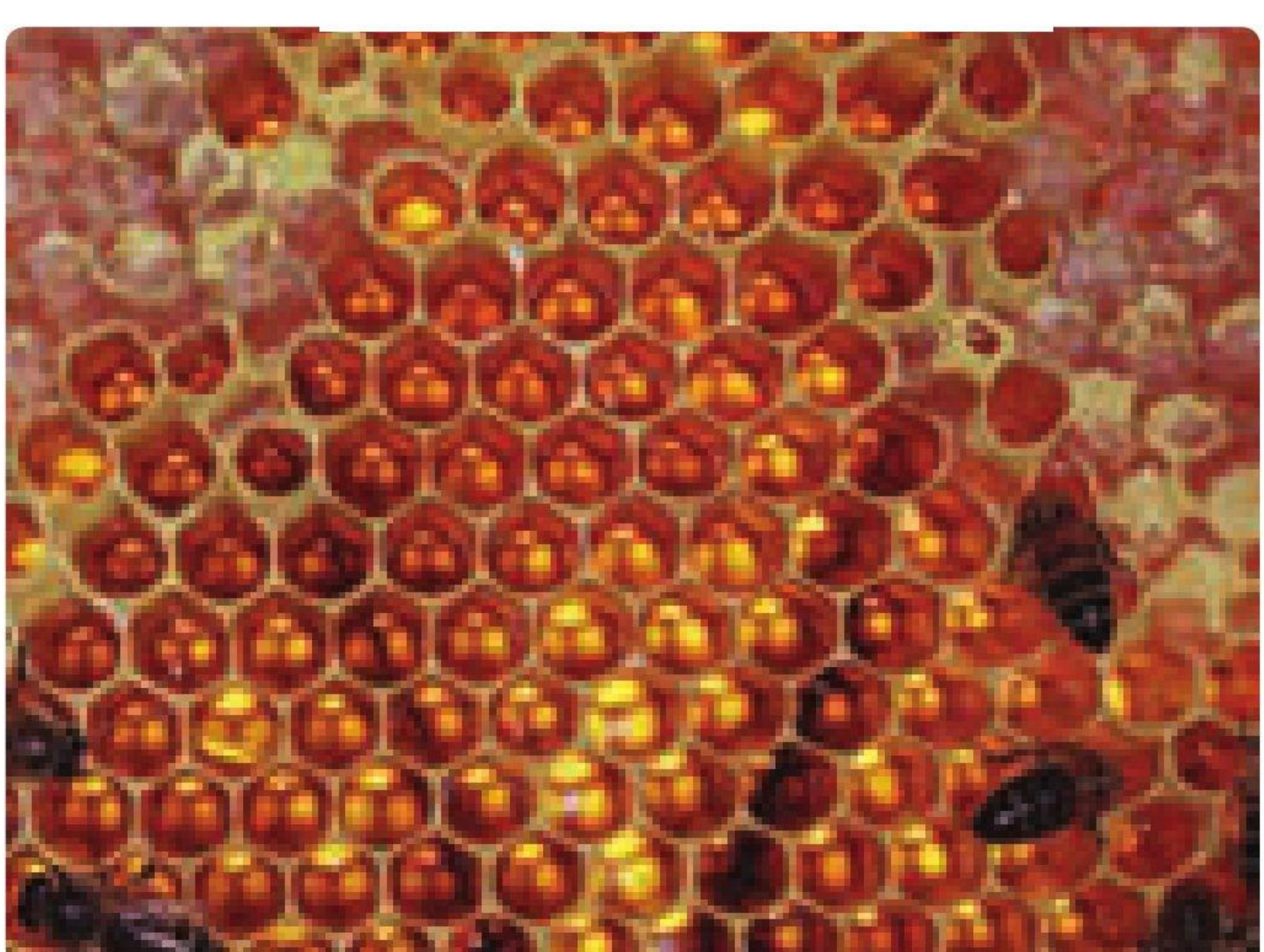
۱ در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.



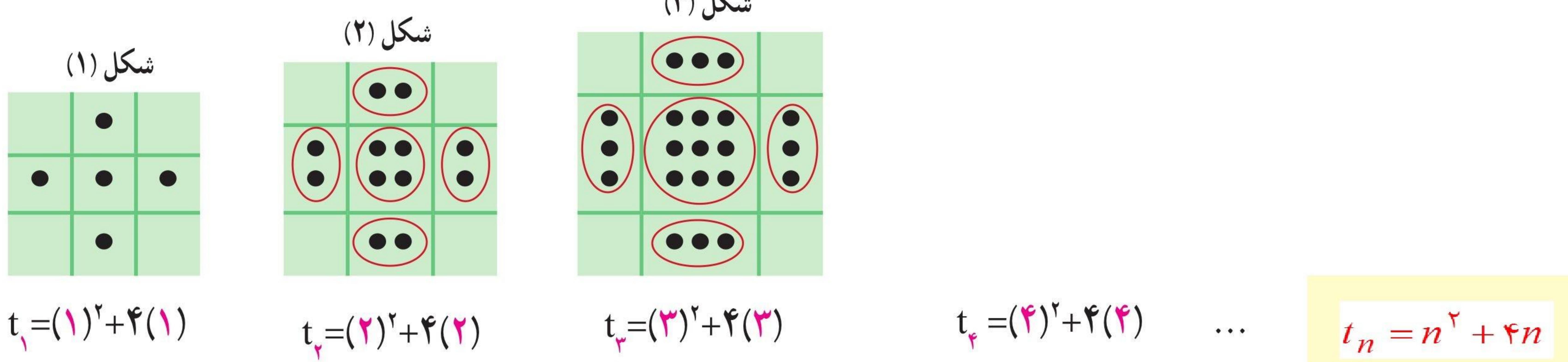
n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
t_n : تعداد نقطه‌ها	۵	۱۲	۲۱	۳۲	
رابطه بین n و t_n	$t_1 = 5$	$t_2 = 12$	$t_3 = 21$	$t_4 = 32$	

۲ آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟

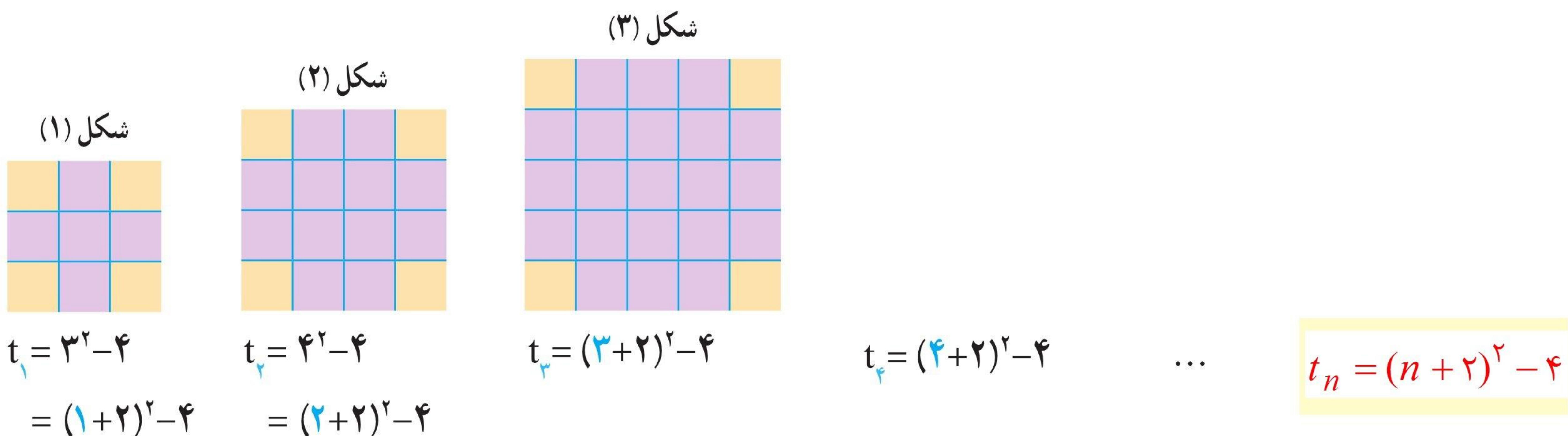
خیر، زیرا اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی، عددی ثابت نیست.



۳ امیررضا برای یافتن جمله عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به صورت زیر دسته‌بندی کرد. از شکل‌های امیررضا کمک بگیرید و مقدار t_n را باید.



۴ امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به صورت زیر نظری کرد. با استفاده از این شکل‌ها مقدار t_n را بنویسید.



۵ نشان دهید که دو مقدار به دست آمده برای t_n در دو قسمت قبلی، برابرند.

$$\text{جواب امیر رضا} \Rightarrow t_n = (n+2)^2 - 4 = n^2 + 4n + 4 - 4 = n^2 + 4n$$

۶ آیا شما روش دیگری برای یافتن t_n می‌شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

دنباله

در بخش قبل برای برخی الگوهای هندسی داده شده، یک الگوی عددی نظری کردیم. به عنوان نمونه در فعالیت قبل، تعداد نقاط مربوط به شکل‌های متوالی الگو به صورت زیر بود:

۵, ۱۲, ۲۱, ۳۲, ۴۵,

این آرایش از اعداد، مثالی از یک دنباله است.

هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. مشابه صفحات قبل، جمله اول این دنباله را با t_1 ، جمله دوم را با t_2 و به همین ترتیب جمله n ام یا جمله عمومی آن را با t_n نمایش می‌دهیم. پس:

$$t_1 = 5, t_2 = 12, t_3 = 21, \dots, t_n = n^2 + 4n, \dots$$

گفتنی است که این دنباله یک دنباله درجه ۲ نامیده می‌شود؛ زیرا جمله عمومی آن یک چند جمله‌ای درجه دوم است.

کار در کلاس

دو دنباله دلخواه مثال بزنید. ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ...

۱: دنباله اعداد طبیعی زوج ۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ... دنباله فیبوناتچی

۲: جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

(الف) $a_n = n^2 - 1$: ۰, ۳, ۸, ۱۵, ۲۴

(ب) $b_n = -n + 4$: ۳, ۲, ۱, ۰, -۱, -۲

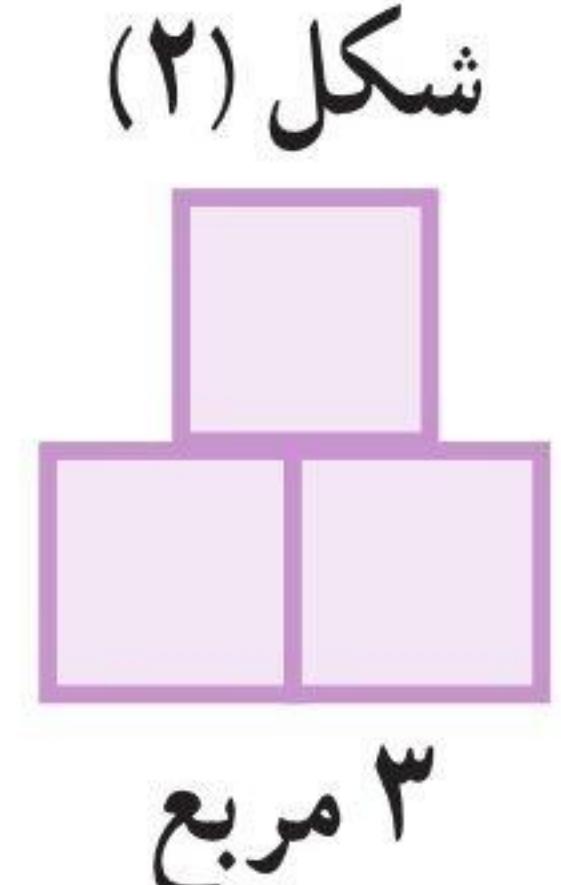
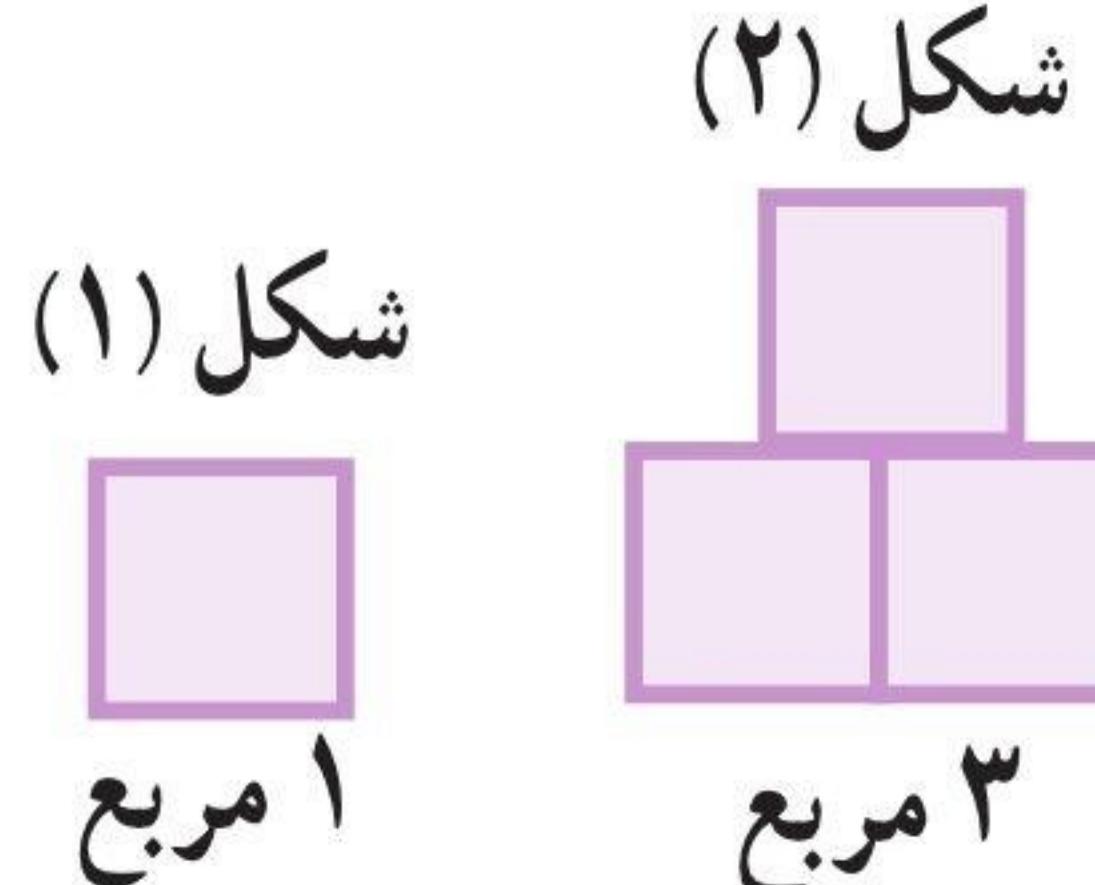
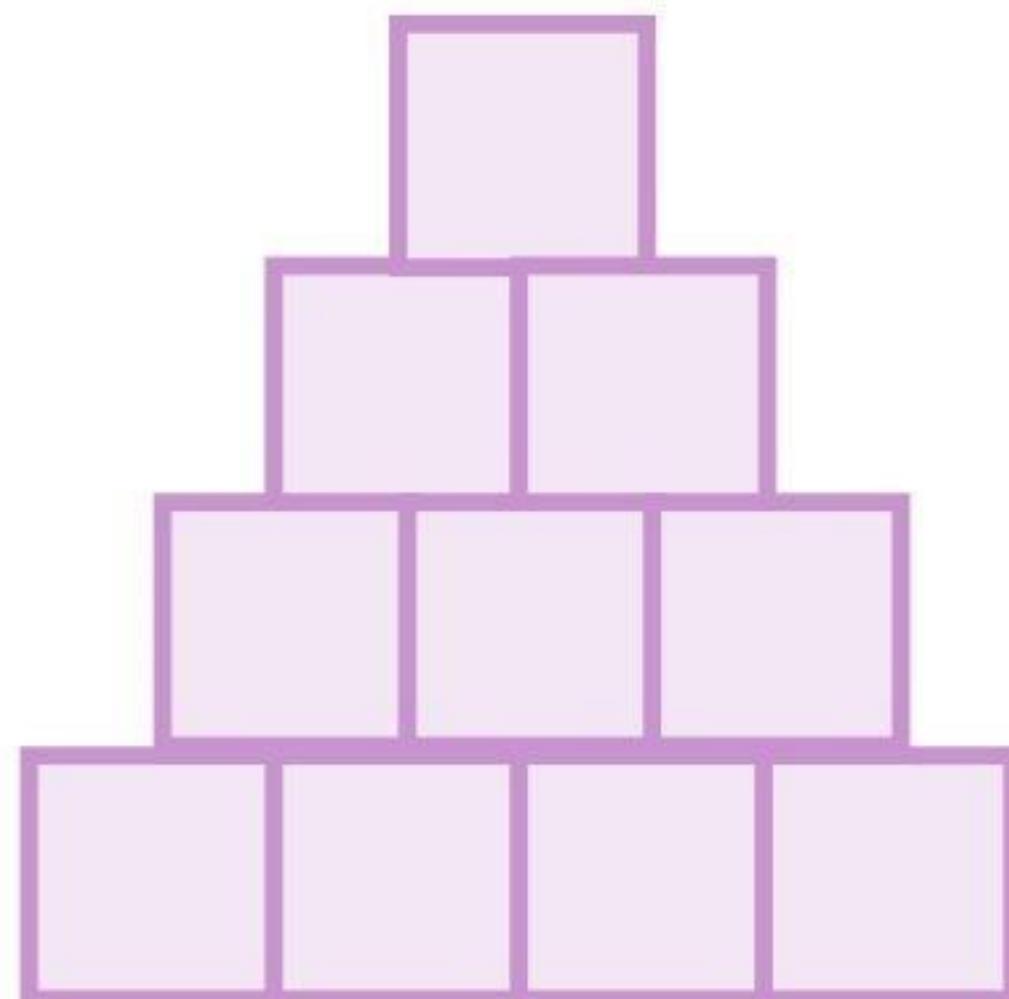
(ج) $c_n = -13 + 2n$: -۱۱, -۹, -۷, -۵, -۳

۳ در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید جمله عمومی دنباله را نیز حدس بزنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	...	t_n	...
-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۶	-۷	...	-n	...
۱	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$...	$\sqrt{2n-1}$...
۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	...	n^2	...
۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۱	...	$(0/1)^n$...
-۱	۸	-۲۷	۶۴	-۱۲۵	۲۱۶	-۳۴۳	...	$(-1)^n n^3$...
۵	۱۸	۳۱	۴۴	۵۷	۷۰	۸۳	...		
-۲	۱	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$...		
۱	۲	۴	۷	۱۱	۱۶	۲۳	...		
۳	۱	۴	۱	۵	۱	۶	...		
۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	...		
۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷	...		

شكل (۴)

شكل (۳)

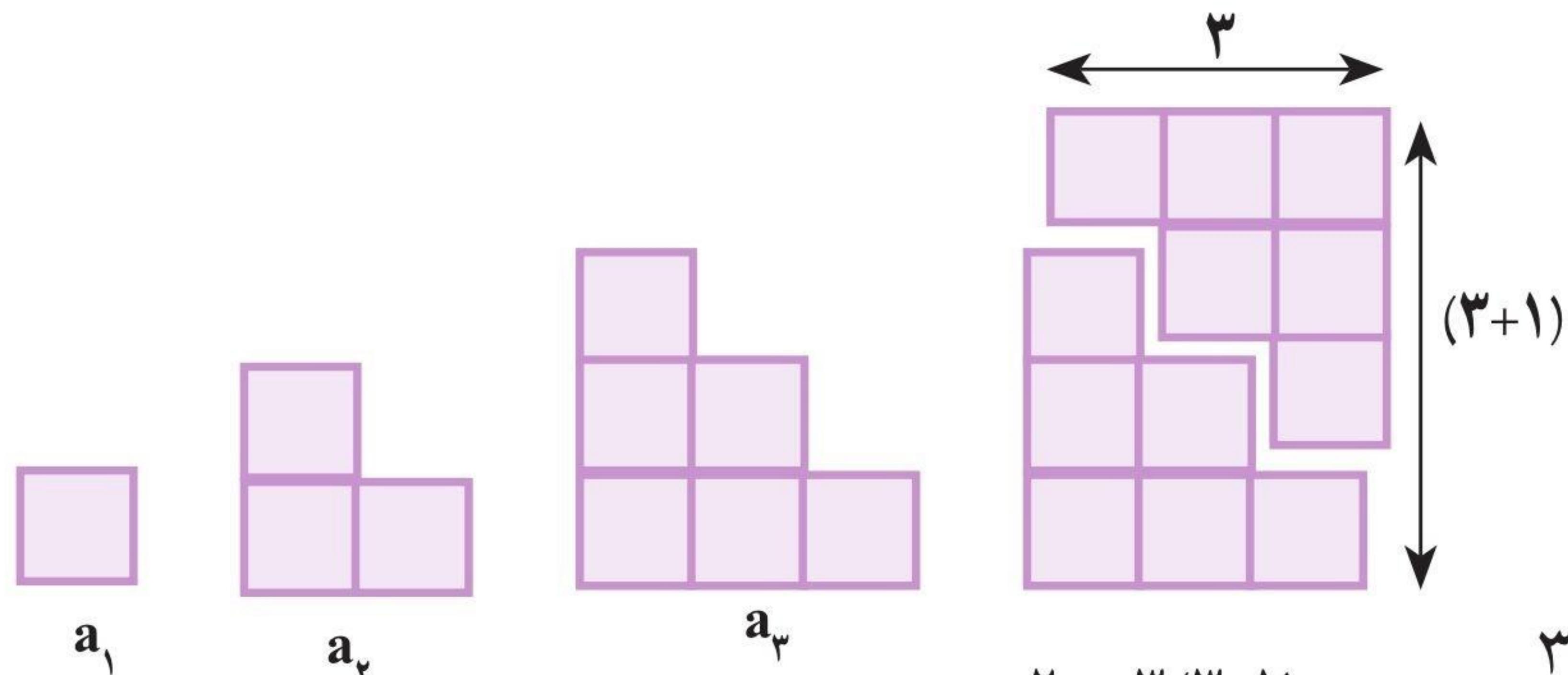


۴) الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید. ... و ۱۵۲۱ و ۱۰۶۰ و ۳۰۱ (دنباله مثلثی)

ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ خیر چرا؟

چون اختلاف هر دو جمله‌ی متولی آن، عددی ثابت نیست.



پ) شکل‌های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل می‌کنیم.
با دقت در تصویر مقابل سعی کنید حاصل a_n را بر حسب n به دست آورید.

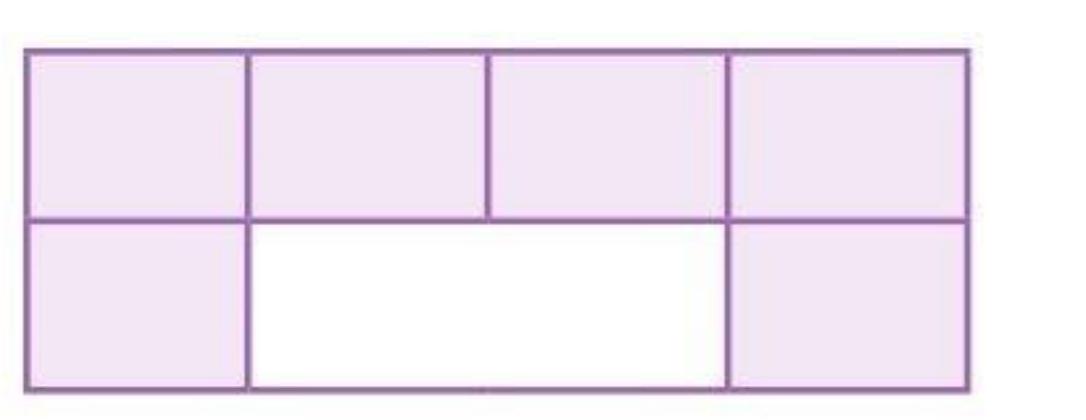
$$2a_3 = 3(3+1) \Rightarrow a_3 = \frac{3(3+1)}{2} \Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ت) به کمک مرحله قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

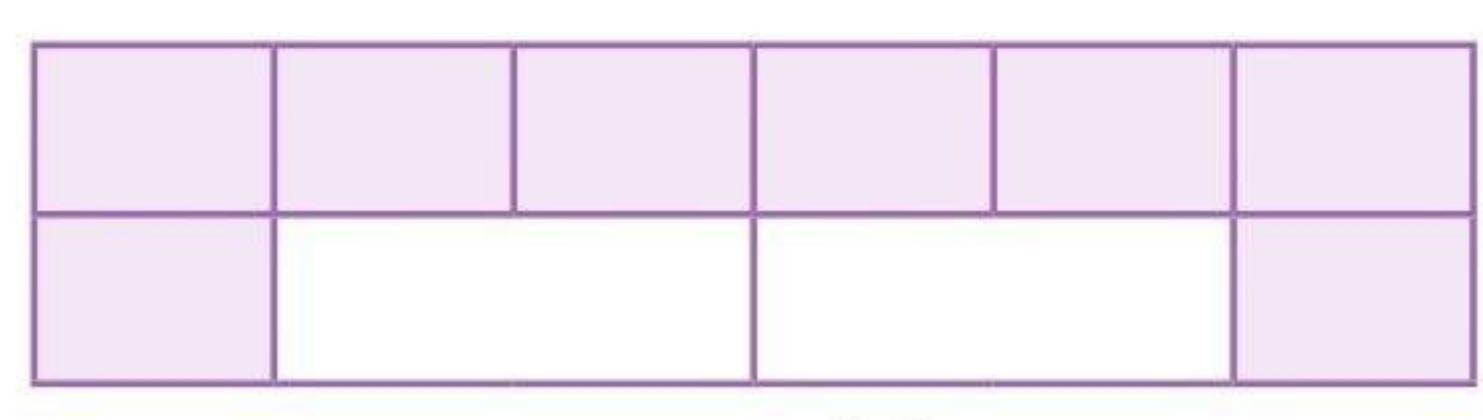
همان جمله‌ی n ام مرحله‌ی قبلی است.

تمرین

۱ به الگوی زیر توجه کنید.



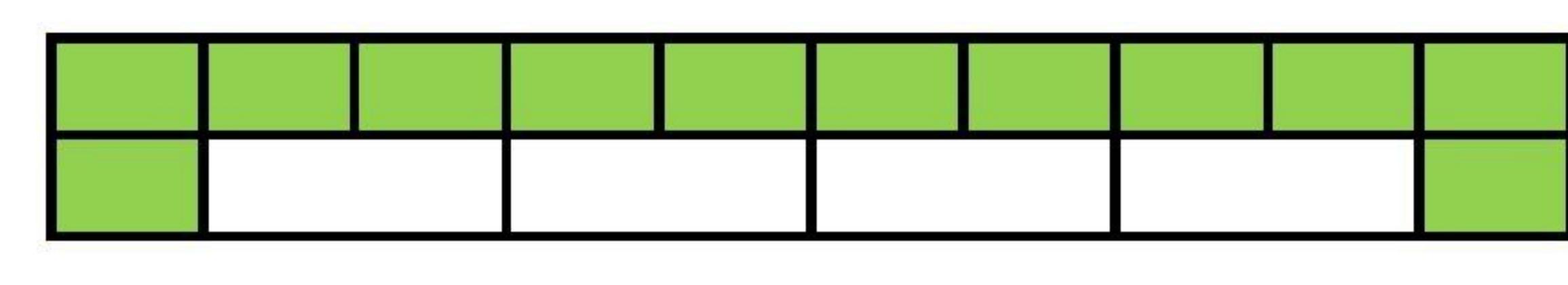
۶ کاشی تیره
۱ کاشی سفید



۸ کاشی تیره
۲ کاشی سفید



۱۰ کاشی تیره
۳ کاشی سفید



۱۲ کاشی تیره
۴ کاشی سفید

الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره‌آن را مشخص کنید.

ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله‌هفتم آن بنویسید.

پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

ت) برای 100 کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

$$t_{100} = 2 \times 100 + 4 = 204$$

ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل 50 کاشی تیره باشد؟ بله اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چندتاست؟

$$t_n = 50 \Rightarrow 2n + 4 = 50 \Rightarrow 2n = 46 \Rightarrow n = 23$$

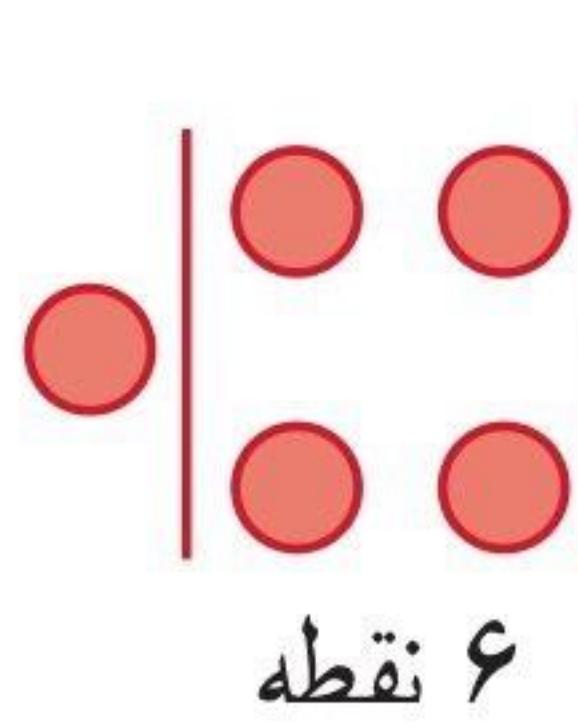
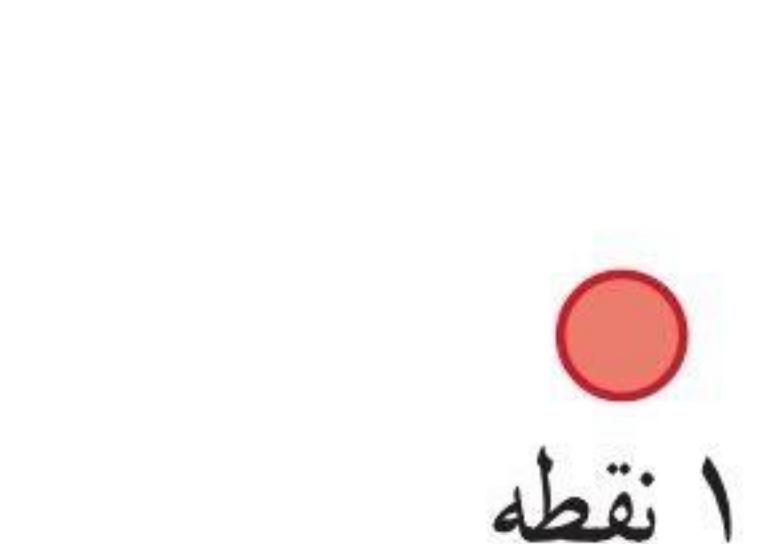
شکل (۱)

شکل (۲)

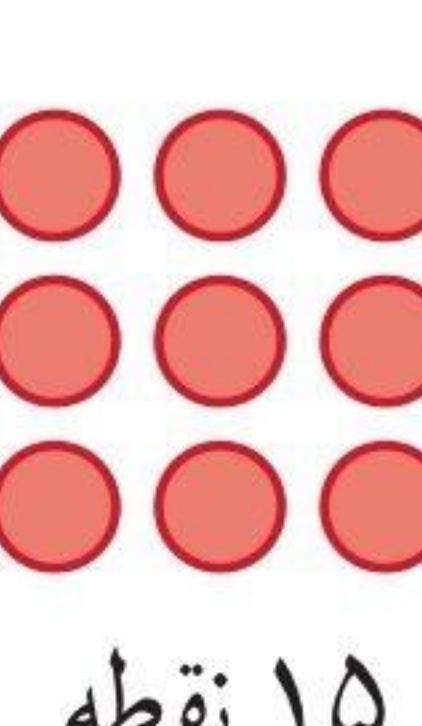
شکل (۳)

شکل (۴)

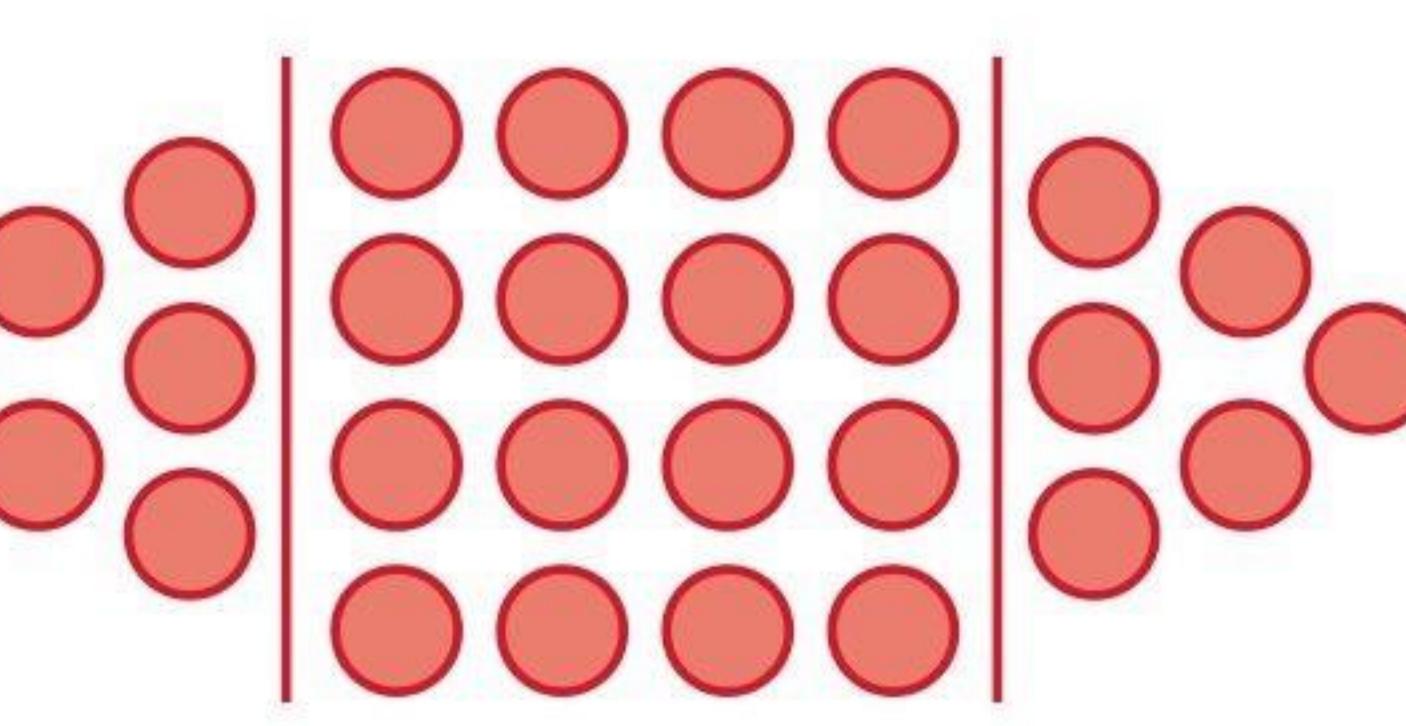
۲ الگوی زیر را در نظر بگیرید.



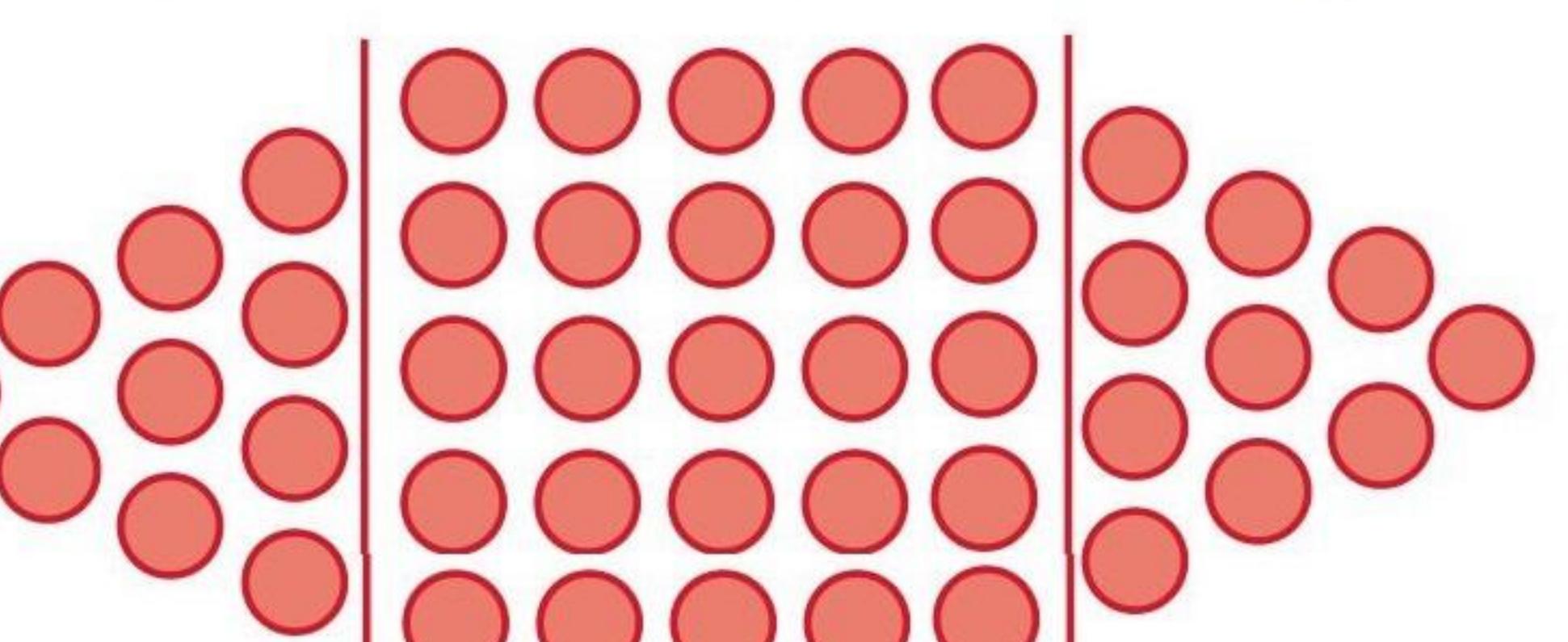
$$t_1 = 1^2 + 0 \times 1$$



$$t_2 = 2^2 + 1 \times 2$$



$$t_3 = 3^2 + 2 \times 3$$



$$t_4 = 4^2 + 3 \times 4$$

$$t_5 = 5^2 + 4 \times 5$$

الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

$$t_n = n^2 + (n-1)n \Rightarrow t_n = 2n^2 - n$$

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

$$t_{10} = 2 \times 10^2 - 10 = 190$$

۳ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی

$$a_n = 4n$$

و ... و ۱۶ و ۱۲ و ۸ و ۴

$$b_n = 3n+1$$

و ... و ۷ و ۴ و ۱ و ۰

$$c_n = n^2 + 2$$

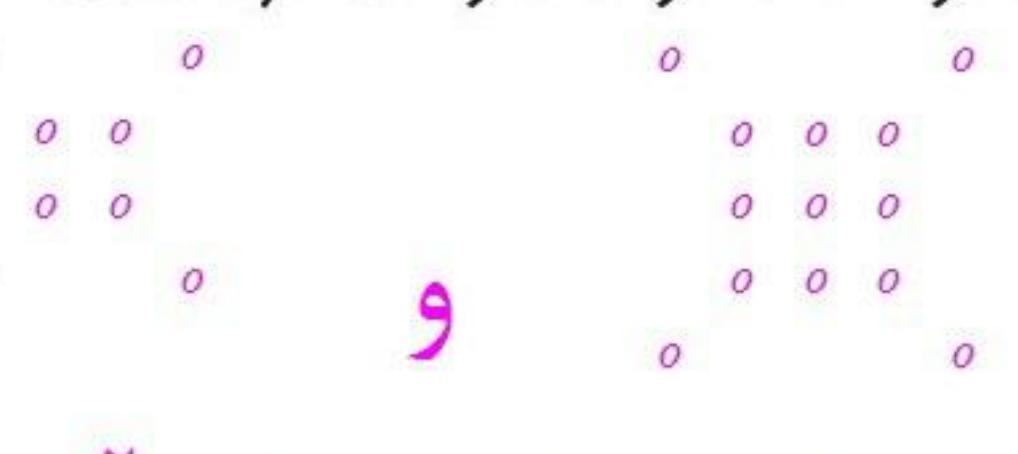
و ... و ۳ و ۱ و ۱ و ۰ و ۲

$$d_n = n^2 + n$$

و ... و ۲ و ۱ و ۰ و ۲

برای دنباله‌های درجه دو زیر، یک الگوی هندسی نظری کنید و به کمک آن جمله عمومی هر دنباله را بیابید.

الف



$$t_1 = 1^2 + 4 \\ t_2 = 2^2 + 4 \\ t_3 = 3^2 + 4 \\ \vdots \\ t_n = n^2 + 4$$

$$t_1 = 2^2 + 1 \\ t_2 = 3^2 + 3 \\ t_3 = 4^2 + 6 \\ \vdots$$

ب) $5, 12, 22, 35, 51, \dots$

یاد آوری: دنباله ... و ۳ و ۱ دنباله مثلثی

با جمله عمومی $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ است.

بنابراین $t_n = (n+1)^2 + a_n$ و در نتیجه:

$$t_n = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2}$$



درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله حسابی

در صفحات قبل، مثال‌هایی از الگوهای عددی خطی ارائه شد. نام دیگر این گونه الگوهای عددی، دنباله‌های حسابی است. به عبارت دیگر:

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک **دنباله حسابی** نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند.

فعالیت



۱ سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به بعد به صورت زیر است که جملات یک دنباله حسابی‌اند.

۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ۲۰۱۶, ۲۰۲۰,

الف) جمله اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید.

ب) نهمین دوره المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟

پ) با تکمیل جدول زیر، جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

t_1	t_2	t_3	t_4	...	t_9	...	t_n	...
۲۰۰۰	$2000 + 1(4)$	$2000 + 2(4)$	$2000 + 3(4)$...	$2000 + 8(4)$...	$2000 + (n-1)(4)$...

ت) بیست و چهارمین دوره المپیک در هزاره سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟

$$t_{24} = 2000 + (24-1)(4) = 2092$$

با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جمله عمومی یک دنباله حسابی را به دست آورید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	...	t_n	...
t_1	$t_1 + 1d$	$t_1 + 2d$	$t_1 + 3d$	$t_1 + 4d$	$t_1 + 5d$...	$t_1 + (n-1)d$...

+d +d +d

همان طور که مشاهده شد،

جمله a_n یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدر نسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

کار در کلاس

۱ در دنباله های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر کدام را به دست آورید.

$$\text{الف} \quad 5, 10, 15, 20, \boxed{25}, \boxed{30}, \boxed{35}, \dots, d=5, a_n = 5 + (n-1)5 = 5n$$

$$\text{ب} \quad 1, 3, 5, 7, \boxed{9}, \boxed{11}, \boxed{13}, \dots, d=2, b_n = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$$

$$\text{پ} \quad 5, 9, 13, 17, \boxed{21}, \boxed{25}, \boxed{29}, \dots, d=4, c_n = 5 + (n-1)4 = 4n + 1$$

$$\text{ت} \quad 13, 7, 1, -5, \boxed{-11}, \boxed{-17}, \boxed{-23}, \dots, d=-6, d_n = 13 + (n-1)(-6) = -6n + 19$$

۲ A و B دو شرکت عرضه کننده سیم کارت های تلفن همراه با شرایط زیرند.



سیم کارت های شرکت B

هزینه ثابت ماهانه : ۳۰۰۰ تومان

هزینه هر دقیقه مکالمه : ۲ تومان

سیم کارت های شرکت A

هزینه ثابت ماهانه : ۲۰۰۰ تومان

هزینه هر دقیقه مکالمه : ۳ تومان

فرض کنیم a_n نشان دهنده هزینه کل n دقیقه مکالمه ماهانه از طریق سیم کارت شرکت A و b_n هزینه مشابه برای استفاده از سیم کارت شرکت B باشد.

الف) مقدار a_n و b_n را برحسب n بنویسید.

ب) جدول زیر را کامل کنید.

n : زمان مکالمه ماهانه (دقیقه)	۰	۴۰	۸۰	۱۲۰	۱۶۰
a_n : هزینه سیم کارت A	۲۰۰۰	۳۲۰۰	۴۴۰۰	۵۶۰۰	۶۸۰۰
b_n : هزینه سیم کارت B	...	۳۸۰۰	۴۶۰۰	۵۴۰۰	۶۲۰۰

پ) آیا a_n و b_n هر کدام می توانند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشند؟ **بله** چرا؟

اگر جواب مثبت است، قدر نسبت هر یک را مشخص کنید.

زیرا جمله ای عمومی آنها به شکل یک دنباله خطی است. دلیل دیگر اینکه اختلاف هر دو جمله ای متواالی آنها مقدار ثابتی است.

$$a_n : d = 3200 - 2000 = 1200 \quad \text{و} \quad b_n : d = 3800 - 3000 = 800$$

ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵ دقیقه با تلفن همراه مکالمه

می کند. به هر یک از آنها کدام سیم کارت را پیشنهاد می کنید؟ چرا؟

$$a_{15} = 3800, \quad b_{15} = 4200 \Rightarrow \text{به سارا سیم کارت شرکت A را پیشنهاد می کنیم.}$$

$$a_{15} = 6500, \quad b_{15} = 6000 \Rightarrow \text{به فاطمه سیم کارت شرکت B را پیشنهاد می کنیم.}$$



در دنباله حسابی زیر جمله شانزدهم را به دست آورید.
حل: آرتین و آرکان این مثال را به روش‌های زیر حل کرده‌اند. شما کدام روش را می‌پسندید؟

آرتین: از جمله عمومی دنباله حسابی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} t_n &= t_1 + (n-1)d \\ t_{16} &= t_1 + 15d \\ &= 4 + (15)(7) \\ &= 109 \end{aligned}$$

آرکان: یک الگوی خطی با قدر نسبت ۷ داریم. پس

$$\begin{aligned} t_n &= 7n + b \\ t_1 &= 7(1) + b \\ 4 &= 7 + b \Rightarrow b = -3 \\ t_n &= 7n - 3 \\ t_{16} &= 7(16) - 3 \\ t_{16} &= 109 \end{aligned}$$

کار در کلاس

۱) الف) یک دنباله حسابی با قدر نسبت مثبت مثال بزنید که جمله چهارم آن 10° باشد.

ب) یک دنباله حسابی با قدر نسبت منفی مثال بزنید که جمله چهارم آن 1° باشد. ... و 10 و 15 و 20 و 25

پ) دنباله‌ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جمله مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند. ... و -3 و -10 و -15 و -20

۲) الف) بین 18 و 62 سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند. در این حالت می‌گوییم بین 18 و 62 سه **واسطه حسابی** درج کرده‌ایم.

حل: با فرض اینکه 18 جمله اول باشد، قدر نسبت را به دست آورید و جدول را کامل کنید.

$$\begin{cases} t_1 = 18 \\ t_5 = 62 \end{cases} \Rightarrow t_1 + 4d = 62 \Rightarrow d = 11$$

t_1	t_5
18	62

توضیح: برای محاسبه قدر نسبت می‌توان از رابطه $d = \frac{t_n - t_m}{n - m}$ نیز استفاده کرد.

$$d = \frac{t_5 - t_1}{5 - 1} = \frac{62 - 18}{4} = 11$$

ب) بین 2° و 8° به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطه حسابی درج کنید.

$$d = \frac{t_3 - t_1}{3 - 1} = \frac{8^\circ - 2^\circ}{2} = 3^\circ$$

2°	5°	8°
-----------	-----------	-----------

$$d = \frac{t_4 - t_1}{4 - 1} = \frac{8^\circ - 2^\circ}{3} = 2^\circ$$

$$d = \frac{t_5 - t_1}{5 - 1} = \frac{8^\circ - 2^\circ}{4} = 1.5^\circ$$

2°	3.5°	5°	6.5°	8°
-----------	-------------	-----------	-------------	-----------

$$d = \frac{t_6 - t_1}{6 - 1} = \frac{8^\circ - 2^\circ}{5} = 1.2^\circ$$

$$d = \frac{t_7 - t_1}{7 - 1} = \frac{8^\circ - 2^\circ}{6} = 1^\circ$$

2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

۱ از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جملهٔ بیست و یکم را بیابید.

$$(الف) \quad d = 7 \quad \text{و حسابی} \quad t_{21} = a + 20d = 3 + 140 = 143$$

$$(پ) \quad d = \sqrt{3} \quad \text{و حسابی} \quad t_{21} = a + 20d = \sqrt{3} + 20\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$$

$$(ث) \quad d = \frac{1}{5} \quad \text{و حسابی} \quad t_{21} = a + 20d = \frac{2}{5} + \frac{20}{5} = \frac{22}{5}$$

۲ در یک دنبالهٔ حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جملهٔ اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

$$d = \frac{t_7 - t_3}{7 - 3} = \frac{56 - 20}{4} = 9 \quad t_3 = a + 2d = 20 \rightarrow a + 18 = 20 \rightarrow a = 2 \Rightarrow \text{دنباله: } 2, 11, 20, 29, \dots$$

۳ در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع سه جملهٔ اول ۳ و مجموع سه جملهٔ بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 3 \\ t_4 + t_5 + t_6 = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + a + d + a + 2d = 3 \\ a + 3d + a + 4d + a + 5d = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 3d = 3 & \times (-) \\ 3a + 12d = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a - 3d = -3 \\ 3a + 12d = 39 \end{cases} \Rightarrow 9d = 36 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a = -3$$

-۳, ۱, ۵, ۹, ... : دنباله

۴ (الف) دو جملهٔ بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.

دنباله از نوع حسابی است: ۱, ۵, ۹, ۱۳, ...

(ب) جملهٔ عمومی آن را مشخص کنید.

$$a = 1, d = 4 \Rightarrow t_n = 1 + (n - 1) \times 4 \Rightarrow t_n = 4n - 3$$

(پ) جملهٔ چندم این دنباله ۳۹۷ است؟

$$t_n = 397 \Rightarrow 4n - 3 = 397 \Rightarrow n = 100$$

۵ (الف) واسطهٔ حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

$$d = \frac{t_3 - t_1}{3 - 1} = \frac{11 - 5}{2} = 3 \Rightarrow 20, \boxed{25}, 30$$

$$d = \frac{t_3 - t_1}{3 - 1} = \frac{11 - 5}{2} = 3 \Rightarrow 5, \boxed{8}, 11$$

(پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ واسطهٔ حسابی دو عدد، همان میانگین آنها است.

به عبارت دیگر: اگر c و a و b سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، b را واسطهٔ حسابی نامیده و داریم: $a + c = 2b$ یا $b = \frac{a+c}{2}$ مسئلهٔ زیر در پاپیروس رایندآمده است. آن را حل کنید.

۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد».

دنبالهٔ حسابی تشکیل شده را t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 در نظر می‌گیریم. طبق فرض سوال می‌توان نوشت:

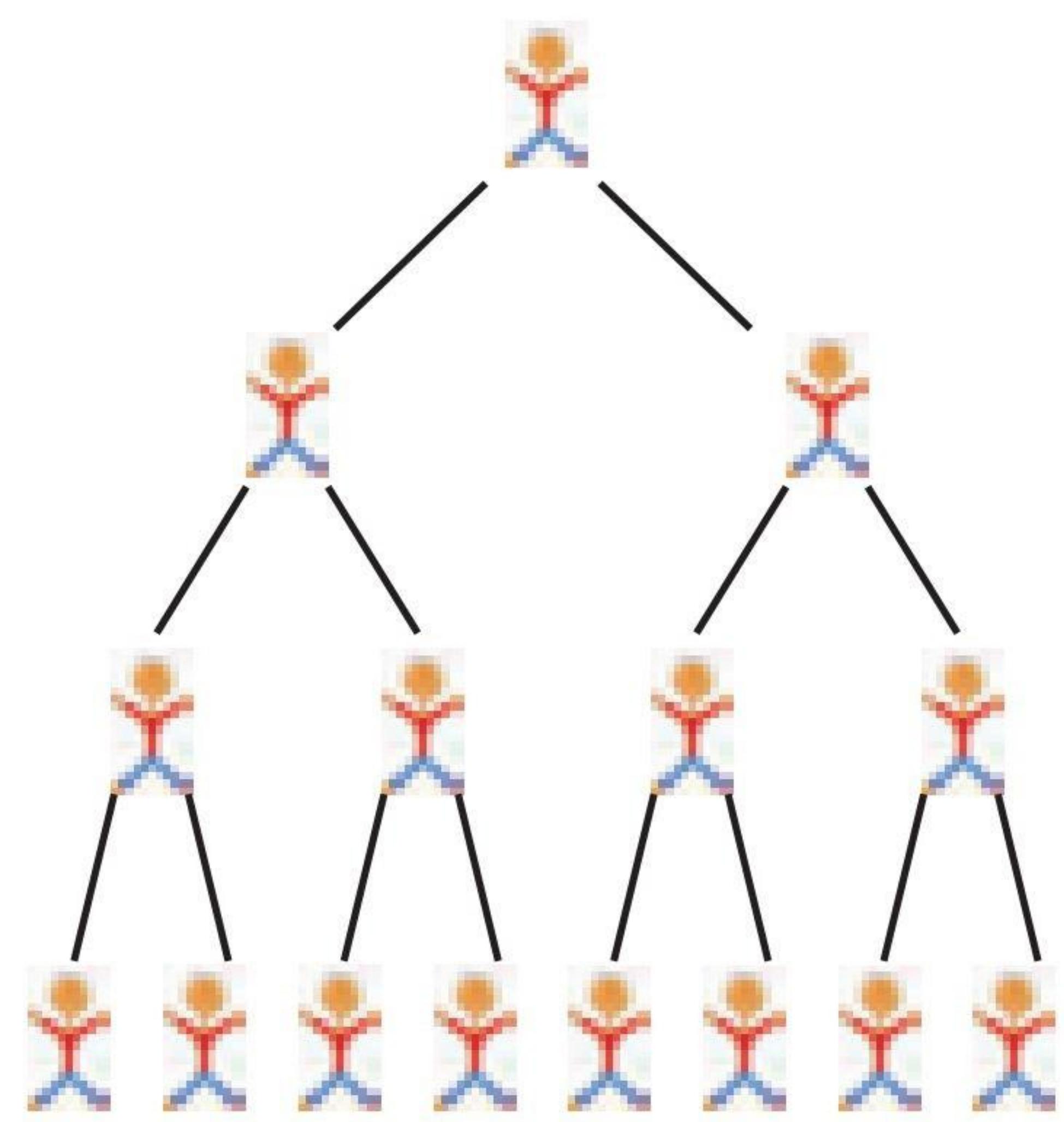
$$\left. \begin{array}{l} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 100 \Rightarrow 5a + 10d = 100 \xrightarrow{\div 5} a + 2d = 20 \\ \frac{1}{3}(t_3 + t_4 + t_5) = t_2 \xrightarrow{\times 3} 3a + 9d = 6a + 3d \Rightarrow a = 2d \end{array} \right\} \Rightarrow d = 5, a = 10$$

بنابراین دنباله به صورت ۳۰, ۲۵, ۲۰, ۱۵, ۱۰ می‌باشد.

دنباله هندسی



علی به بیماری آنفولانزا مبتلا شده است. روز شنبه چند تن از دوستانش بدون آنکه ماسک زده باشند، به عیادت او آمدند. در این زمان ویروس آنفولانزا از راه تنفس وارد بدن امید و محسن می‌شود؛ چرا که آنها روز یکشنبه مبتلا به این بیماری شدند. اگر پیشگیری انجام نشود و موارد بهداشتی مراعات نگردد، پیش‌بینی می‌شود که انتشار ویروس تا مدتی با همین الگو ادامه یابد؛ یعنی امید و محسن در روز اول بیماری خود، هر کدام ویروس را به ۲ نفر دیگر منتقل کند؛ به‌طوری که روز دوشنبه ۴ نفر جدید از طریق آنها مبتلا شوند و این روند ادامه بیدا کند.



فعالیت

روز n : t_n		تعداد افراد جدیدی که در روز n ام مبتلا می‌شوند
۱	۲	(امید و محسن)
۲	$2 \times 2 = 2^2$	
۳	$4 \times 2 = 2^3$	
۴	$8 \times 2 = 2^4$	
۵	$16 \times 2 = 2^5$	
۶	$32 \times 2 = 2^6$	
⋮	⋮	
n	$t_n = 2^n$	

۱ جدول مقابل را کامل کنید و t_n را بیابید.

۲ در روز دهم چند فرد جدید مبتلا می‌شوند؟ $t_{10} = 2^{10} = 1024$

۳ در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می‌شوند؟ $t_{11} = 2^{11} = 2048$

۴ در روز چندم تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفولانزا مبتلا می‌شوند، برابر ۱۶۳۸۴ نفر می‌شود. $t_n = 16384 \Rightarrow 2^n = 2^{14} \Rightarrow n = 14$

در مثال بالا می‌توانیم تعداد مبتلایان جدید هر روز را به صورت دنباله زیر بنویسیم: $2, 4, 8, 16, 32, \dots$

این دنباله یک دنباله حسابی نیست؛ چرا که تفاصل جملات متوالی آن ثابت نیست، بلکه نسبت تقسیم هر دو جمله متوالی آن برابر عددی ثابت است.

$$\dots = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

اینگونه دنباله‌ها را دنباله‌های هندسی می‌نامیم. یعنی:

دنباله هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم.

فعالیت

در حالت کلی در یک دنباله هندسی، اگر جمله اول t_1 و قدرنسبت r باشد، جملات آن به شکل زیر خواهد بود. جدول را تکمیل کنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	...	t_n	...
t_1	$t_1 r$	$t_1 r^2$	$t_1 r^3$	$t_1 r^4$...	$t_1 r^{n-1}$...

با دقت در الگوی به کار رفته در جملات بالا دیده می‌شود که:

جمله $t_n = t_1 r^{n-1}$ دنباله هندسی به صورت است که در آن t_1 جمله اول و r قدر نسبت می‌باشد.

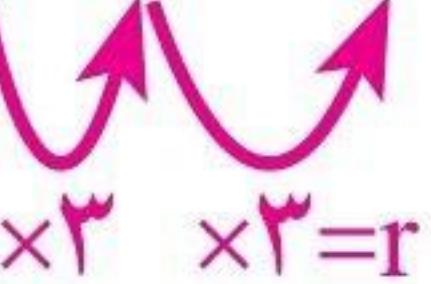
کار در کلاس

۱ نرگس و نگار برای محاسبه هفت مین جمله دنباله هندسی $\dots, 1, 3, 9, \dots$ روش‌های مقابله را به کار بردند.

کدام یک از آنها این مثال را درست حل کرده‌اند؟ **نگار** توضیح دهد.
برای محاسبه ای قدر نسبت باید هر جمله را برابر جمله‌ی قبلی آن تقسیم کرد. ولی متاسفانه نرگس جمله را برابر جمله‌ی بعدی تقسیم نموده است. که غلط است.

در دنباله‌های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید.
سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

$$\text{الف} \quad a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 18, a_4 = 54, \dots, a_n = 2 \times 3^{n-1}$$



$$\text{ب) } b_1 = 5, b_2 = 10, b_3 = 20, \dots, b_n = 5 \times 2^{n-1}$$

$$\text{پ) } c_1 = 6, c_2 = -6, c_3 = 6000, c_4 = -6000, \dots, c_n = 6 \times (-1)^{n-1}$$

$$\text{ت) } d_1 = \frac{1}{4}, d_2 = \frac{1}{8}, \dots, d_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}$$

نگار

$$r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$t_7 = 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$$

$$= \frac{1}{81}$$

نرگس

$$r = \frac{9}{3} = 3$$

$$t_7 = 9(3)^{7-1}$$

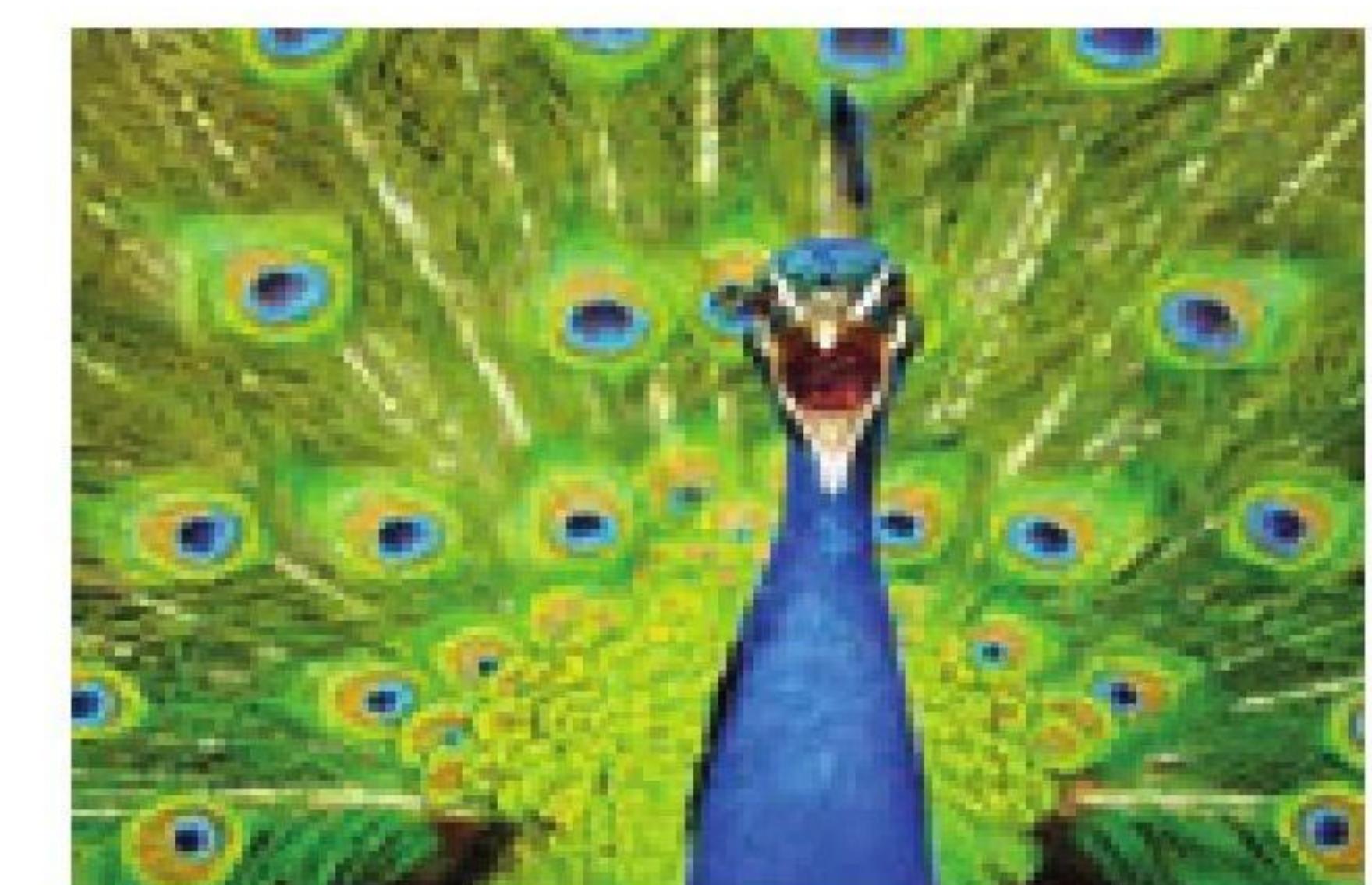
$$= 6561$$



۲ (الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. در این حالت می‌گوییم ۱۲ یک **واسطه هندسی** بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به جز ۱۲ چه عدد دیگری را می‌توان در نظر گرفت؟

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_3 = 48 \end{cases} \Rightarrow t_1 r^2 = 48 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \pm 4$$

۳ ۱۲ ۴۸ یا -۱۲ ۴۸



* اگر t_m و t_n دو جمله‌ی متمایز دنباله‌ی هندسی باشند آنگاه $\frac{t_n}{t_m} = r^{n-m}$ است.

*

اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آنگاه $b^2 = ac$ واسطه‌ی هندسی (میانگین هندسی) نامیده و خواهیم داشت: $b^2 = ac$ لوار در آنفر برابر است با مربع وسط

ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟

خیر جواب یکتا نیست. بلکه دارای دو جواب است.

$$r^5-1 = \frac{t_5}{t_1} \Rightarrow r^4 = \frac{48}{3} = 16 \Rightarrow r = \pm 2$$

۳ ۶ ۱۲ ۲۴ ۴۸ یا ۳ -۶ ۱۲ -۲۴ ۴۸

پ) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

$$10 \quad b \quad 4000 \Rightarrow b^2 = 10 \times 4000 = 40000 \Rightarrow b = \pm 20$$

$$t_1 = 1, t_4 = 8 \dots \Rightarrow r^4-1 = \frac{t_4}{t_1} \Rightarrow r^3 = 8 \dots \Rightarrow r = 20$$

$$10 \quad 200 \quad 4000 \quad 80000$$

$$t_1 = 4, t_6 = 972 \Rightarrow r^5-1 = \frac{t_6}{t_1} \Rightarrow r^4 = 243 \Rightarrow r = 3$$

$$4 \quad 12 \quad 36 \quad 108 \quad 324 \quad 972$$

۴ یک کوه یخی هزار تنی، در هر روز یک پنجم وزن خود را از دست می‌دهد.

پس از گذشت ۵ روز کدام گزینه درست است؟

الف) چیزی از آن باقی نمی‌ماند. ب) حدود $\frac{1}{3}$ آن باقی می‌ماند. ✓

پ) تقریباً نصف آن آب می‌شود. ت) حدود $\frac{2}{3}$ آن باقی می‌ماند.

تمرین

۱ از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

هندسی نیست $\dots, 2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}$ (ب)

هندسی است $1, 5, 5, 5, \dots$ $\rightarrow r = \frac{5}{5} = 1$ (ت)

هندسی است و $r = \frac{28}{7} = 4$ (الف)

هندسی است و $r = -\frac{1}{2} \div 1 = -\frac{1}{2}$ (پ)

$t_1 = 1 \Rightarrow 1, \frac{4}{5}, \frac{16}{25}, \dots$ فرض

$t_1 = -1 \Rightarrow -1, -\frac{4}{5}, -\frac{16}{25}, \dots$ فرض

چند دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{4}{5}$ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

با توجه به انتخاب جمله‌های اول دلخواه، بی شمار دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت داده شده می‌توان نوشت.

۲ درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.

الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی. درست نیست، زیرا بی شمار دنباله می‌توان نام برد که نه حسابی و نه هندسی باشند، به عنوان نمونه دنباله مثلثی، مربعی، فیبوناتچی و ... یا دنباله‌های غیر معروف مثل: $\dots, 46, 64, 26$

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

درست نیست، دنباله‌هایی با اعداد ثابت ناصرف، در نظر بگیرید این دنباله‌ها حسابی با قدر نسبت صفر و هندسی با قدر نسبت یک می‌باشند. مانند $\dots, 2, 2, 2$

۳ علی دوچرخه‌ای را به قیمت 50 هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم، در هر سال 20 درصد نسبت به سال

قبل از خودش کاهش یابد. الف) اگر او بعد از 3 سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \text{کاهش } 20 \text{ درصدی قیمت به معنی آن است} \\ & & & & & & \text{که قیمت هر سال } 80 \text{ درصد سال قبل است. بنابراین:} \\ \text{بعد از یک سال} & & \text{بعد از دو سال} & & \text{بعد از سه سال} & & \\ 500000 \times \frac{80}{100} & = 500000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^2 & & 500000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^3 & = 256000 & & \end{array}$$

$$t_n = 500000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^n \quad \text{ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت } n \text{ سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟}$$

۴ حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید. $\dots, 2, 4, 8, 16$

$$2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{20} = 2^{(1+2+3+\dots+20)} = 2^{\frac{20 \times 21}{2}} = 2^{210}$$

$$\text{توجه: حاصل ضرب } n \text{ جمله نخست دنباله هندسی برابر است با: } P_n = a^n \times r^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

۵ جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب 12 و 96 می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{array}{l} t_3 = 12, t_6 = 96 \Rightarrow r^{6-3} = \frac{t_6}{t_3} = \frac{96}{12} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2 \\ \boxed{r=2} \quad a \times 2^3 = 12 \Rightarrow a = 3 \end{array} \quad \text{→ دنباله } 3, 6, 12, \dots$$

۶ بنا بر آمار منتشر شده از جانب پژوهشگاه آمار تلفات جاده‌ای از عدد 27759 نفر در سال 1384 به عدد 16584 نفر در سال 1394 کاهش یافته است که نشان‌دهنده حدود 5 درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد،

الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال 1400 چند نفر از هموطن‌های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدنه‌ند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۶۵۸۴	۱۵۷۵۴/۸	۱۴۹۶۷/۰۶	۱۴۲۱۸/۷۰۷	۱۳۵۰۷/۷۷۱	۱۲۸۳۲/۳۸۲	۱۲۱۹۰/۷۶۲

۷ ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟ دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت 0.95

توجه داشته باشید که اگر هر سال 5% کاهش یابد به این معنی است که هر سال برابر است با 95% سال قبل، پس باید هر سال را در $95/100$ ضرب کرد تا سال آینده‌ی آن بدست آید.