نام آزمون: آزمون ۱ تابع (دامنه و تساوی)

تلگرام استاد شاکریان : @riazi _jazb

خرید محصولات : shakeryan.com

سبقت (۰۵۱-۳۸۱۱۷)

۱) اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$، دامنهٔ تابع $f(۳-x)$، کدام است؟

① $[۰,۲]$ ② $[۰,۳]$ ③ $[۱,۲]$ ④ $[۱,۳]$

۲) اگر عبارت $\sqrt[۳]{۲x-x^۲}+\sqrt[۴]{\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}}$، عدد حقیقی باشد، مجموعه‌ی مقادیر x در کدام بازه است؟

① $[\frac{۲}{۳},۲]$ ② $[-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}]$ ③ $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,۲]$ ④ $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,\frac{۲}{۳}]$

۳) دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{۱-\log\left(x^۲-۳x\right)}$ کدام است؟

① $[-۲,۵]$ ② $(-۲,۵)-(۰,۳)$ ③ $[-۲,۰)\cup(۳,۵]$ ④ $R-[۰,۳]$

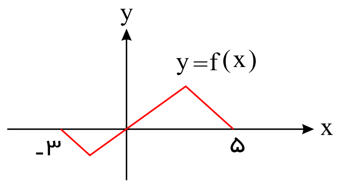
۴) اگر $f(x)=x^۳-۳x$ باشد دامنه‌ی تابع $h(x)=\sqrt{x-f(x)}$ کدام است؟

① $(-\infty,-۲]\cup[۰,۲]$ ② $[-۲,۰]\cup[۲,+\infty)$ ③ $(-\infty,-۲]$ ④ $[۰,۲]$

۵) تابع $f(x)=(x-۱)\sqrt{۱-x}$ با کدام‌یک از توابع زیر مساوی است؟

① $g(x)=\sqrt{-(۱-x)^۲}$ ② $g(x)=\sqrt{(۱-x)^۳}$ ③ $g(x)=\sqrt{(x-۱)^۳}$ ④ $g(x)=-\sqrt{(۱-x)^۳}$

۶) اگر شکل زیر تابع $y=f(x)$ را نشان دهد، دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt{xf(-\frac{x}{۲})}$ کدام است؟



① $[-۱۰,۶]$ ② $[۰,۶]$ ③ $\{-۱۰,۰,۶\}$ ④ $\{۰\}$

۷) در کدام گزینه، توابع f و g مساوی نیستند؟

۱) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^۲}}{\sqrt[۳]{x^۳}} \\ g(x)=\dfrac{x}{|x|} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۱} \\ g(x)=\sqrt{۱-x}\times\sqrt{x-۱} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^۲-x} \\ g(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x-۱} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{x^۲} \\ g(x)=\dfrac{x^۲}{x^۳} \end{cases}$

۸) کدام دو تابع با هم مساوی‌اند؟

۱) $g(x)=\sqrt{x|x|}$ و $f(x)=(\sqrt{x})^۲$

۲) $g(x)=(\sqrt{x})^۲$ و $f(x)=x$

۳) $g(x)=\sqrt{|x|}\times\sqrt{|x|}$ و $f(x)=\sqrt{x|x|}$

۴) $g(x)=(\sqrt{x})^۲$ و $f(x)=\sqrt{x^۲}$

۹) کدام دو تابع داده شده مساوی‌اند؟

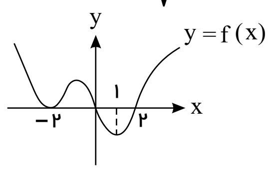
۱) $g(x)=x|x+۱|\,,\ f(x)=x(x+۱)$

۲) $g(x)=\dfrac{|x+۱|}{x}\,,\ f(x)=\dfrac{x+۱}{|x|}$

۳) $g(x)=\dfrac{x^۲-۱}{|x|+۱}\,,\ f(x)=|x|-۱$

۴) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^۲}}{|x|}\,,\ f(x)=۱$

۱۰) شکل زیر نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{(۲x-۲)f(x)}$ کدام است؟



۱) $\{-۲,۰,۲\}$

۲) $\mathbb{R}$

۳) $[۰,۱]\cup[۲,+\infty)\cup\{-۲\}$

۴) $[۰,+\infty)\cup\{-۲\}$

پاسخ‌نامه تشریحی

۱) ۱ ۲ ۳ **۴**

$$2x-x^2\geq 0\Rightarrow x(2-x)\geq 0\Rightarrow$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
عبارت >0		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\Rightarrow 0\leq x\leq 2$$

حال برای پیدا کردن دامنهٔ $f(3-x)$ کافی است $3-x$ را بین صفر و ۲ قرار دهیم.

$$0\leq 3-x\leq 2\Rightarrow -3\leq -x\leq -1\Rightarrow 3\geq x\geq 1\Rightarrow x\in[1,3]$$

البته می‌توانید ابتدا ضابطهٔ $f(3-x)$ را به‌دست آورید و سپس زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهید.

۲) ۱ ۲ ۳ **۴** روش اول:

چون یک چندجمله‌ای در زیررادیکال با فرجهٔ فرد قرار دارد، بنابراین رادیکال با فرجهٔ فرد به ازای تمام مقادیر x تعریف شده است و فقط باید عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهید.

$$\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}\geq 0\rightarrow\frac{4-9x^2}{2x^2}\geq 0\rightarrow\begin{cases}\text{صورت}=0\rightarrow 9x^2=4\rightarrow x^2=\frac{4}{9}\rightarrow x=\pm\frac{2}{3}\\ \text{مخرج}=0\rightarrow 2x^2=0\rightarrow x=0\end{cases}$$

$\rightarrow$

x	$-\infty$		$\frac{-2}{3}$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
عبارت ≥ 0		$-$	0	$+$	ن	$+$	0	$-$	

$$\rightarrow x\in[\frac{-2}{3},0)\cup(0,\frac{2}{3}]$$

روش دوم:

اگر $x=1$ باشد زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، منفی می‌شود بنابراین گزینه‌های اول و سوم که شامل $x=1$ هستند حذف می‌شوند در ضمن $x=0$ مخرج را صفر می‌کند و گزینهٔ دوم که شامل $x=0$ است نیز حذف می‌شود.

۳) ۱ ۲ **۳** ۴ جلوی لگاریتم باید مثبت باشد پس داریم:

$$??^2?3??>0\Rightarrow x(x-3)>0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}??<0\ \text{یا}\ x>3\ \ (I)$$

عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌ترمساوی صفر باشد.

$$1-\log(x^2-3x)\geq 0\rightarrow\log(x^2-3x)\leq 1\rightarrow\log(x^2-3x)\leq\log 10$$

$$\rightarrow x^2-3x\leq 10\rightarrow x^2-3x-10\leq 0\rightarrow(x-5)(x+2)\leq 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-2\leq x\leq 5\ \ (II)$$

از اشتراک I , II به نتیجهٔ $-2\leq x<0$ یا $3<x\leq 5$ می‌رسیم. یعنی: $x\in[-2,0)\cup(3,5]$

۴) **۱** ۲ ۳ ۴

تابع $\sqrt{4x-x^3}=\sqrt{x-f(x)}$ وقتی با معنی است که $4x-x^3\geq 0$ باشد

$$4x-x^3\geq\rightarrow x(4-x^2)\geq 0\rightarrow$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
عبارت ≥ 0		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

بنابراین دامنهٔ تعریف تابع به‌صورت $(-\infty,-2]\cup[0,2]$ است.

۵) ۱ ۲ ۳ **۴**

$$f(x)=(x-1)\sqrt{1-x}\Rightarrow 1-x\geq 0\Rightarrow x\leq 1\Rightarrow D_f=(-\infty,1]$$

گزینهٔ ۱) $g(x)=\sqrt{-(1-x)^2}\Rightarrow-(1-x)^2\geq 0\Rightarrow(1-x)^2\leq 0\Rightarrow(1-x)^2=0$

$\Rightarrow 1-x=0\Rightarrow x=1\Rightarrow D_g=\{1\}\Rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow$ f و g مساوی نیستند.

(گزینهٔ ۲ $g(x)=\sqrt{(۱-x)^۳} \Rightarrow (۱-x)^۳ \geq ۰ \Rightarrow ۱-x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۱ \Rightarrow D_g=(-\infty,۱]=D_f$

$$g(x)=\sqrt{(۱-x)^۲(۱-x)}=|۱-x|\sqrt{۱-x} \xrightarrow{x\leq ۱} g(x)=(۱-x)\sqrt{۱-x} \neq f(x)$$

$\Rightarrow$ g و f برابر نیستند.

(گزینهٔ ۳ $g(x)=\sqrt{(x-۱)^۳} \Rightarrow (x-۱)^۳ \geq ۰ \Rightarrow x-۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱ \Rightarrow D_g=[۱,+\infty)$

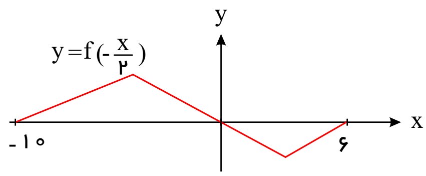
$\Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow$ g و f برابر نیستند.

(گزینهٔ ۴ $g(x)=-\sqrt{(۱-x)^۳} \Rightarrow D_g=D_f=(-\infty,۱]$

$$g(x)=-\sqrt{(۱-x)^۲(۱-x)}=-|۱-x|\sqrt{۱-x} \xrightarrow{x\leq ۱} g(x)=-(۱-x)\sqrt{۱-x}$$

$\Rightarrow g(x)=(x-۱)\sqrt{۱-x}=f(x) \Rightarrow$ g و f برابرند.

۶ (۱) (۲) (۳) (۴) برای رسم $y=f(-\frac{۱}{۲}x)$، باید در نمودار $y=f(x)$ طول نقاط را بر $-\frac{۱}{۲}$ تقسیم کنیم (در -۲ ضرب کنیم).



زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد:

$$g(x)=\sqrt{xf(-\frac{x}{۲})} \Rightarrow xf(-\frac{x}{۲}) \geq ۰$$

x	-۱۰		۰		۶
x		$-$	۰	$+$	
$f(-\frac{x}{۲})$	۰	$+$	۰	$-$	۰
$xf(-\frac{x}{۲})$	۰	$-$	۰	$-$	۰

عبارت $xf(-\frac{x}{۲})$ در نقاط $x=-۱۰,۰,۶$ صفر و در مابقی نقاط منفی است، پس داریم:

$D_g=\{-۱۰,۰,۶\}$

۷ (۱) (۲) (۳) (۴) دو تابع f و g به‌شرطی باهم برابرند که اولاً دامنه‌هایشان برابر باشند و ثانیاً به‌ازای هر x از دامنه‌ها $f(x)=g(x)$ باشد.

(گزینهٔ ۱ $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}\ ,\ D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$

اکنون دو تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^۲}}{\sqrt[۳]{x^۳}}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$$

پس $f(x)=g(x)$ است.

گزینهٔ ۲) $f(x)=\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۱} \rightarrow \begin{cases} ۱-x\geq ۰ \\ x-۱\geq ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۱\geq x \\ x\geq ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x=۱ \rightarrow D_f=\{۱\} \rightarrow f(x)=۰$

$g(x)=\sqrt{۱-x}\times\sqrt{x-۱} \rightarrow \begin{cases} ۱-x\geq ۰ \\ x-۱\geq ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۱\geq x \\ x\geq ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x=۱ \rightarrow D_g=\{۱\} \rightarrow g(x)=۰$

پس $f(x)=g(x)$ است.

گزینهٔ ۳) $f(x)=\sqrt{x^۲-x} \rightarrow x^۲-x\geq ۰ \rightarrow x(x-۱)\geq ۰ \rightarrow D_f=(-\infty,۰]\cup[۱,+\infty)$

$g(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x-۱} \rightarrow \begin{cases} x\geq ۰ \\ x-۱\geq ۰ \rightarrow x\geq ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x\geq ۱ \rightarrow D_g=[۱,+\infty)$

$D_f\neq D_g$ در نتیجه داریم: $f(x)\neq g(x)$.

گزینهٔ ۴) $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}\ ,\ D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$

اکنون دو تابع را ساده می‌کنیم:

$f(x)=\frac{x}{x^۲}=\frac{۱}{x}\ ,\ g(x)=\frac{x^۲}{x^۳}=\frac{۱}{x}$

پس $f(x)=g(x)$ است.

۸ ۴ ۳ ۲ **۱** دو تابع f و g را برابر می‌نامیم هرگاه:

الف) دامنهٔ f و دامنهٔ g باهم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم: $f(x)=g(x)$

در گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ دامنهٔ دو تابع داده شده برابر نیستند زیرا:

گزینهٔ ۲) $D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g: x\geq ۰ \Rightarrow D_g=[۰,+\infty) \Rightarrow D_f\neq D_g$

گزینهٔ ۳) $D_f: x|x|\geq ۰ \xrightarrow{|x|\geq ۰} x\geq ۰ \Rightarrow D_f=[۰,+\infty)\ ,\ D_g=\mathbb{R} \Rightarrow D_f\neq D_g$

گزینهٔ ۴) $D_f: x^۲\geq ۰ \Rightarrow x\in\mathbb{R} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g: x\geq ۰ \Rightarrow D_g=[۰,+\infty) \Rightarrow D_f\neq D_g$

جواب گزینهٔ ۱ می‌باشد زیر:

$f(x)=(\sqrt{x})^۲ \Rightarrow x\geq ۰ \Rightarrow D_f=[۰,+\infty)$

$g(x)=\sqrt{x|x|} \Rightarrow x|x|\geq ۰ \xrightarrow{|x|\geq ۰} x\geq ۰ \Rightarrow D_g=[۰,+\infty) \Rightarrow D_f=D_g=[۰,+\infty)$

$x\geq ۰ \Rightarrow |x|=x \Rightarrow g(x)=\sqrt{x|x|}=\sqrt{x\cdot x}=\sqrt{x^۲}=(\sqrt{x})^۲=f(x)$

g و f برابرند.

۹ ۴ **۳** ۲ ۱ شرط آنکه دو تابع مساوی باشند، آن است که:

۱ – دامنهٔ دو تابع یکسان باشد.

۲ – برای هر x از دامنه، مقادیر دو تابع با هم برابر باشند.

این دو شرط باید هر دو برقرار باشند، یعنی اگر یکی برقرار نباشد، دو تابع مساوی نیستند.

۱) $D_f=D_g=R\ ,\ f(-۲)=۲\ ,\ g(-۲)=-۲ \Rightarrow f(-۲)\neq g(-۲)$

$$۲)D_f = D_g = R - \{۰\} \quad , \quad f(-\frac{۱}{۲}) = ۱ \ , \ g(-\frac{۱}{۲}) = -۱ \Rightarrow f(-\frac{۱}{۲}) \neq g(-\frac{۱}{۲})$$

$$۴)D_f = R \ , \ D_g = R - \{۰\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

$۳)D_f = R \ , \ |x| + ۱ = ۰ \Rightarrow |x| = -۱$ معادله جواب ندارد $\Rightarrow D_g = R \Rightarrow D_f = D_g = R$

$$f(x) = |x| - ۱ \quad , \quad g(x) = \frac{x^۲ - ۱}{|x| + ۱} \xrightarrow{x^۲ = |x|^۲} g(x) = \frac{|x|^۲ - ۱}{|x| + ۱} = \frac{(|x| - ۱)(|x| + ۱)}{|x| + ۱}$$

$$\Rightarrow g(x) = |x| - ۱ \Rightarrow f(x) = g(x)$$

۱۰ (۴) **(۳)** (۲) (۱) عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$(۲x - ۲)f(x) \geq ۰ \ \Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ f(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = ۰ \\ x = -۲ \to \text{ریشهٔ مرتبهٔ زوج} \end{cases} \end{cases}$$

حال بعد از پیدا کردن ریشه‌ها جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

x		-۲		۰		۱		۲	
$۲x - ۲$	$-$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	۰	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$
$(۲x - ۲)f(x)$	$-$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$$\to D = [۰, ۱] \cup [۲, +\infty) \cup \{-۲\}$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۴
۲	۴
۳	۳
۴	۱
۵	۴
۶	۳
۷	۳
۸	۱
۹	۳
۱۰	۳