

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: تابع نهایی دوازدهم و تمرین کتاب

شاکریان: ۰۹۰۱۴۲۵۳۰۵۰



سبقت (۳۸۱۱۷-۰۵۱)

۱) الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان، کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام یک از حالت‌های الف و ب به نفع الناز است؟

تمرین های کتاب - ۲۲

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.
ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

۲) درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

الف) دامنه تابع $y = \tan x$ برابر $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ، $x \in \mathbb{R}$ ، $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ است. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

۳) نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.
تمرین های کتاب - ۹

الف)

$$f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad D_f = [0, 2\pi]$$

تمرین های کتاب - ۹

ب

$$g(x) = x + |x|$$

تمرین های کتاب - ۹

پ

$$t(x) = -x^3 - 1$$

تمرین های کتاب - ۹

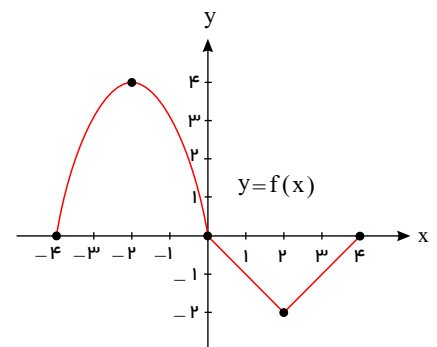
۴) تابع نمایی $y = 2^x - 2$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_2 x + 2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

تمرین های کتاب - ۱۰

۵) نمودار تابع f با دامنه $[-4, 4]$ به صورت زیر داده شده است، می خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y = f(2x)$ و $y = f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنیم.

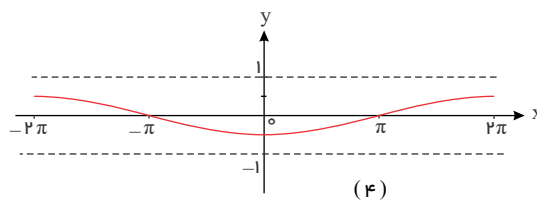
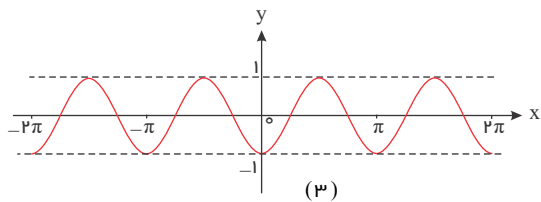
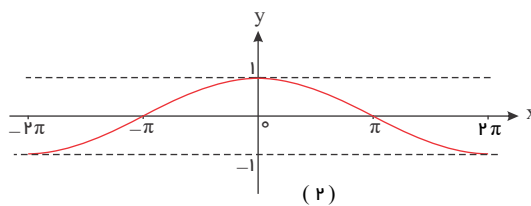
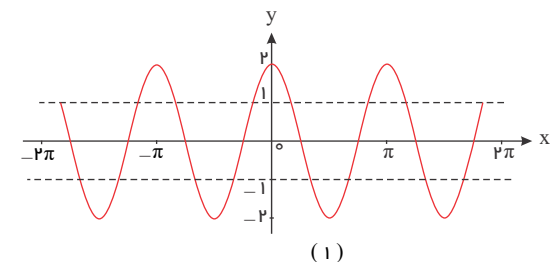
تمرین های کتاب - ۲۰

x	$f(x)$
-۴	۰
-۲	۴
۰	۰
۲	-۲
۴	۰



۶ با استفاده از نمودار $y = \cos x$ ، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

تمرین های کتاب- ۲۳



الف) $y = -\frac{1}{2} \cos(-\frac{1}{2}x)$ ب) $y = 2 \cos 2x$ پ) $y = \cos(\frac{1}{2}x)$ ت) $y = -\cos 2x$

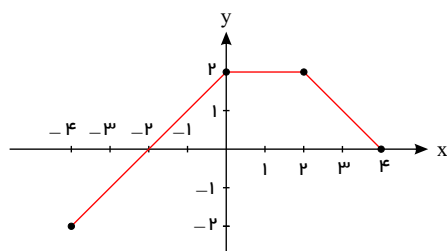
۷ نمودار توابع $y = -\sin 2x - 1$ و $y = 2 \sin(\frac{-1}{3}x)$ را به کمک نمودار $y = \sin x$ در بازه

تمرین های کتاب- ۲۳

$[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

تمرین های کتاب- ۲۳

۸ با استفاده از نمودار تابع f ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



الف

$$y = \frac{1}{2}f(2x) - 1$$

تمرین های کتاب - ۲۳

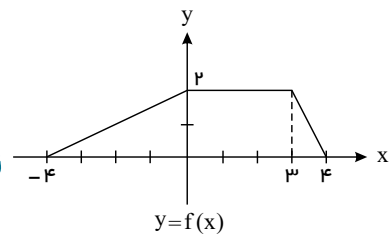
ب

$$y = 2f(x - 1) - 3$$

تمرین های کتاب - ۲۳

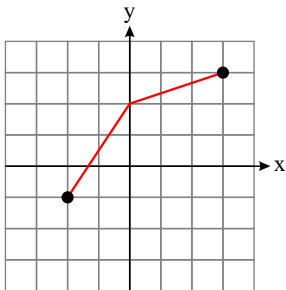
۹ با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار $y = \frac{1}{2}f(4x)$ را رسم کنید.

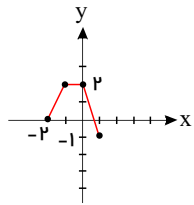
سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸



۱۰ با استفاده از نمودار تابع f نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right) - 2$ را رسم کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸





۱۱) نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

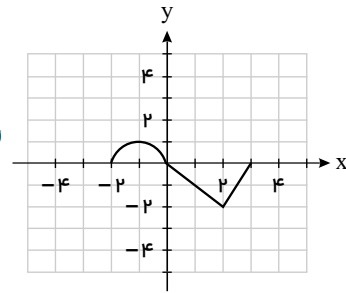
۱۲) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

الف) برد تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان برد تابع $y = f(x)$ است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

۱۳) نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است.

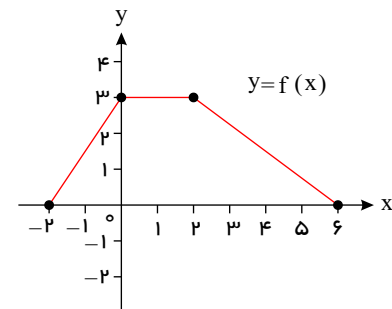


الف) نمودار تابع $y = 3f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنید.

ب) دامنه تابع $y = 3f(\frac{1}{2}x)$ را تعیین کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

۱۴) نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است.



نمودار تابع $y = \frac{1}{3}f(2x)$ را رسم کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

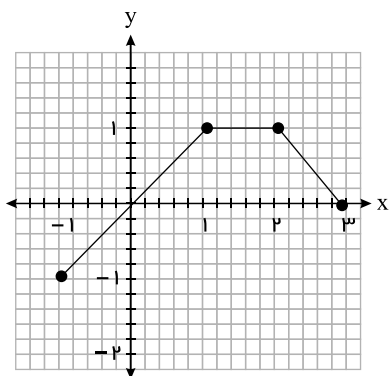
۱۵) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف دامنه تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

۱۶ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

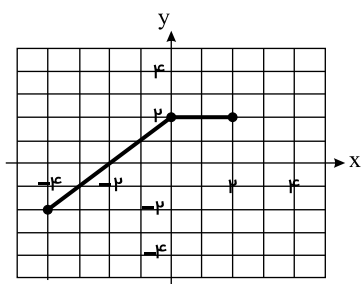
الف دامنه تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

۱۷ نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(2x - 1)$ را رسم، دامنه و برد آن را تعیین کنید. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰



۱۸ با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $y = f(-x) + 2$ را رسم کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰





۱۹) نمودار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ را به کمک نمودار $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

۲۰) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x + 1$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین، سپس یک واحد

به سمت چپ و در مرحله آخر نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. ضابطه نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید.

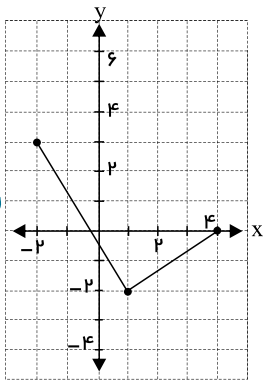
سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

۲۱) نمودار تابع f به صورت روبه‌رو است:

الف) نمودار تابع $g(x) = 2f(x - 1)$ را رسم کنید.

ب) دامنه تابع g را به دست آورید.



سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

۲۲) نمودار تابع $3 - f(x - 2)$ را رسم کنید.

۲۳) اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $[-1, 3]$ و برد آن $[0, 2]$ باشد، دامنه و برد تابع $y = f(\frac{x}{2})$ را

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۲

بیابید.

۲۴) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را ابتدا سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس عرض نقاط را دو

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۲

برابر می‌کنیم، ضابطه تابع جدید را بنویسید.



- گ) برد تابع f بازه $[-۳, ۱]$ است. برد تابع $y = -۲f(۳x - ۱) + ۳$ کدام یک از موارد زیر است؟
 الف) $[-۸, ۰]$ ب) $[-۱۲, ۰]$ پ) $[۱, ۹]$ سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱
 ت) $[-۱۰, ۲]$

۲۶) اگر $f(x) = \frac{۲}{x-۱}$ و $g(x) = \frac{۳}{x}$ ، دامنه و ضابطه توابع fog و fof را به دست آورید.

تمرین های کتاب - ۱۴

۲۷) اگر $f = \{(۷, ۸), (۵, ۳), (۹, ۸), (۱۱, ۴)\}$ و $g = \{(۵, ۷), (۳, ۵), (۷, ۹), (۹, ۱۱)\}$ توابع fog و gof را به دست آورید.
 تمرین های کتاب - ۲۲

۲۸) اگر $f(g(x)) = ۳x^۲ - ۶x + ۱۴$ و $f(x) = ۳x - ۴$ ، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

تمرین های کتاب - ۲۲

۲۹) موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.
 تمرین های کتاب - ۲۲

الف)

$$f(x) = \sqrt{۲x - ۳} \quad ; \quad g(x) = \frac{۶}{۳x - ۵} \quad : D_{fog}, (fog)(x)$$

تمرین های کتاب - ۲۲

ب)

$$f(x) = \sqrt{x + ۲} \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x^۲ - ۱۶} \quad : D_{gof}, (gof)(x)$$

تمرین های کتاب - ۲۲



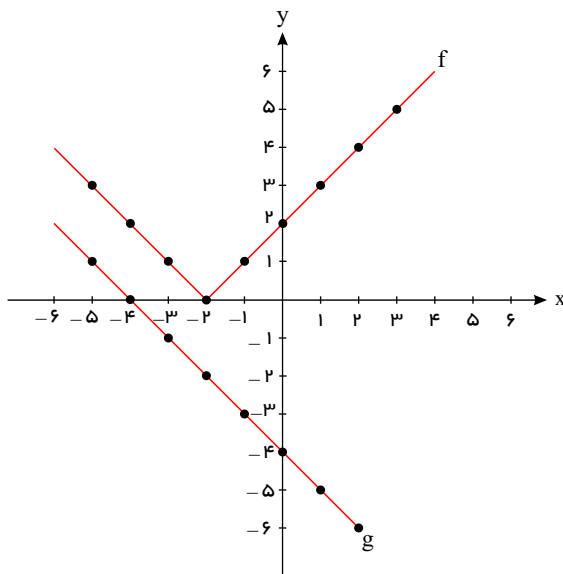
پ

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x} \quad : \quad D_{gof}, (gof)(x)$$

تمرین های کتاب - ۲۲

تمرین های کتاب - ۲۳

۳۰ با توجه به نمودارهای توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $(fog)(-1)$ ب) $(gof)(0)$ پ) $(fog)(1)$ ت) $(gof)(-1)$

۳۱ اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد، دامنه تابع $fog(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

۳۲ دو تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

۳۳ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸



الف تابع $h(x) = (2x^2 - 5x + 1)^3$ به صورت ترکیب دو تابع $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ و $g(x) = \dots\dots\dots$ است. **سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸**

۳۴ اگر $f(x) = x^2 - 5$ و $g(x) = \sqrt{x+6}$ باشد. **سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹**

الف دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. **سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹**

۳۵ اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد، **سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹**

الف دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. **سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹**

ب ضابطه تابع، $f \circ g$ را بنویسید. **سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹**

۳۶ اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید. **سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹**

۳۷ اگر $f(x) = \sqrt{4-2x}$ و $g(x) = x^2 + 2x - 1$ باشد، **سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹**

الف دامنه تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. **سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹**

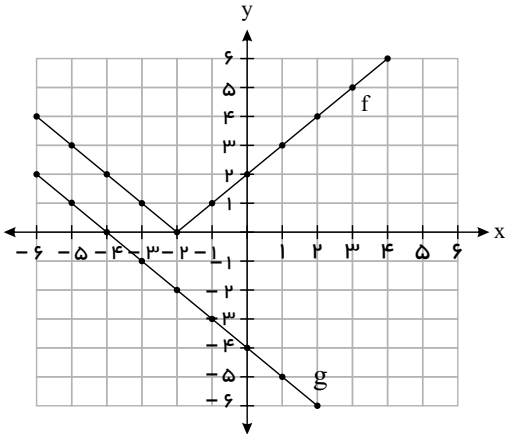


سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

ب) مقدار $\frac{f}{g}(0) - gof(2)$ را تعیین کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

۳۸) با توجه به نمودارهای تابع f و g به سوالات زیر پاسخ دهید:



سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

الف) مقدار $fog(-1)$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

ب) اگر $g(3t - 1) = 0$ آنگاه مقدار t را به دست آورید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

۳۹) اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد،

الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) مقدار $(gof)(2)$ را تعیین کنید.



۴۰ با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

الف) $(gof)(۱)$ سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

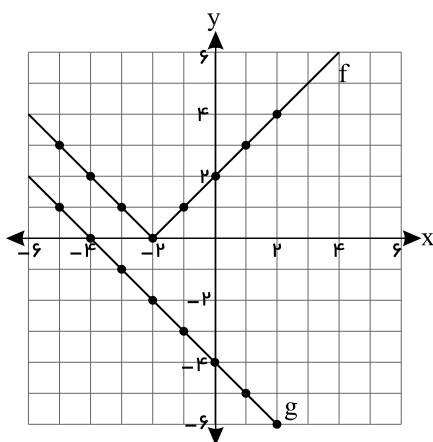
ب) $(fo(f+g))(۰)$

x	-۱	۰	۱	۲
$f(x)$	۰	-۱	۲	-۵
$g(x)$	۲	۳	۴	-۲

۴۱ اگر $f = \{(۰, -۱), (۵, ۹), (۳, ۷), (-۲, ۴)\}$ و

$g = \{(۱, ۲), (۳, -۱), (۹, ۰), (-۱, ۴), (۷, ۷)\}$ تابع gof را در صورت وجود بنویسید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱



۴۲ با توجه به نمودار توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود به

دست آورید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

الف

$(gof)(-۱)$

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

۴۳ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

 الف اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $(fog)(4) = 5$.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۲

 ۴۴ اگر $f(x) = 7 - 4x^2$ و $g(x) = \sqrt{x+3}$ باشد:

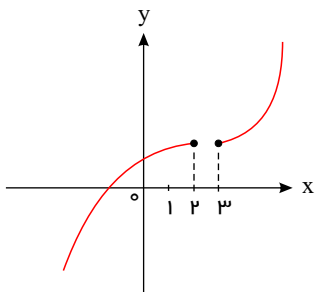
 الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

 ب) مقدار $(go f)(1)$ را محاسبه کنید.

۴۵ هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

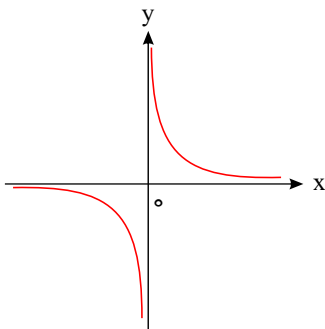
تمرین های کتاب - ۸

تمرین های کتاب - ۸



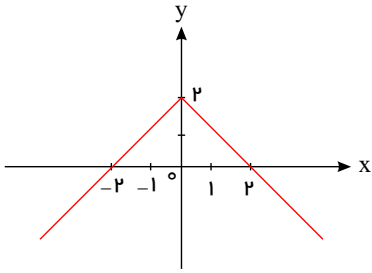
الف

تمرین های کتاب - ۸



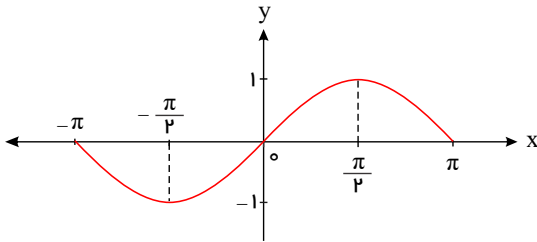
ب

تمرین های کتاب - ۸



پ

تمرین های کتاب - ۸



ت

۴۶) تابع $y = x^2|x|$ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟ تمرین های کتاب - ۱۰

۴۷) نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع، صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

تمرین های کتاب - ۱۰

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

۴۸) تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً نزولی باشد. تمرین های کتاب - ۱۰

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

تابع $y = -x^3 + 2$ در دامنه تعریفش صعودی است.



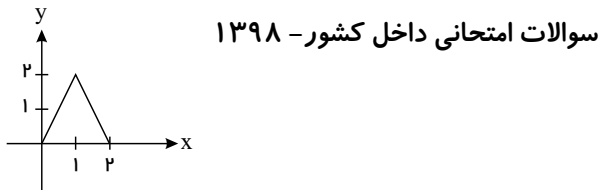
تابع $y = (x + 1)^3$ در دامنه تعریف خود (صعودی، نزولی) است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

۵۱) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می شود. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

۵۲) نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. با استفاده از آن نمودار $y = -2f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید.



۵۳) در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

الف) تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می شود، تابع نامیده می شود.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

۵۴) درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

۵۵) در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹



الف) توابع اکیداً یکنوا، همواره هستند. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

۵۶) در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

الف) در بازه $(0, 1)$ ، نمودار تابع $y = x^3$ ، نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

تابع $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ یک تابع درجه دوم است. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

۵۸) در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

الف) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در آن اکیداً نزولی است، برابر است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

با محدود کردن دامنه f ، بازه‌ای را مشخص کنید که تابع f یک به یک شود.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

۶۰) با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -3x & -1 < x < 0 \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای اکیداً

صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟ سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰



۶۱) با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه

بازه‌ای نزولی است. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

الف) تابع $y = 2x(1 - 3x^2) + 1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه سوم است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۲

تابع $f(x) = x^3$ ، تابعی اکیداً صعودی است. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(0, 1)$ پایین‌تر از، نمودار تابع $y = x^3$ است. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۲

هر تابع یکنوا، یک به یک است. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۲

اگر $f(x) = 2x^3 - 1$ باشد، حاصل $f^{-1}(15)$ برابر است. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۲

۶۷) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

الف) تابع $f(x)$ در بازه شامل a, b صعودی است. اگر $f(a) \geq f(b)$ آنگاه $a \geq b$.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

تابع $y = \sqrt{2x^3} - \frac{3}{4}x$ یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱



نمودار تابع $f(x) = x^3$ در بازه $(0, 1)$ از نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار دارد. (بالا تر - پایین تر)

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

۷۰ ضابطه تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

تمرین های کتاب - ۲۷

الف

$$g(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$$

تمرین های کتاب - ۲۷

ب

$$h(x) = x^2 + 1$$

تمرین های کتاب - ۲۷

۷۱ ضابطه تابع وارون توابع یک به یک زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{-8x + 3}{2}$ تمرین های کتاب - ۲۹

ب) $g(x) = -5 - \sqrt{3x + 1}$

۷۲ در مورد هریک از قسمت های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند. تمرین های کتاب - ۲۹

الف) $f(x) = \frac{-7}{2}x - 3$, $g(x) = -\frac{2x + 6}{7}$

ب) $f(x) = -\sqrt{x - 8}$, $g(x) = 8 + x^2$; $x \leq 0$



۷۳ رابطه بین درجه سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به صورت $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ است که در آن x میزان درجه سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجه فارنهایت است. $f^{-1}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهد چه چیزی را نشان می‌دهد. تمرین های کتاب - ۲۹

۷۴ اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ ، مقادیر زیر را به دست آورید. تمرین های کتاب - ۲۹

الف) $(f \circ g)^{-1}(5)$ ب) $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$ پ) $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$

۷۵ توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. با محدود کردن دامنه آن‌ها به دو روش متفاوت توابعی یک‌به‌یک بسازید. تمرین های کتاب - ۲۹

الف

$$f(x) = |x|$$

تمرین های کتاب - ۲۹

ب

$$g(x) = -x^2$$

تمرین های کتاب - ۲۹

پ

$$h(x) = x^2 + 4x + 3$$

تمرین های کتاب - ۲۹



(۷۶) الف) توابع $f(x) = \frac{x+3}{2x}$ و $g(x) = 3x - 1$ را در نظر بگیرید. دامنه $f \circ g$ را با استفاده از

تعریف به دست آورید. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

ب) اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ باشد. مقدار $(5) f^{-1} \circ g^{-1}$ را به دست آورید.

(۷۷) اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ باشد، مقدار $(5) f^{-1} \circ g^{-1}$ را به دست آورید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

دو تابع $f(x) = -\frac{2x+6}{7}$ و $g(x) = \frac{-7}{2}x - 3$ وارون یکدیگرند. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

(۷۹) نشان دهید توابع $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

با محدود کردن دامنه تابع f تابعی وارون پذیر بسازید. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

(۸۱) ضابطه وارون تابع $f(x) = -\frac{7}{2}x - 3$ را به دست آورید. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

(۸۲) ضابطه وارون تابع $g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$ را به دست آورید. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰



اگر $f = \{(2, 3), (3, 5)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}(3)$ برابر است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

دو تابع $f(x) = -\frac{7}{2}x - 3$ و $g(x) = -\frac{2x+7}{6}$ وارون یکدیگرند. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

ضابطه تابع وارون $y = x^3$ برابر است. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

۸۶ با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ، یک تابع یک‌به‌یک به‌دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید. تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$$

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

چند جمله‌ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 1$ بر دو جمله‌ای $x + 2$ بخش‌پذیر است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

در تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - a$ ، باقیمانده برابر $p(a)$ است. سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰



حد تابع $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{5x^2 - 3x}{-x^2 + 1} & x \leq 0 \end{cases}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

اگر $f'(2) = 3$ و $g'(2) = 5$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $(2g - f)'(2)$ برابر است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، آنگاه f در a مشتق پذیر است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در بازه $(-1, 1)$ اکیداً صعودی است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در a است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

اگر $h(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$ باشد، آنگاه $h''(1)$ برابر است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

پاسخ نامه تشریحی

۱) بیاید در هر حالت حساب کنیم و ببایم که الناز چقدر می تواند تخفیف بگیرد:

$$\text{انتخاب اول:} \xrightarrow{\substack{\text{ابتدا تخفیف ۲۰ درصدی} \\ \text{برای ۲ میلیون تومان}}} \text{مقدار تخفیف} = \frac{20}{100} \times 2,000,000 = 400,000$$

باقی مانده: ۱,۶۰۰,۰۰۰ تومان

سپس تخفیف ۲۰۰ هزار تومانی

$$\rightarrow 1,600,000 - 200,000 = 1,400,000 \text{ تومان}$$

برای باقی مانده ۲ میلیون تومان

پس در انتخاب اول، الناز باید یک میلیون و چهارصد هزار تومان پرداخت کند.

ابتدا تخفیف ۲۰۰ هزار تو

$$\rightarrow 2,000,000 - 200,000 = 1,800,000$$

برای ۲ میلیون تومان

$$\frac{20}{100} \times 1,800,000 = 360,000 \rightarrow \text{مقدار پرداختی} = 1,800,000 - 360,000 = 1,440,000$$

مقدار تخفیف

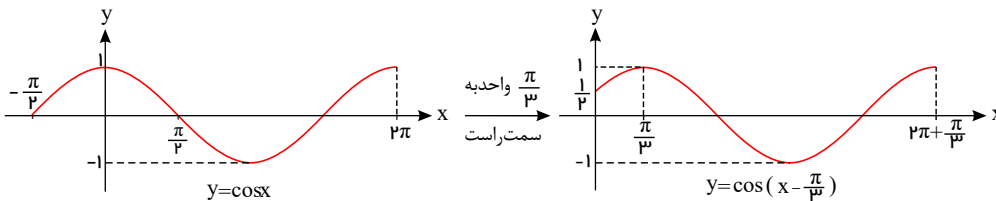
یعنی در انتخاب دوم، الناز باید یک میلیون و چهارصد و چهل هزار تومان پرداخت کند. پس معلوم شد که انتخاب اول معقول تر است.

۲

الف درست

۳

الف) برای رسم نمودار $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ در فاصله $D_f = [0, 2\pi]$ کافی است نمودار $y = \cos x$ را در راستای محور طول ها به اندازه $\frac{\pi}{3}$ به سمت راست انتقال دهیم:



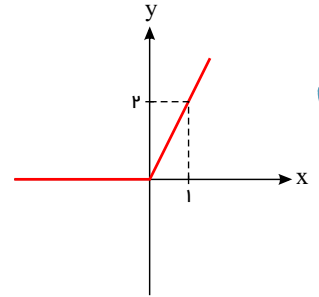
به جای اینکه نمودار را $\frac{\pi}{3}$ واحد به راست ببرید می توان محور y را همین اندازه به سمت چپ کشید!

ب

برای رسم تابع

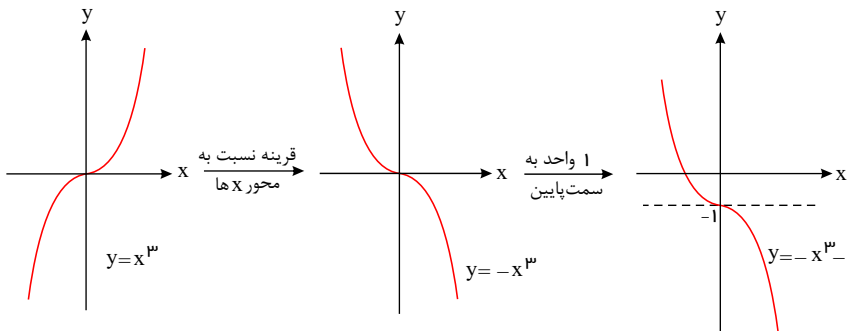
g ابتدا با توجه به مفهوم قدر مطلق، تابع را به صورت دو ضابطه‌ای تبدیل کرده و رسم می‌کنیم:

$$g(x) = x + |x| = \begin{cases} x + x = 2x & ; x \geq 0 \\ x - x = 0 & ; x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حالا رسم کن}}$$

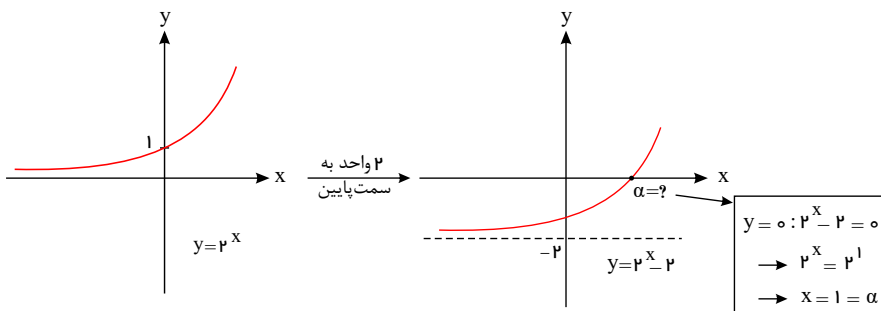


از این نمودار پیداست که تابع g برای $x \leq 0$ ثابت و برای $x \geq 0$ صعودی اکید و در کل صعودی است.

نمودار تابع $t(x) = -x^3 - 1$ را به کمک انتقال نمودار پایه $y = x^3$ مطابق مکانیسم زیر رسم کرده و از آن نتیجه می‌گیریم که تابع روی $D_t = \mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.

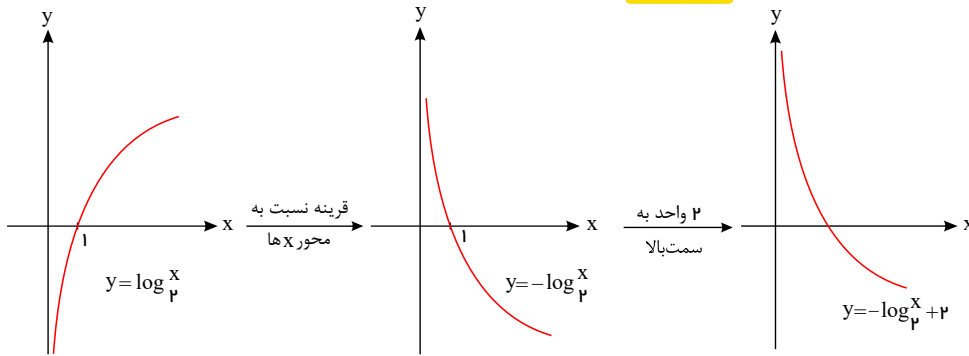


۴ برای رسم تابع نمایی $y = 2^x - 2$ ، با توجه به نمودار پایه $y = 2^x$ (که حالت کلی آن $y = a^x$ برای $a > 1$ می‌باشد) داریم:



می‌بینیم که تابع $y = 2^x - 2$ در دامنه خود ($D = \mathbb{R}$) همواره صعودی (اکیداً صعودی) است.

و اما برای رسم تابع لگاریتمی $y = -\log_2 x + 2$ ، داریم:



برای یافتن α معادله $y = 0$ را حل می‌کنیم:

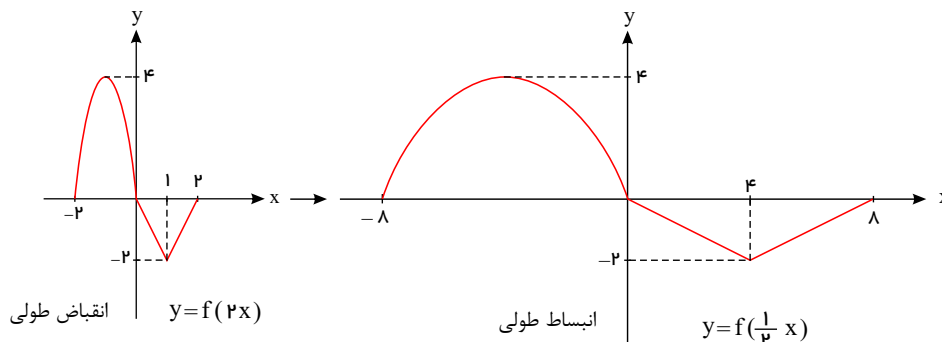
$$-\log_p x + 2 = 0 \rightarrow \log_p x = 2 \rightarrow x = p^2 = 4$$

۵) باید بدانیم که برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ از روی نمودار $y = f(x)$ کافی است طول هر

نقطه از $f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر کرده و عرض آن‌ها را ثابت نگه داریم. به همین مناسبت می‌توانیم بگوییم که

نمودار تابع $y = f(x)$ برای k ‌های بزرگتر از یک ($k > 1$) با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (بسته‌تر) و برای k ‌های

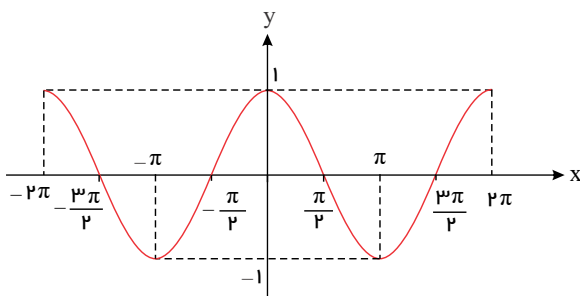
بین ۰ و ۱ ($0 < k < 1$) با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (یا بازتر) می‌شود.



$$D = [-2, 2], R = [-2, 4]$$

$$D = [-8, 8], R = [-2, 4]$$

۶) ابتدا به نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ توجه کنید:



با توجه به این نمودار و دوره تناوب هر تابع و نیز برد آن‌ها به راحتی می‌توانیم تشخیص دهیم که نمودار (

۴) مربوط به تابع (الف)، نمودار (۱) مربوط به تابع (ب)، نمودار (۲) متعلق به تابع (پ) و بالاخره نمودار (۳)

متعلق به تابع (ت) می باشد.

طول هر نقطه از نمودار $y = \cos x$ را ۲ برابر و عرض آن ها را $\frac{-1}{2}$ برابر می کنیم.

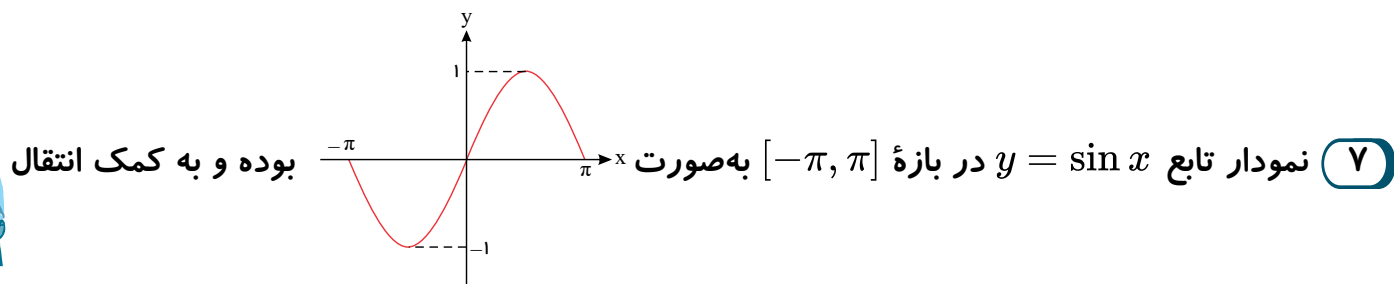
الف) $y = -\frac{1}{2} \cos\left(-\frac{1}{2}x\right) \rightarrow$

طول هر نقطه از نمودار $y = \cos x$ را $\frac{1}{2}$ برابر و عرض آن ها را ۲ برابر می کنیم. $y = 2 \cos 2x \rightarrow$ ب)

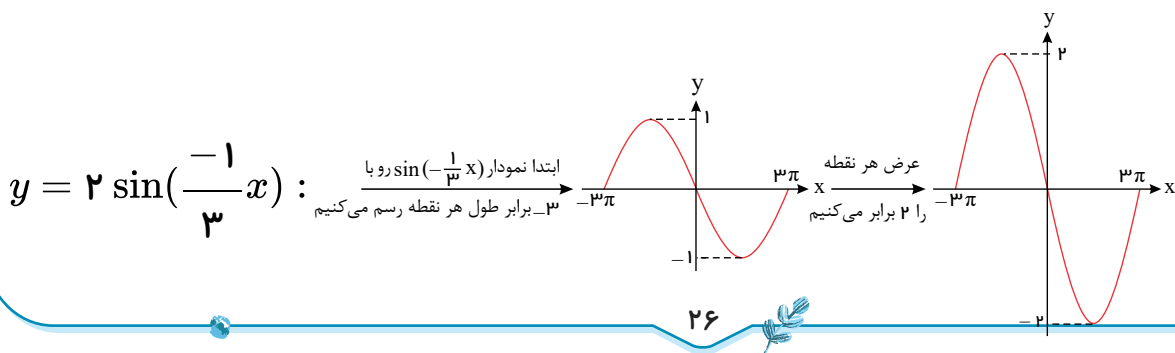
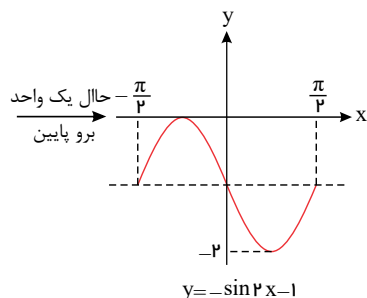
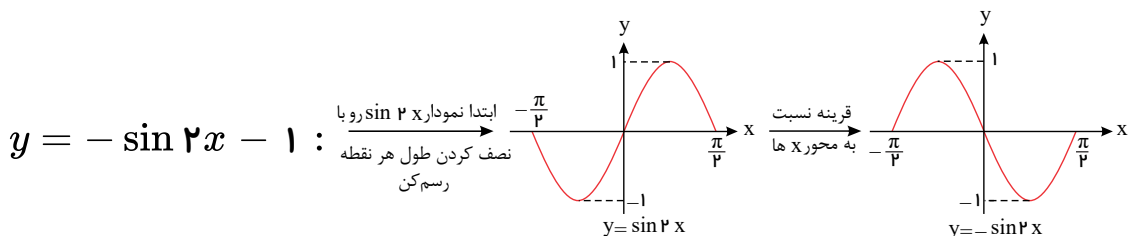
با ثابت ماندن عرض هر نقطه از نمودار $y = \cos x$ باید طول هریک را ۲ برابر کرد.

پ) $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \rightarrow$

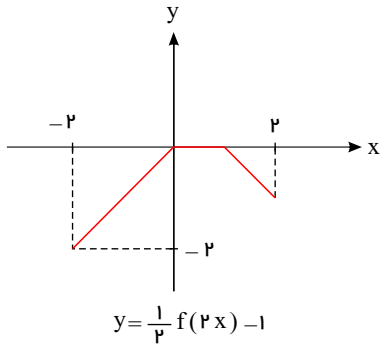
طول هر نقطه را نصف و عرض را قرینه می کنیم. $y = -\cos 2x \rightarrow$ ت)



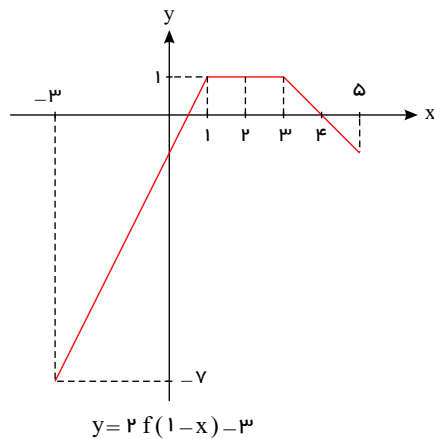
نمودارها داریم:



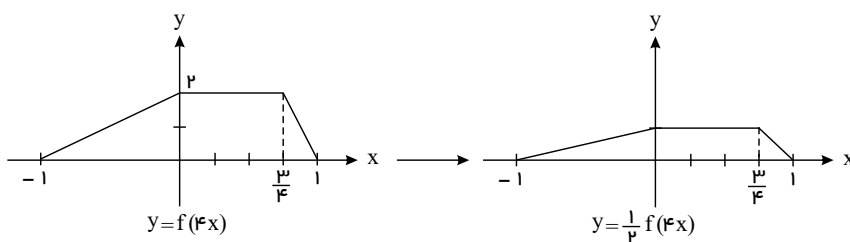
طول آن‌ها را نصف کنیم و سپس در نمودار حاصل، با ثابت ماندن طول هر نقطه، عرض آن‌ها را نصف کنیم تا نمودار $\frac{1}{2}f(2x)$ به دست آید. حال اگر این نمودار را یک واحد به پایین ببریم (انگار که محور x ها را یک واحد به بالا کشیده باشیم!) به نمودار مطلوب می‌رسیم. اگر این روند را به درستی انجام دهیم به این نمودار خواهیم رسید:



ب برای رسم نمودار $y = 2f(x-1) - 3$ ابتدا نمودار $f(x)$ را یک واحد به راست می‌بریم تا به نمودار $f(x-1)$ برسیم. حال اگر با ثابت ماندن طول نقاط این نمودار، عرض هر کدام را ۲ برابر کنیم نمودار $2f(x-1)$ پدید می‌آید که با انتقال آن به اندازه ۳ واحد به پایین به نمودار مورد نظر خواهیم رسید. با رعایت این مکانیسم به نمودار زیر می‌رسیم:



۹ کافی است طول نقاط را $\frac{1}{4}$ برابر کرده و سپس عرض نقاط را نصف کنیم.

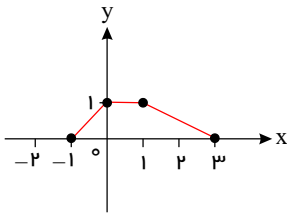


۱۰ کافی است که طول نقاط را دو برابر کرده و سپس شکل را دو واحد به پایین منتقل کنیم.

ب) دامنه این تابع $[-4, 6]$ است.

۱۴

کافی است که طول‌ها را نصف کرده و سپس عرض‌ها را $\frac{1}{3}$ برابر کنیم.



۱۵

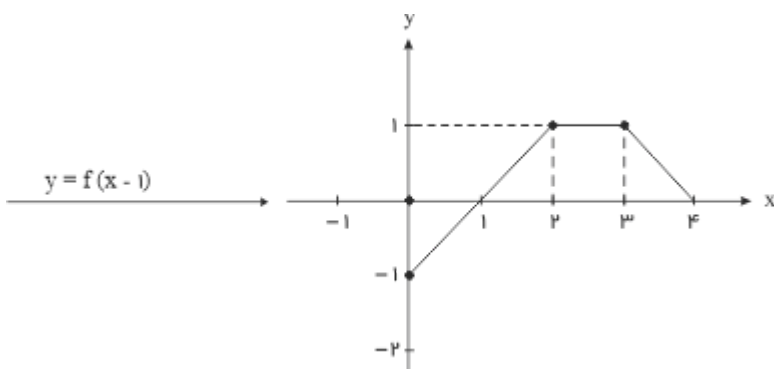
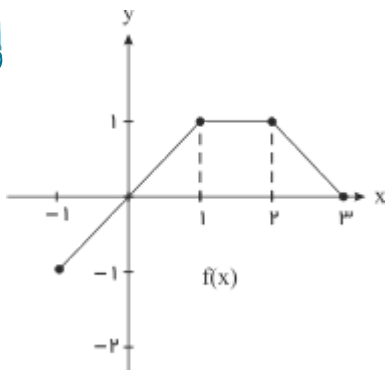
الف درست

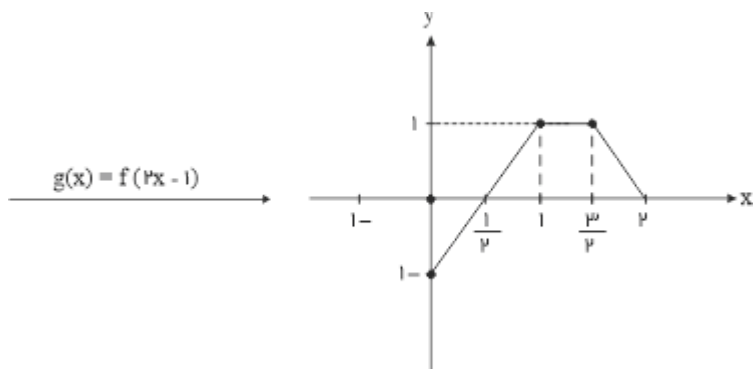
۱۶

الف درست

۱۷

$$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = f(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow 2x} g(x) = f(2x-1)$$

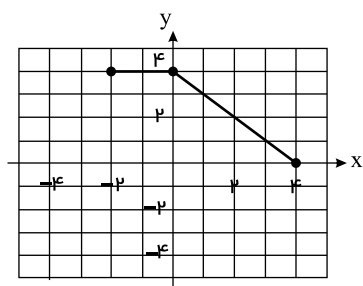




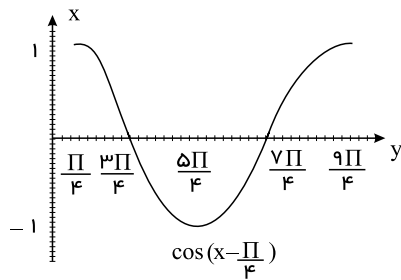
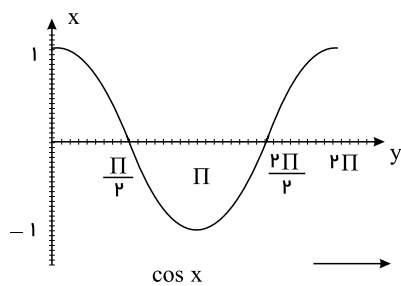
با توجه به نمودار داریم:

$$D_g = [0, 2], \quad R_g = [-1, 1]$$

۱۸



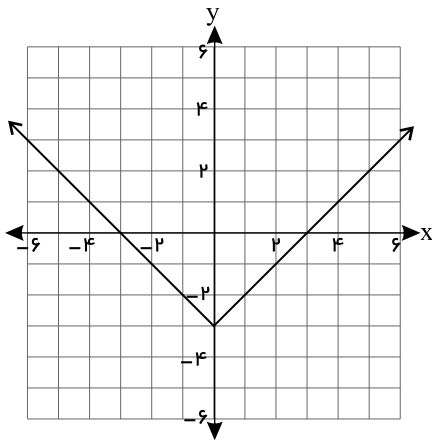
۱۹



مرحله اول: ۲۰

$$f(x) - 2 = (x - 1)^2 - 2$$

ف



۲۳) برد تغییر نمی‌کند.

$$D_{f(\frac{x}{2})} \Rightarrow -1 < \frac{x}{2} \leq 3 \rightarrow D_{f(\frac{x}{2})} = [-2, 6]$$

۲۴)

$$y = 2\sqrt{x-3}$$

گ پ

۲۶) با توجه به ضابطه‌های $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$ ، برای تعیین ضابطه توابع مرکب $f \circ g$ و

$f \circ f$ داریم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{3}{x}\right) \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم } \frac{3}{x}]{\text{به جای } x \text{ های } f} \frac{2}{\frac{3}{x} - 1} = \frac{2}{\frac{3-x}{x}} = \frac{2x}{3-x}$$

البته دقت کنید که برای تعیین دامنه این تابع در مرحله $\frac{2}{\frac{3-x}{x}}$ تأمل کرده و ریشه‌های مخرج‌ها (یعنی

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{0, 3\} \text{ می‌کنیم. } (x=3 \text{ و } x=0)$$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{2}{x-1}\right) \xrightarrow[\text{قرار بده } \frac{2}{x-1}]{\text{به جای } x \text{ های } f} \frac{2}{\frac{2}{x-1} - 1} = \frac{2}{\frac{3-x}{x-1}} = \frac{2x-2}{3-x}$$

برای تعیین دامنه این تابع نیز با توجه به مرحله ساده نشده $\frac{2}{\frac{3-x}{x-1}}$ ، می‌بایستی ریشه‌های مخرج (یعنی

$$D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{1, 3\} \text{ لذا: } (x=1 \text{ و } x=3) \text{ را از } \mathbb{R} \text{ برداریم.}$$



$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} fog = ? \left\{ \begin{array}{l} \overset{g}{5} \rightarrow \overset{f}{7} \rightarrow 8 : fog(5) = 8 \\ \overset{g}{3} \rightarrow \overset{f}{5} \rightarrow 3 : fog(3) = 3 \\ \overset{g}{7} \rightarrow \overset{f}{9} \rightarrow 8 : fog(7) = 8 \\ \overset{g}{9} \rightarrow \overset{f}{11} \rightarrow 4 : fog(9) = 4 \end{array} \right. \\ \\ gof = ? \left\{ \begin{array}{l} \overset{f}{7} \rightarrow \overset{g}{8} \rightarrow \times \\ \overset{f}{5} \rightarrow \overset{g}{3} \rightarrow 5 : gof(5) = 5 \\ \overset{f}{9} \rightarrow \overset{g}{8} \rightarrow \times \\ \overset{f}{11} \rightarrow \overset{g}{4} \rightarrow \times \end{array} \right. \end{array} \right. = \{(5, 8), (3, 3), (7, 8), (9, 4)\}$$

$$= \{(5, 5)\}$$

۲۸ خیلی ساده است: ببینید:

$$\begin{cases} f(x) = 3x - 4 \\ f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14 \end{cases} \rightarrow 3g(x) - 4 = 3x^2 - 6x + 14$$

$$\xrightarrow{+4} 3g(x) = 3x^2 - 6x + 18 \xrightarrow{\div 3} g(x) = x^2 - 2x + 6$$

۲۹

الف

$$f(x) = \sqrt{2x - 3}, \quad g(x) = \frac{6}{3x - 5} \rightarrow \begin{cases} D_f : 2x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{2} \\ D_g : 3x - 5 \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \neq \frac{5}{3}, \frac{6}{3x - 5} \in D_f\}$$

$$\text{یعنی حل نامعادله } \frac{6}{3x - 5} \in D_f \text{ که معادل } \frac{6}{3x - 5} \geq \frac{3}{2} \text{ می باشد که بعد از تعیین علامت به جواب } (\frac{5}{3}, 3] \text{ می رسیم.}$$

$$\frac{27 - 9x}{6x - 10} \geq 0$$

$$\rightarrow D_{fog} = \{x \neq \frac{5}{3}, x \in (\frac{5}{3}, 3]\} = (\frac{5}{3}, 3]$$

$$fog(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{6}{3x - 5}\right) = \sqrt{2\left(\frac{6}{3x - 5}\right) - 3} = \sqrt{\frac{27 - 9x}{3x - 5}}$$



البته می‌توانستیم دامنهٔ $f \circ g$ را بعد از تشکیل ضابطهٔ آن نیز به دست آوریم.

ب

$$f(x) = \sqrt{x+2}, \quad g(x) = \sqrt{x^2-16}$$

$$D_f: x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2, \quad D_g: x^2-16 \geq 0 \rightarrow |x| \geq 4 \rightarrow x \geq 4 \text{ یا } x \leq -4$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+2}) = \sqrt{(\sqrt{x+2})^2 - 16} \stackrel{\text{بافرض } x \geq -2}{=} \sqrt{x-14}$$

$$\xrightarrow[\text{دامنهٔ } g \circ f]{\text{برای تعیین اعمال شرط}} x-14 \geq 0 \rightarrow x \geq 14 \xrightarrow{x \geq -2} x \geq 14 \rightarrow D_{g \circ f} = [14, +\infty)$$

پ

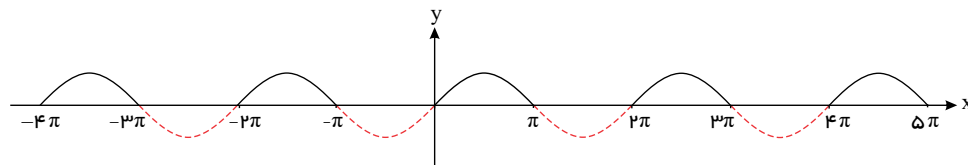
$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = x \geq 0 \rightarrow D_{g \circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}, \sin x \geq 0\} = \{ \text{تمام } x \text{ هایی که در نواحی ۱ و ۲ قرار می‌گیرند} \}$$

$$\stackrel{\text{مانند}}{=} \dots \cup [-4\pi, -3\pi] \cup [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup [4\pi, 5\pi] \cup \dots$$

برای درک بهتر موضوع با توجه به نمودار $y = \sin x$ بازه‌هایی که $\sin x$ نامنفی است را می‌توانیم ببینیم:



۳۰

$$\text{الف) } f \circ g(-1) = f(\underbrace{g(-1)}_{(-1, -3) \in g}) = \underbrace{f(-3)}_{(-3, 1) \in f} = 1$$

$$\text{ب) } g \circ f(0) = g(f(0)) \xrightarrow[f(0)=2]{(0, 2) \in f} g(2) \xrightarrow[g(2)=-6]{(2, -6) \in g} -6$$

$$\text{پ) } f \circ g(1) = f(g(1)) \xrightarrow[g(1)=-5]{(1, -5) \in g} f(-5) \xrightarrow[f(-5)=3]{(-5, 3) \in f} 3$$

$$\text{ت) } g \circ f(-1) = g(f(-1)) \xrightarrow[f(-1)=1]{(-1, 1) \in f} g(1) \xrightarrow[g(1)=-5]{(1, -5) \in g} -5$$



بنابراین اگر نمودارهای fog و gof را داشته باشیم می‌توانیم ببینیم که نقاط $(-1, 1)$ و $(1, 3)$ روی نمودار fog و نقاط $(0, -6)$ و $(-1, -5)$ روی نمودار gof قرار دارند.

۳۱

$$f(x) = \sqrt{x-1} \rightarrow D_f : x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$g(x) = 2x^2 - 1 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x | x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 1 \geq 1\}$$

$$= \{x | x \in \mathbb{R}, 2x^2 \geq 2\} = \{x | x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1\}$$

$$= x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

۳۲

$$f(x) = \sqrt{x-4} \rightarrow D_f : x-4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2-1} \rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x \geq 4, \sqrt{x-4} \neq \pm 1\} = \{x \geq 4, x \neq 5\}$$

$$= [4, 5) \cup (5, +\infty)$$

۳۳

الف

$$g(x) = x^3$$

$$gof(x) = g(f(x)) = (2x^2 - 5x + 1)^3$$

الف

$$f(x) = x^2 - 5 \rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x+6} \rightarrow D_g : x \geq -6$$



$$D_{fog} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \geq -6, \sqrt{x+6} \in \mathbb{R}\} = [-6, +\infty)$$

۳۵

الف

$$f(x) = \sqrt{x-1} \rightarrow D_f : x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$g(x) = 2x^2 - 1 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} : \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 1 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R}, 2x^2 \geq 2\} \\ = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

ب

$$fog(x) = f(g(x)) = \sqrt{2x^2 - 1 - 1} = \sqrt{2x^2 - 2}$$

۳۶

$$f(x) = 3x - 4 \rightarrow f(g(x)) = 3g(x) - 4$$

$$\text{پس: } 3g(x) - 4 = 3x^2 - 6x + 14 \rightarrow 3g(x) = 3x^2 - 6x + 18$$

$$\rightarrow g(x) = x^2 - 2x + 6$$

۳۷

الف

$$f(x) = \sqrt{4-2x} \rightarrow D_f : 4-2x \geq 0 \rightarrow x \leq 2$$

$$g(x) = x^2 + 2x - 1 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \leq 2 \mid \sqrt{4-2x} \in \mathbb{R}\}$$

$$= x \leq 2 \rightarrow x \in (-\infty, 2]$$

ب

$$gof(2) - \frac{f}{g}(0) = g(f(2)) - \frac{f(0)}{g(0)} = g(0) - \frac{f(0)}{g(0)} = -1 - \frac{2}{-1} = -1 + 2 = 1$$

۳۸

الف



$$f \circ g(-1) = f(g(-1)) = f(-3) = 1$$

ب

$$g(3t - 1) = 0 \xrightarrow{g(-4)=0} 3t - 1 = -4 \rightarrow 3t = -3 \rightarrow t = -1$$

۳۹ الف

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in D_f\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$2x^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow 2x^2 \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1$$

ب

$$f(2) = \sqrt{2-1} = 1$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 1$$

۴۰

$$\text{الف) } g(f(1)) = g(2) = -2$$

$$\text{ب) } (f+g)(0) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow (f((f+g)(0))) = f(2) = -5$$

۴۱

$$g \circ f = \{(0, 4), (3, 7), (5, 0)\}$$

۴۲

الف

$$(g \circ f)(-1) = g(1) = -5$$

۴۳

الف درست

۴۴ الف

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-3, +\infty) \mid \sqrt{x+3} \in R\} = [-3, +\infty)$$

ب

$$(g \circ f)(1) = g(3) = \sqrt{6}$$

۴۵

الف در بازه‌های $(-\infty, 2]$ و $[3, +\infty)$ که به معنای $(2, 3) - \mathbb{R}$ است اکیداً صعودی است.

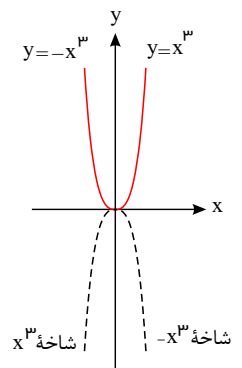
ب این تابع که می‌تواند متعلق به تابع گویای $y = \frac{1}{x}$ باشد نکته بسیار جالبی را در خود نهفته دارد و آن اینکه تابع در هر کدام از فاصله‌های $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$ نزولی اکید بوده در حالی که روی هر بازه‌ای که شامل $x = 0$ (ریشه‌ی مخرج) باشد غیر یکنواست (نه صعودی و نه نزولی).

پ این تابع نیز با دامنه $\mathbb{R}$ روی فاصله $(-\infty, 0)$ صعودی اکید و روی فاصله $(0, +\infty)$ نزولی اکید است. این بدان معناست که تابع روی دامنه خود غیر یکنواست.

ت این نمودار که متعلق به تابع مثلثاتی $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ می‌باشد، در فاصله‌های $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ نزولی اکید و در فاصله $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ صعودی اکید است. یعنی تابع روی $[-\pi, \pi]$ غیر یکنواست.

(۴۶) برای اینکه ببینیم تابع در چه فاصله‌ای نزولی است، پیشنهاد می‌کنیم نمودار آن را رسم کنید. (اساساً این شعار من است که: همه چیز در نمودار نمود پیدا می‌کند!) با توجه به وجود قدر مطلق و مفهوم آن تابع را دو ضابطه‌ای می‌کنیم:

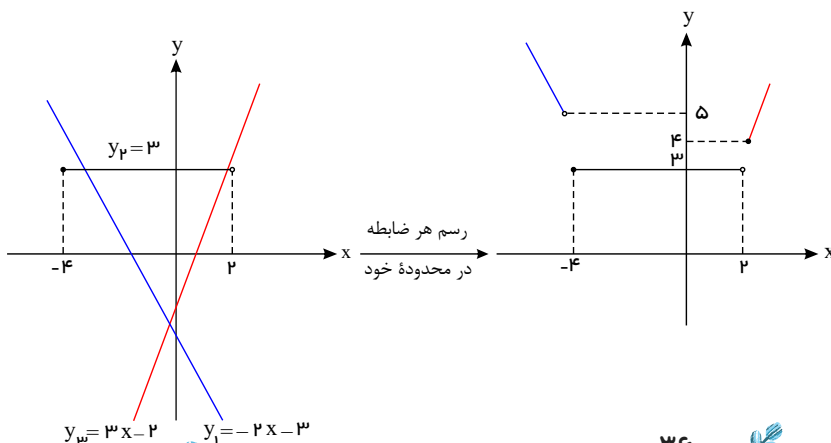
$$y = x^2|x| = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حالا رسم کن}}$$



حالا دیگر معلوم شد که تابع در فاصله $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی و در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است که با مقایسه نزولی بودن تابع در بازه $(-\infty, a]$ مشخص می‌شود که باید $a = 0$ باشد.

دقت کنید که تابع $y = x^2|x|$ علی‌رغم شبیه بودن نمودار آن به $y = x^2$ ، با این تابع یکی نیست!

(۴۷) رسم نمودار تابع f به آسانی قابل درک است. چرا که در هر مرحله با یک تابع خطی روبرو هستیم:





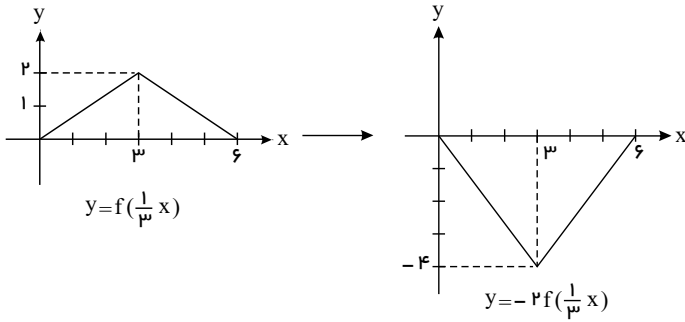
نادرست

تابع $y = (x + 1)^3$ در دامنه تعریف خود صعودی است.

۵۱

الف درست

۵۲ ابتدا طول نقاط را ۳ برابر کرده و سپس عرض نقاط را ۲ برابر کنیم.



۵۳

الف ثابت

۵۴

الف درست

۵۵

الف یک به یک

۵۶

الف پایین

درست

۵۸

الف

$$f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 \leq 0 \Rightarrow 3x^2 \leq 3 \\ \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

یا $(-1, 1)$ یا $[-1, 1]$

$$x \leq -2$$

۶۰



درست

درست

نادرست

نادرست

۲

۶۷

الف درست

درست

پایین تر

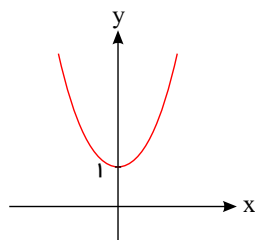
۷۰

الف

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \sqrt{x-2} \rightarrow y = 1 + \sqrt{x-2} \xrightarrow{-1} y-1 = \sqrt{x-2} \xrightarrow{(x \geq 2)} (y-1)^2 = x-2 \\
 &= (y-1)^2 + 2 \rightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 2 \\
 &f \text{ برای } : x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow D_f = [2, +\infty) = R_{f^{-1}} \\
 &f \text{ برای } : y = 1 + \underbrace{\sqrt{x-2}}_{\min=0} \rightarrow \min(y) = 1 + 0 = 1 \rightarrow y \geq 1 \rightarrow R_f = [1, +\infty) = D_{f^{-1}}
 \end{aligned}$$

ب

است، به دلیل یک به یک

تابع $h(x) = x^2 + 1$ که معرف یک سهمی به شکلنبودن روی دامنه خود ($D_h = \mathbb{R}$) وارون پذیر نخواهد بود.پرسش: آیا راهی است که تابع $h(x) = x^2 + 1$ را تبدیل به یک تابع وارون پذیر کند؟!پاسخ: آری. با توجه به نمودار فوق اگر چنانچه دامنه تابع را به یکی از دو فاصله $[0, +\infty)$ یا $(-\infty, 0]$

محدود کنیم تابع، یک به یک و وارون پذیر می شود. مثلاً:



$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad f(x) = \frac{-8x + 3}{2} : y = \frac{-8x + 3}{2} &\xrightarrow{\times 2} 2y = -8x + 3 \xrightarrow{-3} -8x = 2y - 3 \\ &\xrightarrow{\div (-8)} x = \frac{2y - 3}{-8} = \frac{-1}{4}y + \frac{3}{8} \xrightarrow{\text{حالا}} f^{-1}(x) = \frac{-1}{4}x + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) = -5 - \sqrt{3x + 1} : y = -5 - \sqrt{3x + 1} &\rightarrow y + 5 = -\sqrt{3x + 1} \\ \xrightarrow{\text{به توان ۲ برسان}} (y + 5)^2 = (3x + 1) &\xrightarrow{-1} (y + 5)^2 - 1 = 3x \xrightarrow{\div 3} x = \frac{1}{3}(y + 5)^2 - \frac{1}{3} \\ \left(\begin{array}{l} y + 5 \leq 0 \\ y \leq -5 \end{array} \right) & \\ x \geq \frac{-1}{3} & \\ \xrightarrow{\text{حالا}} g^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 5)^2 - \frac{1}{3} & \end{aligned}$$

ب)

که با توجه به شرایط $y \leq -5$ و $x \geq \frac{-1}{3}$ برای دامنه و برد تابع وارون، داریم:

$$D_{g^{-1}} = R_g = (-\infty, -5], \quad R_{g^{-1}} = D_g = \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

(۷۲) در هر مورد وارون یکی از توابع را یافته (معمولاً آن تابعی که محاسبه x بر حسب y در آن ساده‌تر است) و نشان می‌دهیم که تابع وارون به دست آمده همان تابع دوم است.

$$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= \frac{-7}{2}x - 3 \\ g(x) &= -\frac{2x + 6}{7} \rightarrow y = -\frac{2x + 6}{7} \xrightarrow{\times (-7)} -7y = 2x + 6 \xrightarrow{-6} 2x = -7y - 6 \\ &\xrightarrow{\div 2} x = \frac{-7y - 6}{2} = \frac{-7}{2}y - 3 \xrightarrow{\text{حالا}} g^{-1}(x) = \frac{-7}{2}x - 3 \rightarrow g^{-1}(x) = f(x) \checkmark \end{aligned} \right.$$

الف)



$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = -\sqrt{x-8} \\ g(x) = 8 + x^2; x \leq 0 \rightarrow y = 8 + x^2 \xrightarrow{\text{جذر}} x^2 = y - 8 \rightarrow |x| = \sqrt{y-8} \\ \xrightarrow[\text{با توجه به } x \leq 0]{|x| = -x} -x = \sqrt{y-8} \rightarrow x = -\sqrt{y-8} \xrightarrow{\text{حالا}} g^{-1}(x) = -\sqrt{x-8} = f(x) \checkmark \end{array} \right.$$

ب)

۷۳

$$f(x) = \frac{9}{5}x + 32 \rightarrow y = \frac{9}{5}x + 32 \xrightarrow{-32} \frac{9}{5}x = y - 32 \xrightarrow{\times \frac{5}{9}} x = \frac{5}{9}(y - 32)$$

$$\xrightarrow{\text{حالا}} f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

رابطه $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ نشان می‌دهد که x درجه سلسیوس معادل $f(x)$ درجه فارنهایت است مثلاً

$$x = 5^\circ C \text{ معادل } f(5) = \frac{9}{5}(5) + 32 = 41 \text{ درجه فارنهایت است. درحالی که رابطه}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32) \text{ به ما می‌گوید هر } x \text{ درجه فارنهایت معادل } f^{-1}(x) \text{ درجه سلسیوس می‌باشد.}$$

$$\text{مثلاً } x = 32 \text{ درجه فارنهایت معادل } f^{-1}(32) = \frac{5}{9}(32 - 32) = 0 \text{ یا } 0 \text{ درجه سلسیوس است.}$$

۷۴ الف)

برای محاسبه $(f \circ g)^{-1}(5)$ دو راه پیش‌رو داریم. یکی اینکه تابع مرکب $f \circ g$ را محاسبه کرده و وارون آن را بیابیم و در نهایت به جای x ‌های آن ۵ قرار دهیم. دیگر اینکه از رابطه $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ استفاده کرده و با توجه به تابع وارون‌های f^{-1} و g^{-1} ، تابع مرکب $g^{-1} \circ f^{-1}$ را محاسبه کرده و به جای x ‌هایش ۵ قرار دهیم. ما هر دو راهکار را انجام می‌دهیم:

روش اول:



$$\rightarrow fog(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \frac{1}{8}x^3 - 3 \rightarrow fog(x) = \frac{1}{8}x^3 - 3$$

$$\frac{1}{8}x^3 - 3 \xrightarrow{+3} \frac{1}{8}x^3 = y + 3 \xrightarrow{\times 8} x^3 = 8y + 24$$

$$y + 24 \rightarrow (fog)^{-1}(x) = \sqrt[3]{8x + 24} \xrightarrow[x=5]{\text{قرار بده}} (fog)^{-1}(5) = \sqrt[3]{40 + 24} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

حال، روش دوم را نیز امتحان می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{8}x - 3 \rightarrow y = \frac{1}{8}x - 3 \rightarrow \frac{1}{8}x = y + 3 \rightarrow x = 8y + 24 \rightarrow f^{-1}(x) = 8x + 24$$

$$g(x) = x^3 \rightarrow y = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{y} \rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا می‌نوید}} (fog)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}(8x + 24) = \sqrt[3]{8x + 24}$$

$$\xrightarrow[\text{قرار}]{=5} (fog)^{-1}(5) = \sqrt[3]{40 + 24} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

حال، با توجه به ضابطه‌های f^{-1} و g^{-1} موارد (ب) و (پ) را به راحتی می‌توانیم محاسبه کنیم:

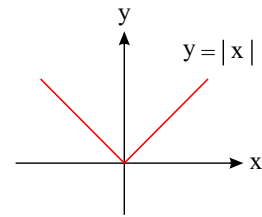
$$(f^{-1} \circ f^{-1})(6) = f^{-1}(f^{-1}(6)) \xrightarrow[f^{-1}(6)=48+24=72]{f^{-1}(x)=8x+24}} f^{-1}(72) = 8(72) + 24 = 600$$

ب)

$$\text{پ) } (g^{-1} \circ f^{-1})(5) = g^{-1}(f^{-1}(5)) \xrightarrow[f^{-1}(5)=40+24=64]{f^{-1}(x)=8x+24}} g^{-1}(64) = \sqrt[3]{64} = 4$$

همانطور که می‌بینید جواب‌های موارد (الف) و (پ) یکی هستند!

الف



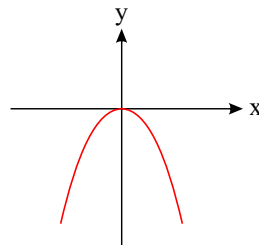
با توجه به نمودار اگر دامنه تابع را به یکی از دو فاصله $(-\infty, 0]$ یا $[0, +\infty)$

محدود کنیم، آن گاه تابع مورد نظر یک به یک خواهد بود.

حالت اول: $\begin{cases} f(x) = |x| \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = x \rightarrow y = x \rightarrow f^{-1}(x) = x$

حالت دوم: $\begin{cases} f(x) = |x| \\ x \leq 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = -x \rightarrow y = -x \rightarrow x = -y \rightarrow f^{-1}(x) = -x$

ب



تابع $g(x) = -x^2$ که معرف سهمی است که یک به یک نیست و با محدود

کردن دامنه آن به یکی از دو فاصله $(-\infty, 0]$ یا $[0, +\infty)$ یک به یک و وارون پذیر می شود.

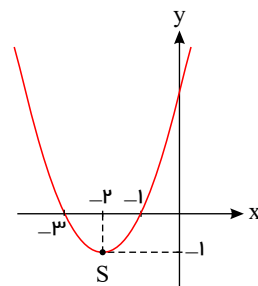
حالت اول:

$$\begin{aligned} (x) = -x^2 \rightarrow y = -x^2 \rightarrow x^2 = -y \xrightarrow{\text{جذر}} |x| = \sqrt{-y} \xrightarrow[x=|x|]{x \geq 0} x = \sqrt{-y} \rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{-x} \end{aligned}$$

حالت دوم:

$$\begin{aligned} -x^2 \rightarrow y = -x^2 \rightarrow x^2 = -y \xrightarrow{\text{جذر}} |x| = \sqrt{-y} \xrightarrow[|x|=-x]{x \leq 0} x = -\sqrt{-y} \rightarrow g^{-1}(x) = -\sqrt{-x} \end{aligned}$$

پ سهمی $h(x) = x^2 + 4x + 3$ نیز که می شود آن را به صورت $h(x) = (x + 2)^2 - 1$ نوشت



داشته و در کل دامنه خود غیر یک به یک است.

نموداری به شکل

حال اگر دامنه آن را از $\mathbb{R}$ به $(-\infty, -2]$ یا $[-2, +\infty)$ محدود کنیم، آن گاه با یکی از دو شاخه سهمی مواجه بوده و تابعی یک به یک و وارون پذیر داریم:

حالت اول:



$$h(x) = (x + 2)^2 - 1 \rightarrow y = (x + 2)^2 - 1 \rightarrow (x + 2)^2 = y + 1 \xrightarrow{\text{جذر}} \\ D_h = [-2, +\infty)$$

$$+ 2 = \sqrt{y + 1} \xrightarrow[x+2 \geq 0]{x \geq -2} x + 2 = \sqrt{y + 1} \rightarrow x = \sqrt{y + 1} - 2 \rightarrow h^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} - 2$$

حالت دوم:

$$(x + 2)^2 - 1 \rightarrow (x + 2)^2 = y + 1 \xrightarrow{\text{جذر}}$$

$$- 2 = \sqrt{y + 1} \rightarrow x + 2 = -\sqrt{y + 1} \rightarrow x = -\sqrt{y + 1} - 2 \rightarrow h^{-1}(x) = -\sqrt{x + 1} - 2$$

۷۶

(الف)

$$f(x) = \frac{x + 3}{2x} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$g(x) = 3x - 1 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}, 3x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{1}{3}\} \\ = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

(ب)

$$g^{-1} \circ f^{-1}(5) = g^{-1}(f^{-1}(5)) = g^{-1}(64) = 4$$

علت:

$$f^{-1}(5) \rightarrow 5 = \frac{1}{\lambda}x - 3 \rightarrow \frac{1}{\lambda}x = 8 \rightarrow x = 64$$

$$g^{-1}(64) \rightarrow 64 = x^3 \rightarrow x = 4$$

۷۷ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ است.



$$g^{-1} \circ f^{-1}(\alpha) = g^{-1}(f^{-1}(\alpha)) = g^{-1}(64) = 4$$

$$\text{علت: } \begin{cases} f^{-1}(\alpha) = \alpha \rightarrow f(\alpha) = 5 \rightarrow \frac{1}{8}\alpha - 3 = 5 \rightarrow \frac{1}{8}\alpha = 8 \rightarrow \alpha = 64 \\ g^{-1}(64) = \beta \rightarrow g(\beta) = 64 \rightarrow \beta^3 = 64 \rightarrow \beta = 4 \end{cases}$$

درست

$$y = -\frac{2x+6}{7} \rightarrow 7y = -2x-6 \rightarrow 2x = -7y-6 \rightarrow x = -\frac{7}{2}y-3$$

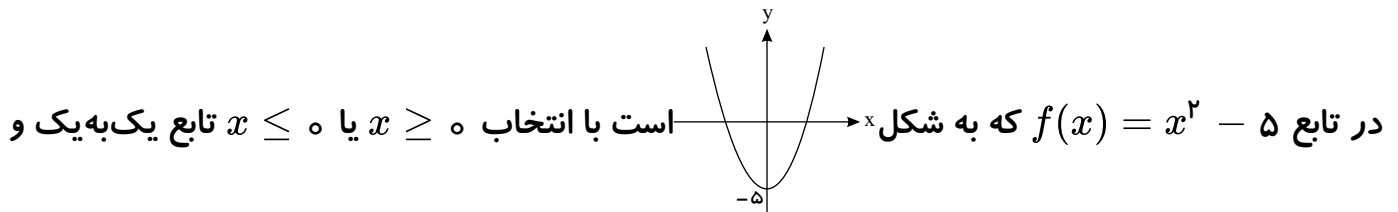
$$\rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{7}{2}x-3$$

۷۹ می‌دانیم که $f^{-1} \circ f(x) = x$ و $f \circ f^{-1}(x) = x$ است.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x + 4 - 4 = x$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{3x-4+4}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

بنابراین دو تابع $g(x)$ و $f(x)$ وارون یکدیگرند.



در نتیجه وارون پذیر می‌شود.

۸۱

$$f(x) = -\frac{7}{2}x-3 \rightarrow y = -\frac{7}{2}x-3 \rightarrow \frac{7}{2}x = -y-3 \rightarrow 7x = -2y-6$$

$$\rightarrow x = \frac{-2y-6}{7} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x-6}{7}$$

۸۲

$$y = -5 - \sqrt{3x+1} \rightarrow \sqrt{3x+1} = -5-y \rightarrow 3x+1 = 25 + y^2 + 10y$$

$$\rightarrow 3x = y^2 + 10y + 24 \rightarrow x = \frac{y^2 + 10y + 24}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{y^2 + 10x + 24}{3}$$

۱۸۶ تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ معرف سهمی $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ با محور تقارن $x_s = 2$

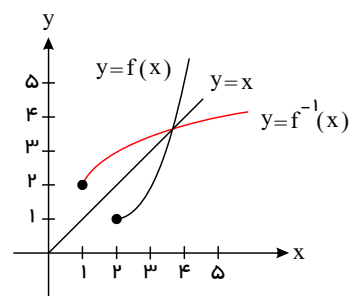
می باشد که غیر یک به یک و وارون ناپذیر است.

حال اگر دامنه تابع را به یکی از فاصله های $(-\infty, x_s] = (-\infty, 2]$ یا $[x_s, +\infty) = [2, +\infty)$

محدود کنیم تابع f یک به یک و وارون پذیر خواهد شد:

حالت اول:

$$\begin{cases} f(x) = (x - 2)^2 + 1 \\ D_f = [2, +\infty) \end{cases} \rightarrow y = (x - 2)^2 + 1$$



$$\rightarrow (x - 2)^2 = y - 1 \xrightarrow{\text{جنر}} |x - 2| = \sqrt{y - 1}$$

با توجه به D_f

$$\xrightarrow{x-2 \geq 0} x - 2 = \sqrt{y - 1} \rightarrow x = \sqrt{y - 1} + 2$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1} + 2$$

حالت دوم:

$$\begin{cases} f(x) = (x - 2)^2 + 1 \\ D_f = (-\infty, 2] \end{cases} \rightarrow y = (x - 2)^2 + 1$$

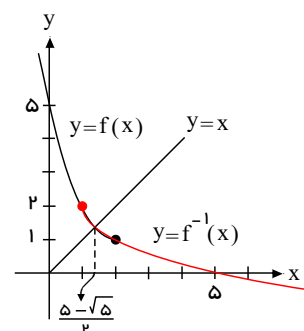
$$\rightarrow (x - 2)^2 = y - 1 \xrightarrow{\text{جنر}} |x - 2| = \sqrt{y - 1}$$

با توجه به D_f

$$\xrightarrow{x-2 \leq 0} -(x - 2) = \sqrt{y - 1} \rightarrow x - 2 = -\sqrt{y - 1}$$

$$\rightarrow x = -\sqrt{y - 1} + 2$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x - 1} + 2$$





$$(g^{-1} \circ f^{-1})(2) = g^{-1}(0) = -4$$

درست ✓

$$f(-2) = -16 + 20 + 6 - 10 = 0$$

علت:

درست

-۵

$$\text{علت : } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 3x}{-x^2 + 1} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2}{-x^2} = -5$$

۷

$$\text{علت : } (2g - f)'(2) = 2g'(2) - f'(2) = 10 - 3 = 7$$

نادرست

نادرست

نادرست

$$\text{علت : } f'(x) = 3x^2 - 3 > 0 \rightarrow 3x^2 > 3 \rightarrow x^2 > 1 \rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1$$

درست

پیوسته

۴۰

$$\text{علت : } h'(x) = 12x^3 + 4x \rightarrow h''(x) = 36x^2 + 4 \rightarrow h''(1) = 36 + 4 = 40$$