## مفاهیم اولیه و نمایش‌های مختلف تابع، تعریف و مقدار تابع

**۱** الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان، کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام‌یک از حالت‌های الف و ب به نفع الناز است؟

تمرین های کتاب- ۲۲

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

## دامنه و برد توابع

**۲** درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

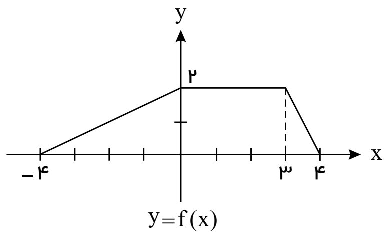
**الف** دامنهٔ تابع $y=\tan x$ برابر $\{x|x\in\mathbb{R}\,,\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\}$ است.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

# انتقال توابع

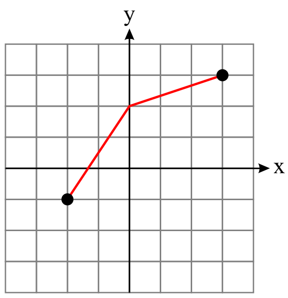
**۳** با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$، نمودار $y = \frac{۱}{۲} f(۴x)$ را رسم کنید.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

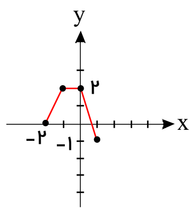



**۴** با استفاده از نمودار تابع $f$ نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{۲}\right) - ۲$ را رسم کنید.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۸




**۵** نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت زیر است. نمودار $g(x) = ۲f(x - ۱)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.




سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

**۶** درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

**الف** برد تابع با ضابطهٔ $y = kf(x)$ همان برد تابع $y = f(x)$ است.

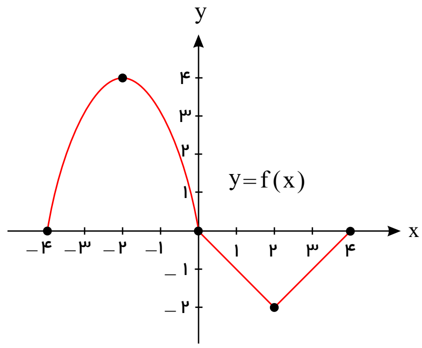
سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

**۷** تابع نمایی $y = ۲^x - ۲$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_۲^x + ۲$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

تمرین های کتاب- ۱۰

**۸** نمودار تابع $f$ با دامنهٔ $[-۴,۴]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنیم.

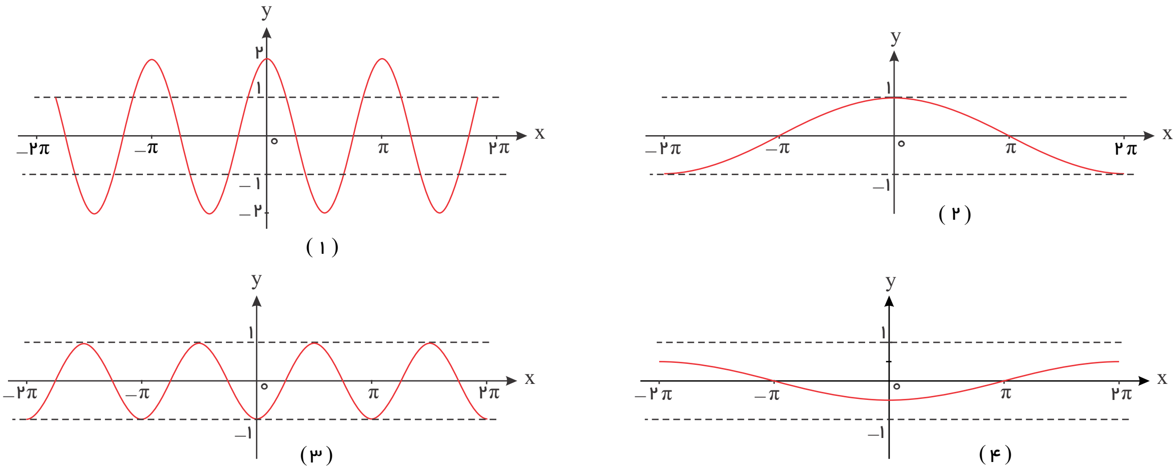
تمرین های کتاب- ۲۰




| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $-۴$ | ۰ |
| $-۲$ | ۴ |
| ۰ | ۰ |
| ۲ | $-۲$ |
| ۴ | ۰ |

**۹** با استفاده از نمودار $y=\cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطهٔ هر نمودار را مشخص کنید.

تمرین های کتاب- ۲۳



الف) $y=-\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$ ب) $y=۲\cos ۲x$ پ) $y=\cos(\frac{۱}{۲}x)$ ت) $y=-\cos ۲x$

**۱۰** نمودار توابع $y=-\sin ۲x-۱$ و $y=۲\sin(\frac{-۱}{۳}x)$ را به کمک نمودار $y=\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم کنید.

تمرین های کتاب- ۲۳

**۱۱** نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

تمرین های کتاب- ۹

**الف**

$$f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{3}) \qquad D_f=[0,2\pi]$$

تمرین های کتاب- ۹

**ب**

$$g(x)=x+|x|$$

تمرین های کتاب- ۹

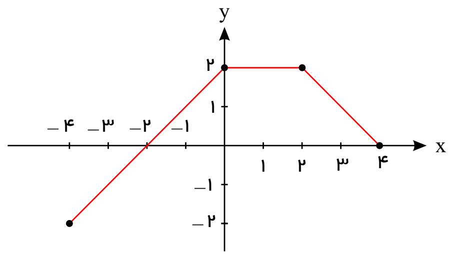
**پ**

$$t(x)=-x^3-1$$

تمرین های کتاب- ۹

**۱۲** با استفاده از نمودار تابع $f$، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.

تمرین های کتاب- ۲۳




**الف**

$$y=\frac{1}{2}f(2x)-1$$

تمرین های کتاب- ۲۳

**ب**

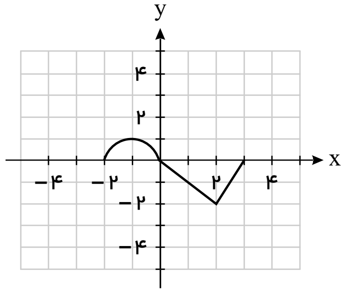
$$y=2f(x-1)-3$$

تمرین های کتاب- ۲۳

**۱۳** نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

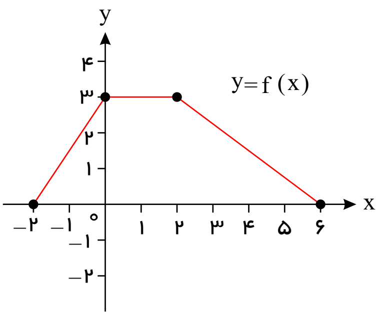
الف) نمودار تابع $y=3f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنید.

ب) دامنهٔ تابع $y=3f(\frac{1}{2}x)$ را تعیین کنید.



**۱۴** نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

نمودار تابع $y=\frac{1}{3}f(2x)$ را رسم کنید.




**۱۵** درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

الف دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ همان دامنهٔ تابع $y=f(x)$ است. سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

**۱۶** درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. سوال های امتحانی- ۱۴۰۰

الف دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ همان دامنهٔ تابع $y=f(x)$ است. سوال های امتحانی- ۱۴۰۰

ض تابع $y=-x^3+2$ در دامنهٔ تعریفش صعودی است. سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

**۱۸** درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

الف تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود. سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

**۱۹** در جاهای خالی گزینهٔ مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید. سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

الف) تابع $y=(x+۱)^۳$ در دامنهٔ تعریف خود ................. (صعودی، نزولی) است.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

۲۰) در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

الف) تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع ................. نامیده می‌شود.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

۲۱) تابع $y=x^۲|x|$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ نزولی است، حداکثر مقدار $a$ چقدر است؟ تمرین های کتاب- ۱۰

۲۲) نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع، صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

تمرین های کتاب- ۱۰

$$f(x)=\begin{cases}-۲x-۳ & x<-۴\\ ۳ & -۴\leq x<۲\\ ۳x-۲ & x\geq ۲\end{cases}$$

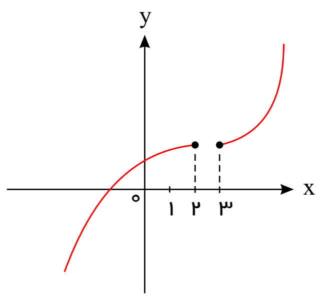
۲۳) تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً نزولی باشد.

تمرین های کتاب- ۱۰

۲۴) هرکدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

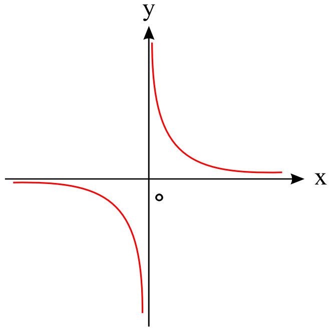
تمرین های کتاب- ۸

الف) تمرین های کتاب- ۸



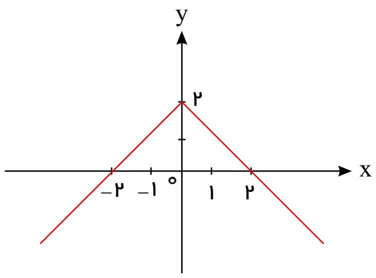
ب

تمرین های کتاب- ۸



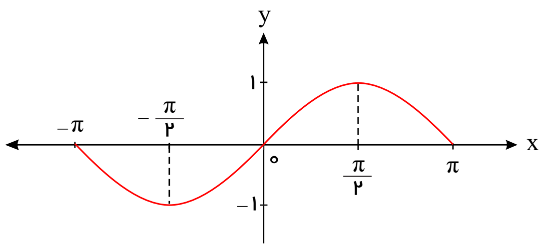

پ

تمرین های کتاب- ۸




ت

تمرین های کتاب- ۸




**۲۵) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.** سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

**الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است.** سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

**۲۶) در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.** سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

**الف) توابع اکیداً یکنوا، همواره ................. هستند.** سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

**۲۷) در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.** سوال های امتحانی- ۱۴۰۰

**الف) در بازهٔ (۰, ۱)، نمودار تابع $y=x^3$، ................. نمودار تابع $y=x^2$ قرار دارد.**

سوال های امتحانی- ۱۴۰۰

تابع نهایی دوازدهم و تمرین کتاب

# ترکیب توابع و دامنه ترکیب توابع

۲۸ اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۲x^۲-۱$ باشد، دامنهٔ تابع $fog(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.
سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

۲۹ دو تابع $f(x)=\sqrt{x-۴}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ تابع $gof$ را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.
سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

۳۰ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.
سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

الف تابع $h(x)=(۲x^۲-۵x+۱)^۳$ به‌صورت ترکیب دو تابع $f(x)=۲x^۲-۵x+۱$ و $g(x)=\cdots\cdots$ است.
سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

۳۱ اگر $f(x)=x^۲-۵$ و $g(x)=\sqrt{x+۶}$ باشد.
سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

الف دامنهٔ تابع $fog$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.
سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

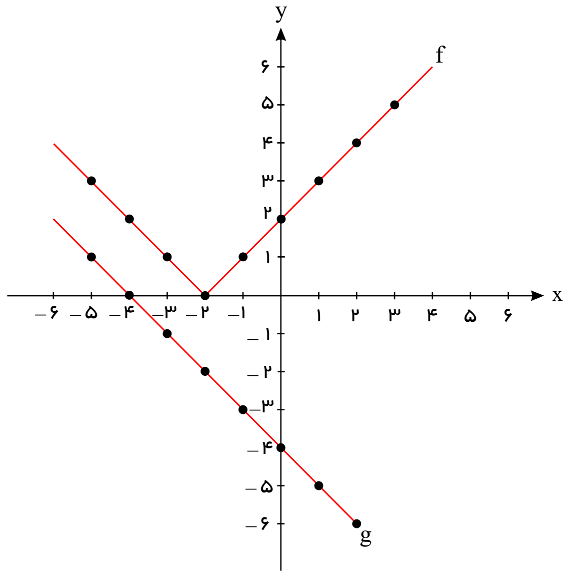
۳۲ اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳}{x}$، دامنه و ضابطهٔ توابع $fog$ و $fof$ را به‌دست آورید.
تمرین های کتاب- ۱۴

۳۳ اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$، توابع $fog$ و $gof$ را به‌دست آورید.
تمرین های کتاب- ۲۲

۳۴ اگر $f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴$ و $f(x)=۳x-۴$، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به‌دست آورید.
تمرین های کتاب- ۲۲

**۳۵** با توجه به نمودارهای توابع $f$ و $g$، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

تمرین های کتاب- ۲۳




الف) $(fog)(-۱)$

ب) $(gof)(۰)$

پ) $(fog)(۱)$

ت) $(gof)(-۱)$

**۳۶** موارد خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

تمرین های کتاب- ۲۲

**الف**

$$f(x)=\sqrt{۲x-۳}\quad ;\ g(x)=\frac{۶}{۳x-۵}\qquad : D_{fog},(fog)(x)$$

تمرین های کتاب- ۲۲

**ب**

$$f(x)=\sqrt{x+۲}\quad ;\ g(x)=\sqrt{x^{۲}-۱۶}\quad :\ D_{gof},(gof)(x)$$

تمرین های کتاب- ۲۲

**پ**

$$f(x)=\sin x\quad ;\ g(x)=\sqrt{x}\quad :\ D_{gof},(gof)(x)$$

تمرین های کتاب- ۲۲

**۳۷** اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۲x^{۲}-۱$ باشد،

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

**الف** دامنهٔ تابع $fog$ را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

**ب** ضابطهٔ تابع، $fog$ را بنویسید. سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

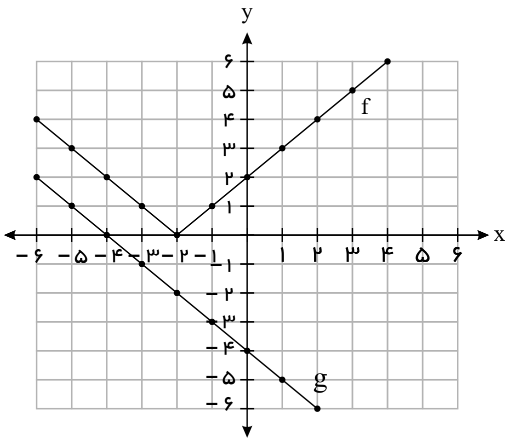
**۳۸** اگر $f(g(x)) = ۳x^۲ - ۶x + ۱۴$ و $f(x) = ۳x - ۴$ ضابطه تابع $g(x)$ را به‌دست آورید.
سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

**۳۹** اگر $f(x) = \sqrt{۴ - ۲x}$ و $g(x) = x^۲ + ۲x - ۱$ باشد، سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

**الف** دامنهٔ تابع $gof$ را با استفاده از تعریف به‌دست آورید. سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

**ب** مقدار $\frac{f}{g}(۰) - gof(۲)$ را تعیین کنید. سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

**۴۰** با توجه به نمودارهای تابع $f$ و $g$ به سؤالات زیر پاسخ دهید: سوال های امتحانی- ۱۴۰۰




**الف** مقدار $fog(-۱)$ را محاسبه کنید. سوال های امتحانی- ۱۴۰۰

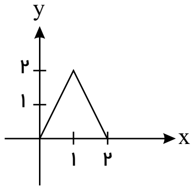
**ب** اگر $g(۳t - ۱) = ۰$ آنگاه مقدار $t$ را به دست آورید. سوال های امتحانی- ۱۴۰۰

**پ** با محدود کردن دامنهٔ $f$، بازه‌ای را مشخص کنید که تابع $f$ یک به یک شود. سوال های امتحانی- ۱۴۰۰

## مسائل مربوط به f(x)

(۴۱) نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر است. با استفاده از آن نمودار $y=-۲f(\frac{۱}{۳}x)$ را رسم کنید.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۸




## تابع وارون (معکوس)

(۴۲) الف) توابع $f(x)=\frac{x+۳}{۲x}$ و $g(x)=۳x-۱$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ $fog$ را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

ب) اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^۳$ باشد. مقدار $g^{-۱}of^{-۱}(۵)$ را به‌دست آورید.

(۴۳) اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^۳$ باشد، مقدار $g^{-۱}of^{-۱}(۵)$ را به‌دست آورید.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

(۴۴) نشان دهید توابع $f(x)=۳x-۴$ و $g(x)=\frac{x+۴}{۳}$ وارون یکدیگرند.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

با محدود کردن دامنهٔ تابع $f$ تابعی وارون‌پذیر بسازید.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

(۴۶) درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

الف دو تابع $f(x)=-\frac{۲x+۶}{۷}$ و $g(x)=\frac{-۷}{۲}x-۳$ وارون یکدیگرند.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

**۴۷** با محدود کردن دامنهٔ تابع $f(x) = x^{۲} - ۴x + ۵$، یک تابع یک‌به‌یک به‌دست آورده و دامنه و برد $f$ و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

تمرین های کتاب- ۲۹

**۴۸** ضابطهٔ تابع وارون توابع یک به یک زیر را به‌دست آورید.

تمرین های کتاب- ۲۹

الف) $f(x) = \dfrac{-۸x + ۳}{۲}$

ب) $g(x) = -۵ - \sqrt{۳x + ۱}$

**۴۹** در مورد هریک از قسمت‌های زیر نشان دهید که $f$ و $g$ وارون یکدیگرند.

تمرین های کتاب- ۲۹

الف) $f(x) = \dfrac{-۷}{۲}x - ۳ \quad , \quad g(x) = -\dfrac{۲x + ۶}{۷}$

ب) $f(x) = -\sqrt{x - ۸} \quad , \quad g(x) = ۸ + x^{۲} \; ; \; x \leq ۰$

**۵۰** رابطهٔ بین درجهٔ سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به صورت $f(x) = \dfrac{۹}{۵}x + ۳۲$ است که در آن $x$ میزان درجهٔ سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجهٔ فارنهایت است. $f^{-۱}(x)$ را به‌دست آورده و توضیح دهد چه چیزی را نشان می‌دهد.

تمرین های کتاب- ۲۹

**۵۱** اگر $f(x) = \dfrac{۱}{۸}x - ۳$ و $g(x) = x^{۳}$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

تمرین های کتاب- ۲۹

الف) $(fog)^{-۱}(۵)$ ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)$ پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)$

**۵۲** ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

تمرین های کتاب- ۲۷

**الف**

$g(x) = ۱ + \sqrt{x - ۲}$

تمرین های کتاب- ۲۷

ب

$h(x) = x^{۲} + ۱$

تمرین های کتاب- ۲۷

**۵۳** توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. با محدود کردن دامنهٔ آن‌ها به دو روش متفاوت توابعی یک‌به‌یک بسازید.

تمرین های کتاب- ۲۹

الف

$f(x) = |x|$

تمرین های کتاب- ۲۹

ب

$g(x) = -x^{۲}$

تمرین های کتاب- ۲۹

پ

$h(x) = x^{۲} + ۴x + ۳$

تمرین های کتاب- ۲۹

**۵۴** ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = -\frac{۷}{۲}x - ۳$ را به‌دست آورید.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

در تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - a$، باقیمانده برابر $p(a)$ است.

سوال های امتحانی- ۱۴۰۰

اگر تابع $f$ در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f$ در $a$، ................. است.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

اگر $h(x) = ۳x^{۴} + ۲x^{۲} - ۱$ باشد، آنگاه $h''(۱)$ برابر ................. است.

سوال های امتحانی- ۱۴۰۰

## تابع وارون (معکوس)

**۵۹** ضابطهٔ وارون تابع $g(x) = -۵ - \sqrt{۳x + ۱}$ را به دست آورید.

سوال های امتحانی- ۱۴۰۰

حد تابع $g(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{x} & x > ۰ \\ \dfrac{۵x^۲ - ۳x}{-x^۲ + ۱} & x \leq ۰ \end{cases}$ وقتی $x \to -\infty$ برابر ................. است.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

اگر $f'(۲) = ۳$ و $g'(۲) = ۵$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $(۲g - f)'(۲)$ برابر ................. است.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطهٔ $x = ۰$ مشتق پذیر است.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

اگر تابع $f$ در $x = a$ پیوسته باشد، آنگاه $f$ در $a$ مشتق‌پذیر است.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

تابع $f(x) = x^۳ - ۳x$ در بازهٔ $(-۱, ۱)$ اکیداً صعودی است.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

چند جمله‌ای $f(x) = ۲x^۳ + ۵x^۲ - ۳x - ۱۰$ بر دو جمله‌ای $x + ۲$ بخش‌پذیر است.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

# پاسخ‌نامه تشریحی

۱ بیایید در هر حالت حساب کنیم و ببینیم که الناز چقدر می‌تواند تخفیف بگیرد:

$$\text{انتخاب اول}: \xrightarrow[\text{برای ۲ میلیون تومان}]{\text{ابتدا تخفیف ۲۰ درصدی}} \text{مقدار تخفیف} = \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۲{,}۰۰۰{,}۰۰۰ = \underbrace{۴۰۰{,}۰۰۰}_{\text{باقی‌مانده: ۱,۶۰۰,۰۰۰ تومان}}$$

$$\xrightarrow[\text{برای باقی‌مانده ۲ میلیون تومان}]{\text{سپس تخفیف ۲۰۰ هزار تومانی}} ۱{,}۶۰۰{,}۰۰۰ - ۲۰۰{,}۰۰۰ = ۱{,}۴۰۰{,}۰۰۰ \ \text{تومان}$$

پس در انتخاب اول، الناز باید یک میلیون و چهارصد هزار تومان پرداخت کند.

$$\text{انتخاب دوم}: \xrightarrow[\text{برای ۲ میلیون تومان}]{\text{ابتدا تخفیف ۲۰۰ هزار تومانی}} ۲{,}۰۰۰{,}۰۰۰ - ۲۰۰{,}۰۰۰ = ۱{,}۸۰۰{,}۰۰۰$$

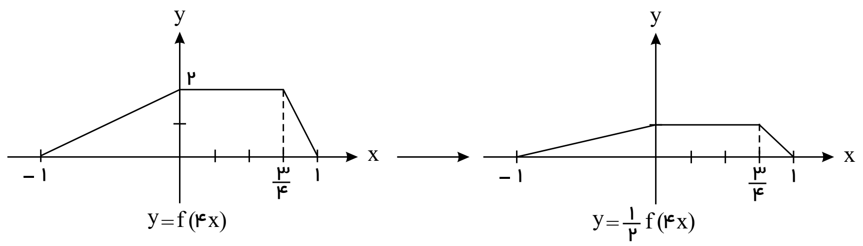
$$\xrightarrow[\text{برای باقی‌مانده}]{\text{سپس تخفیف ۲۰ درصدی}} \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۱{,}۸۰۰{,}۰۰۰ = \underbrace{۳۶۰{,}۰۰۰}_{\text{مقدار تخفیف}} \rightarrow \text{مقدار پرداختی} = ۱{,}۸۰۰{,}۰۰۰ - ۳۶۰{,}۰۰۰ = ۱{,}۴۴۰{,}۰۰۰$$

یعنی در انتخاب دوم، الناز باید یک میلیون و چهارصد و چهل هزار تومان پرداخت کند. پس معلوم شد که انتخاب اول معقول‌تر است.

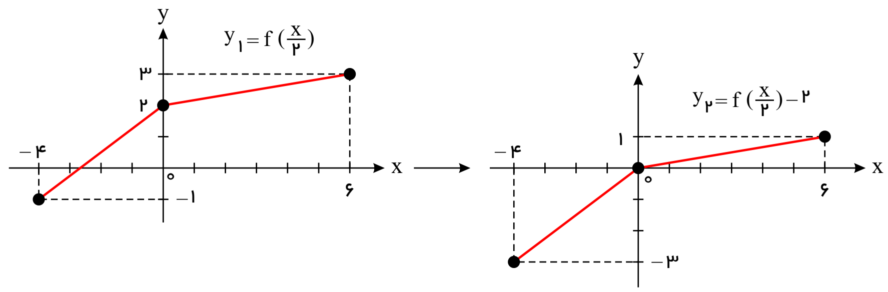
۲

الف درست

۳ کافی است طول نقاط را $\frac{۱}{۴}$ برابر کرده و سپس عرض نقاط را نصف کنیم.

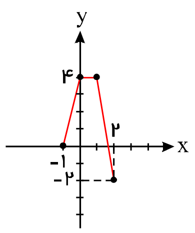



۴ کافی است که طول نقاط را دو برابر کرده و سپس شکل را دو واحد به پایین منتقل کنیم.




۵

برای رسم ابتدا منحنی $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس برد آن را دو برابر می‌کنیم.




$D_g = [-۱, ۲]$

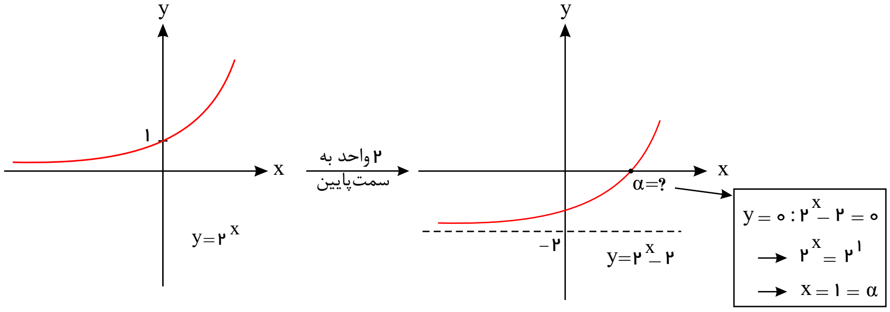
$R_g = [-۲, ۴]$

۶

الف نادرست

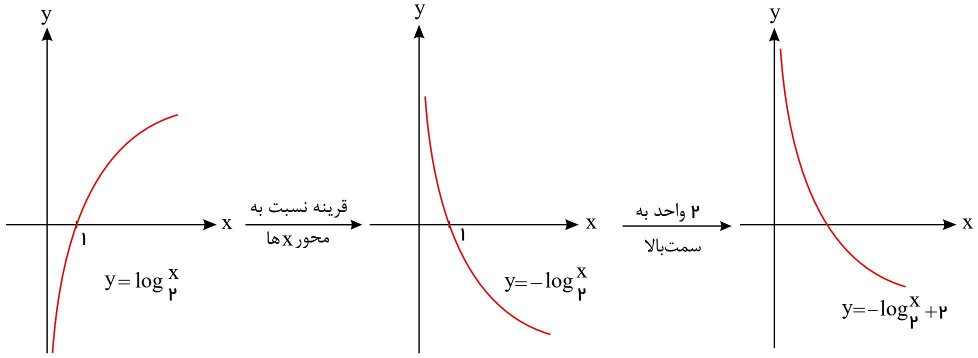
علت: برد تابع $y=kf(x)$، $k$ برابر برد تابع $y=f(x)$ است.

۷ برای رسم تابع نمایی $y = ۲^x - ۲$، با توجه به نمودار پایهٔ $y = ۲^x$ (که حالت کلی آن $y = a^x$ برای $a > ۱$ می‌باشد) داریم:




می‌بینیم که تابع $y = ۲^x - ۲$ در دامنهٔ خود $(D = \mathbb{R})$ همواره صعودی (اکیداً صعودی) است.

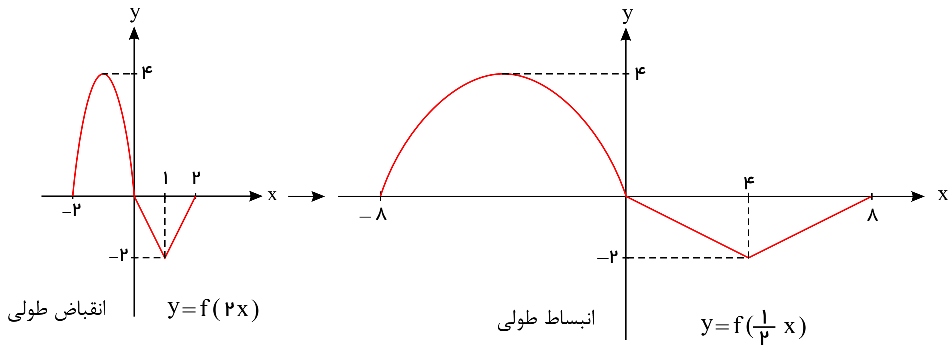
و اما برای رسم تابع لگاریتمی $y = -\log_۲^x + ۲$، داریم:




برای یافتن $\alpha$ معادلهٔ $y = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$-\log_۲^x + ۲ = ۰ \to \log_۲^x = ۲ \longrightarrow x = ۲^۲ = ۴$$

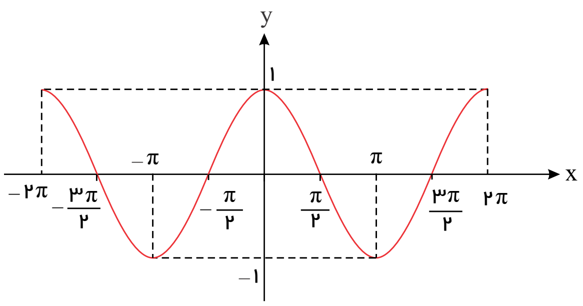
۸ باید بدانیم که برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ از روی نمودار $y = f(x)$ کافی است طول هر نقطه از $f(x)$ را $\frac{۱}{k}$ برابر کرده و عرض آن‌ها را ثابت نگه داریم. به همین مناسبت می‌توانیم بگوییم که نمودار تابع $y = f(x)$، برای $k$های بزرگتر از یک $(k > ۱)$ با ضریب $\frac{۱}{k}$ منقبض (بسته‌تر) و برای $k$های بین ۰ و ۱ $(۰ < k < ۱)$ با ضریب $\frac{۱}{k}$ منبسط (یا بازتر) می‌شود.




$D = [-۲, ۲]$ , $R = [-۲, ۴]$

$D = [-۸, ۸]$ , $R = [-۲, ۴]$

۹ ابتدا به نمودار تابع $y = \cos x$ در بازهٔ $[-۲\pi, ۲\pi]$ توجه کنید:



با توجه به این نمودار و دورهٔ تناوب هر تابع و نیز برد آن‌ها به راحتی می‌توانیم تشخیص دهیم که نمودار (۴) مربوط به تابع (الف)، نمودار (۱) مربوط به تابع (ب)، نمودار (۲) متعلق به تابع (پ) و

بالاخره نمودار (۳) متعلق به تابع (ت) می‌باشد.

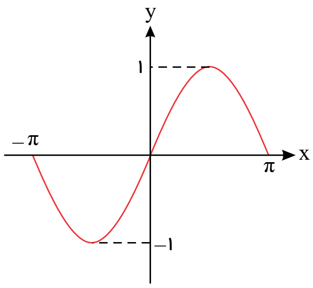
الف) طول هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ را $-۲$ برابر و عرض آن‌ها را $\frac{-۱}{۲}$ برابرمی‌کنیم. $\to y=-\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$

ب) طول هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ را $\frac{۱}{۲}$ برابر و عرض آن‌ها را ۲ برابر می‌کنیم. $\to y=۲\cos ۲x$

پ) با ثابت ماندن عرض هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ باید طول هریک را ۲ برابر کرد. $\to y=\cos(\frac{۱}{۲}x)$

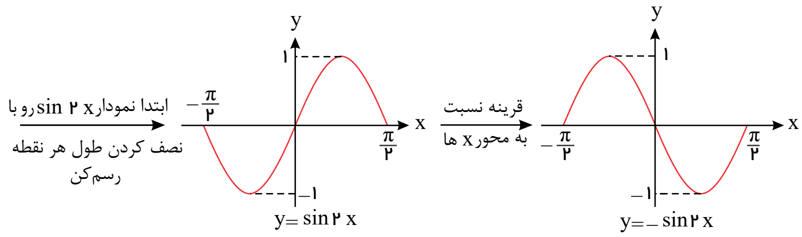
ت) طول هر نقطه را نصف و عرض را قرینه می‌کنیم. $\to y=-\cos ۲x$

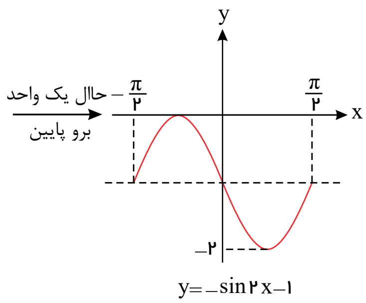
۱۰ نمودار تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ به‌صورت



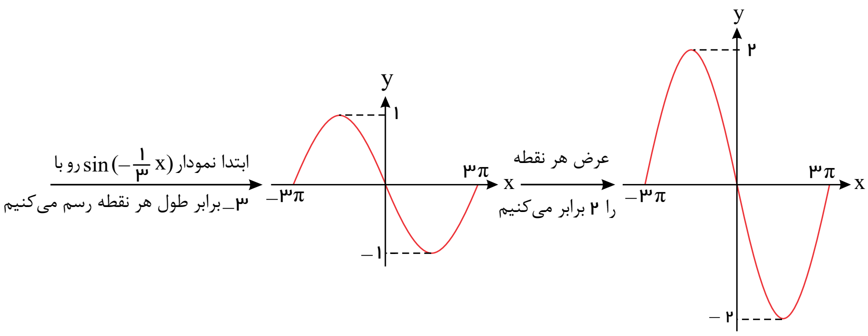

بوده و به کمک انتقال نمودارها داریم:

$y=-\sin ۲x-۱$ :



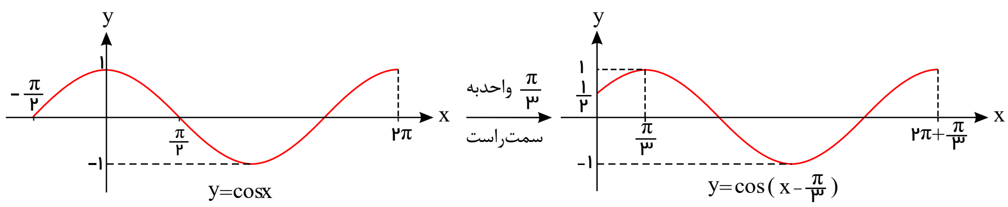




$y=۲\sin(\frac{-۱}{۳}x)$ :




۱۱

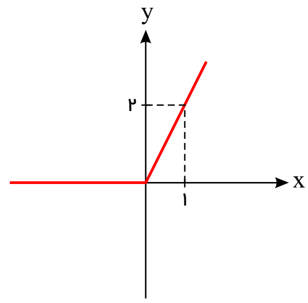
الف برای رسم نمودار $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{۳})$ در فاصلهٔ $D_f=[۰,۲\pi]$ کافی است نمودار $y=\cos x$ را در راستای محور طول‌ها به اندازهٔ $\frac{\pi}{۳}$ به سمت راست انتقال دهیم:




به جای اینکه نمودار را $\frac{\pi}{۳}$ واحد به راست ببرید می‌توان محور $y$ را به همین اندازه به سمت چپ کشید!

ب برای رسم تابع $g$ ابتدا با توجه به مفهوم قدر مطلق، تابع را به صورت دو ضابطه‌ای تبدیل کرده و رسم می‌کنیم:

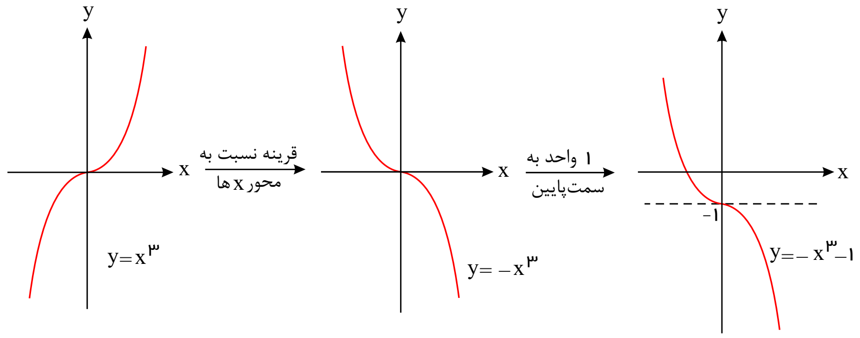
$$g(x) = x + |x| = \begin{cases} x + x = 2x \ ; \ x \geq 0 \\ x - x = 0 \ \ ; \ x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حالا رسم کن}}$$




از این نمودار پیداست که تابع $g$ برای $x \leq 0$ ثابت و برای $x \geq 0$ صعودی اکید و در کل صعودی است.

**پ**

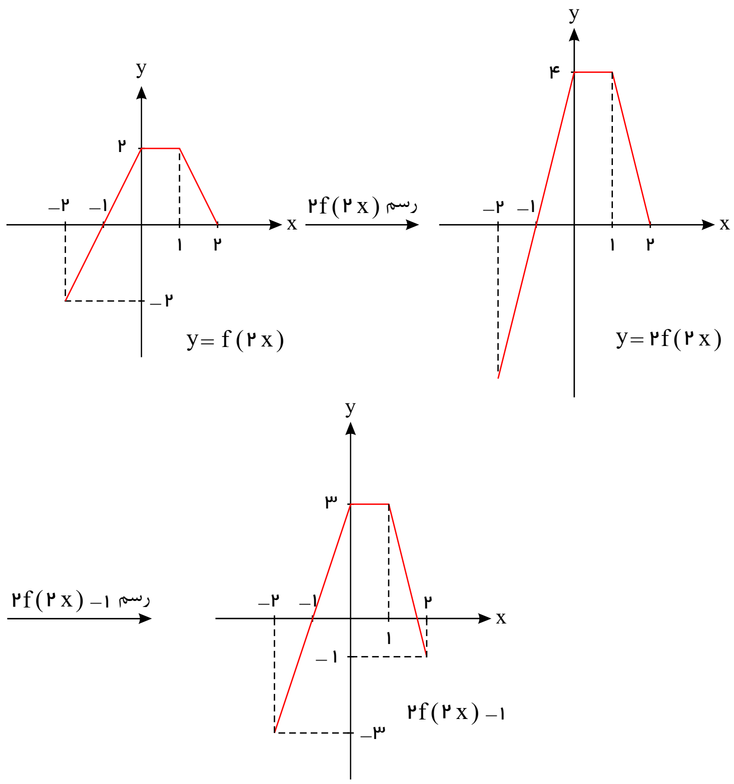
نمودار تابع $t(x) = -x^3 - 1$ را به کمک انتقال نمودار پایهٔ $y = x^3$ مطابق مکانیسم زیر رسم کرده و از آن نتیجه می‌گیریم که تابع روی $D_t = \mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.



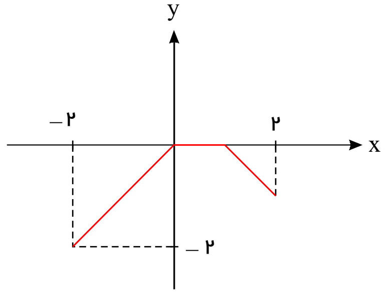

**۱۲**

**الف**

نمودار تابع $f(x)$ را داریم و می‌خواهیم به کمک انتقال نمودارها، نمودارهای توابع داده شده را نیز ترسیم کنیم:

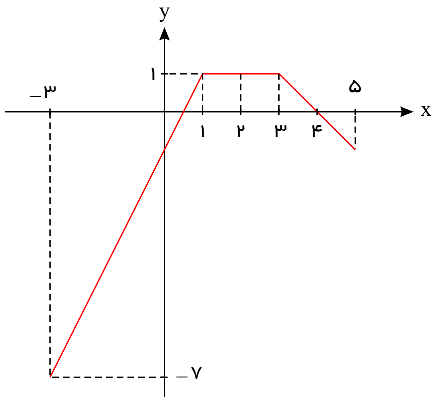



برای رسم نمودار $y = \frac{1}{2}f(2x) - 1$ نیز کافی است ابتدا در نمودار $f(2x)$ با ثابت ماندن عرض نقاط، طول آن‌ها را نصف کنیم و سپس در نمودار حاصل، با ثابت ماندن طول هر نقطه، عرض آن‌ها را نصف کنیم تا نمودار $\frac{1}{2}f(2x)$ به‌دست آید. حال اگر این نمودار را یک واحد به پایین ببریم (انگار که محور $x$ها را یک واحد به بالا کشیده باشیم!) به نمودار مطلوب می‌رسیم. اگر این روند را به درستی انجام دهیم به این نمودار خواهیم رسید:



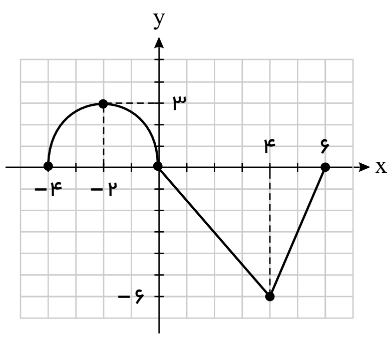

$y = \frac{1}{2} f(2x) - 1$

**ب** برای رسم نمودار $y = 2f(x-1) - 3$ ابتدا نمودار $f(x)$ را یک واحد به راست می‌بریم تا به نمودار $f(x-1)$ برسیم. حال اگر با ثابت ماندن طول نقاط این نمودار، عرض هرکدام را ۲ برابر کنیم نمودار $2f(x-1)$ پدید می‌آید که با انتقال آن به اندازهٔ ۳ واحد به پایین به نمودار مورد نظر خواهیم رسید. با رعایت این مکانیسم به نمودار زیر می‌رسیم:




$y = 2f(1-x) - 3$

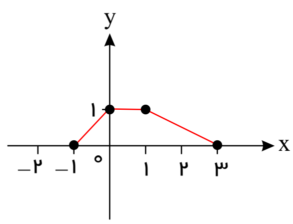
**۱۳** الف) کافی است طول‌ها را دو برابر کرده و سپس عرض‌ها را سه برابر کنیم.




ب) دامنهٔ این تابع $[-4, 6]$ است.

**۱۴**

کافی است که طول‌ها را نصف کرده و سپس عرض‌ها را $\frac{1}{3}$ برابر کنیم.




**۱۵**

**الف** درست

**۱۶**

**الف** درست

**ض** نادرست

**۱۸**

**الف** درست

۱۹

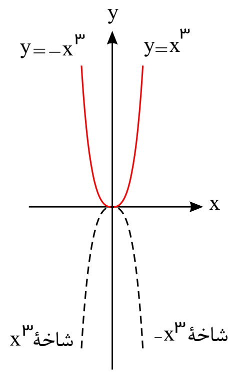
الف تابع $y=(x+1)^3$ در دامنهٔ تعریف خود صعودی است.

۲۰

الف ثابت

۲۱ برای اینکه بیابیم تابع در چه فاصله‌ای نزولی است، پیشنهاد می‌کنیم نمودار آن را رسم کنید. (اساساً این شعار من است که: همه چیز در نمودار نمود پیدا می‌کند!) با توجه به وجود قدر مطلق و مفهوم آن تابع را دو ضابطه‌ای می‌کنیم:

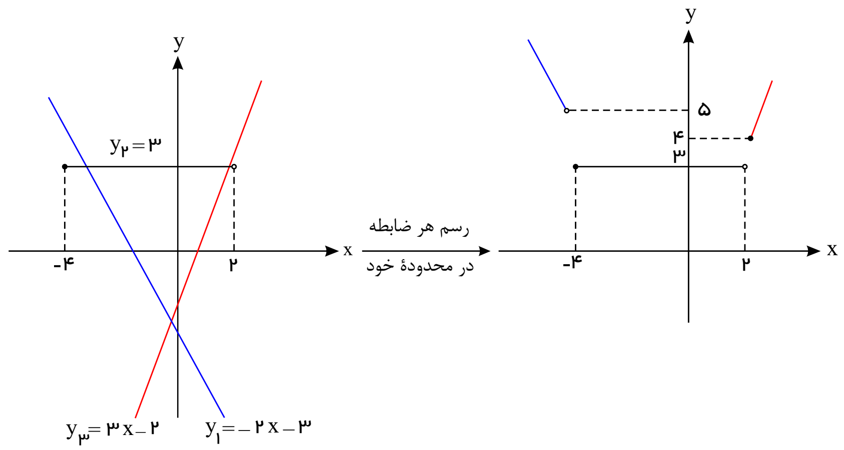
$$y=x^2|x|=\begin{cases}x^3 & x\geq 0\\ -x^3 & x<0\end{cases}\xrightarrow{\text{حالا رسم کن}}$$




حالا دیگر معلوم شد که تابع در فاصلهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است که با مقایسهٔ نزولی بودن تابع در بازهٔ $(-\infty,a]$ مشخص می‌شود که باید $a=0$ باشد.

دقت کنید که تابع $y=x^2|x|$ علی‌رغم شبیه بودن نمودار آن به $y=x^2$، با این تابع یکی نیست!

۲۲ رسم نمودار تابع $f$ به آسانی قابل درک است. چرا که در هر مرحله با یک تابع خطی روبرو هستیم:




می‌بینیم که این نمودار در بازهٔ $(-\infty,-4)$ اکیداً نزولی، در بازهٔ $[-4,2)$ ثابت (که می‌توان آن را صعودی یا نزولی هم در نظر گرفت) و بالاخره در فاصلهٔ $[2,+\infty)$ اکیداً صعودی است. براین اساس می‌توانیم ادعا کنیم که این تابع در فاصلهٔ $(-\infty,2)$ نزولی و در فاصلهٔ $[-4,+\infty)$ صعودی است.

۲۳ هر تابع به فرم کلی $y=x^{2n+1}+b$ روی دامنهٔ خود (یعنی $D_f=\mathbb{R}$) اکیداً صعودی و هر تابع به فرم کلی $y=-x^{2n+1}+b$ روی دامنهٔ خود اکیداً نزولی است. مثلاً تابع‌های $y=x^3$، $y=x^3-1$ و $y=2x^3+3$ همگی صعودی اکید و تابع‌های $y=-x^3$، $y=-2x^3+1$ و $y=5-\frac{1}{2}x^3$ همگی نزولی اکید هستند. حتی می‌توان موضوع را ساده‌تر هم بیان کرد. هر تابع خطی به صورت $f(x)=ax+b$ با شرط $a>0$ صعودی اکید و با شرط $a<0$ نزولی اکید می‌باشد.

۲۴

الف در بازه‌های $(-\infty,2]$ و $[3,+\infty)$ که به معنای $\mathbb{R}-(2,3)$ است اکیداً صعودی است.

ب این تابع که می‌تواند متعلق به تابع گویای $y=\frac{1}{x}$ باشد نکته بسیار جالبی را در خود نهفته دارد و آن اینکه تابع در هرکدام از فاصله‌های $(0,+\infty)$ و $(-\infty,0)$ نزولی اکید بوده در حالی که روی هر بازه‌ای که شامل $x=0$ (ریشهٔ مخرج) باشد غیر یکنواست (نه صعودی و نه نزولی).

پ این تابع نیز با دامنهٔ $\mathbb{R}$ روی فاصلهٔ $(-\infty,0]$ صعودی اکید و روی فاصلهٔ $[0,+\infty)$ نزولی اکید است. این بدان معناست که تابع روی دامنهٔ خود غیر یکنواست.

ت این نمودار که متعلق به تابع مثلثاتی $y=\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ می‌باشد، در فاصله‌های $[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{\pi}{2},\pi]$ نزولی اکید و در فاصلهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ صعودی اکید است. یعنی تابع روی $[-\pi,\pi]$ غیر یکنواست.

۲۵

الف درست

۲۶

الف یک به یک

۲۷

الف پایین

۲۸

$f(x)=\sqrt{x-۱}\rightarrow D_f : x-۱\geq ۰\rightarrow x\geq ۱$

$g(x)=۲x^۲-۱\rightarrow D_g=\mathbb{R}$

$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x|x\in\mathbb{R}, ۲x^۲-۱\geq ۱\}=\{x|x\in\mathbb{R}, ۲x^۲\geq ۲\}=\{x|x\in\mathbb{R}, x^۲\geq ۱\}$

$=x\geq ۱$ یا $x\leq -۱=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$

۲۹

$f(x)=\sqrt{x-۴}\rightarrow D_f : x-۴\geq ۰\rightarrow x\geq ۴$

$g(x)=\dfrac{۱}{x^۲-۱}\rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$

$D_{gof}=\{x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}=\{x\geq ۴\ ,\ \sqrt{x-۴}\neq\pm ۱\}=\{x\geq ۴\ ,\ x\neq ۵\}=[۴,۵)\cup(۵,+\infty)$

۳۰

الف

$g(x)=x^۳$

علت : $gof(x)=g(f(x))=(۲x^۲-۵x+۱)^۳$

۳۱

الف

$f(x)=x^۲-۵\rightarrow D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=\sqrt{x+۶}\rightarrow D_g : x\geq -۶$

$D_{fog}=\{x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}=\{x\geq -۶\ ,\ \sqrt{x+۶}\in\mathbb{R}\}=[-۶,+\infty)$

۳۲ با توجه به ضابطه‌های $f(x)=\dfrac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\dfrac{۳}{x}$، برای تعیین ضابطهٔ توابع مرکب $fog$ و $fof$ داریم:

$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{۳}{x})\xrightarrow[\frac{۳}{x}\text{ قرارمی‌دهیم}]{\text{به جای } x \text{ های } f}\frac{۲}{\frac{۳}{x}-۱}=\frac{۲}{\frac{۳-x}{x}}=\frac{۲x}{۳-x}$$

البته دقت کنید که برای تعیین دامنهٔ این تابع در مرحلهٔ $\dfrac{۲}{\frac{۳-x}{x}}$ تأمل کرده و ریشه‌های مخرج‌ها (یعنی $x=۰$ و $x=۳$) را از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم. $D_{fog}=\mathbb{R}-\{۰,۳\}$

$$fof(x)=f(f(x))=f(\frac{۲}{x-۱})\xrightarrow[\frac{۲}{x-۱}\text{ قرار بده}]{\text{به جای } x \text{ های } f}\frac{۲}{\frac{۲}{x-۱}-۱}=\frac{۲}{\frac{۳-x}{x-۱}}=\frac{۲x-۲}{۳-x}$$

برای تعیین دامنهٔ این تابع نیز با توجه به مرحلهٔ ساده نشدهٔ $\dfrac{۲}{\frac{۳-x}{x-۱}}$، می‌بایستی ریشه‌های مخرج (یعنی $x=۳$ و $x=۱$) را از $\mathbb{R}$ برداریم. لذا: $D_{fof}=\mathbb{R}-\{۱,۳\}$

۳۳ با توجه به این نکته که «در $fog(a)$ ابتدا $a$ وارد ماشین $g$ شده و $g(a)$ بیرون می‌آید و سپس $g(a)$ وارد ماشین $f$ شده و $fog(a)$ بیرون می‌آید» داریم:

$$\begin{cases} f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}\\ g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}\end{cases}$$

$$\to \begin{cases} fog=?\begin{cases} ۵\xrightarrow{g}۷\xrightarrow{f}۸ : fog(۵)=۸ \\ ۳\xrightarrow{g}۵\xrightarrow{f}۳ : fog(۳)=۳ \\ ۷\xrightarrow{g}۹\xrightarrow{f}۸ : fog(۷)=۸ \\ ۹\xrightarrow{g}۱۱\xrightarrow{f}۴ : fog(۹)=۴ \end{cases} =\{(۵,۸),(۳,۳),(۷,۸),(۹,۴)\} \\ gof=?\begin{cases} ۷\xrightarrow{f}۸\xrightarrow{g}\times \\ ۵\xrightarrow{f}۳\xrightarrow{g}۵ : gof(۵)=۵ \\ ۹\xrightarrow{f}۸\xrightarrow{g}\times \\ ۱۱\xrightarrow{f}۴\xrightarrow{g}\times \end{cases} =\{(۵,۵)\} \end{cases}$$

**۳۴** خیلی ساده است: ببینید:

$$\begin{cases} f(x)=۳x-۴ \\ f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴ \end{cases} \to ۳g(x)-۴=۳x^۲-۶x+۱۴$$

$$\xrightarrow{+۴} ۳g(x)=۳x^۲-۶x+۱۸ \xrightarrow{\div ۳} g(x)=x^۲-۲x+۶$$

**۳۵**

الف) $fog(-۱)=f(\underbrace{g(-۱)}_{(-۱,-۳)\in g})=\underbrace{f(-۳)}_{(-۳,۱)\in f}=۱$

ب) $gof(۰)=g(f(۰))\xrightarrow[f(۰)=۲]{(۰,۲)\in f} g(۲)\xrightarrow[g(۲)=-۶]{(۲,-۶)\in g}-۶$

پ) $fog(۱)=f(g(۱))\xrightarrow[g(۱)=-۵]{(۱,-۵)\in g} f(-۵)\xrightarrow[f(-۵)=۳]{(-۵,۳)\in f}۳$

ت) $gof(-۱)=g((f(-۱))\xrightarrow[f(-۱)=۱]{(-۱,۱)\in f} g(۱)\xrightarrow[g(۱)=-۵]{(۱,-۵)\in g}-۵$

بنابراین اگر نمودارهای $fog$ و $gof$ را داشته باشیم می‌توانیم ببینیم که نقاط $(-۱,۱)$ و $(۱,۳)$ روی نمودار $fog$ و نقاط $(۰,-۶)$ و $(-۱,-۵)$ روی نمودار $gof$ قرار دارند.

**۳۶**

**الف**

$$f(x)=\sqrt{۲x-۳}\ ,\ g(x)=\frac{۶}{۳x-۵}\to\begin{cases} D_f: ۲x-۳\geq ۰\to x\geq\frac{۳}{۲} \\ D_g: ۳x-۵\neq ۰\to x\neq\frac{۵}{۳}\end{cases}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}=\{x\neq\frac{۵}{۳}\ ,\ \frac{۶}{۳x-۵}\in D_f\}$$

$\frac{۶}{۳x-۵}\in D_f$ یعنی حل نامعادلهٔ $\frac{۶}{۳x-۵}\geq\frac{۳}{۲}$ که معادل $\frac{۶}{۳x-۵}-\frac{۳}{۲}\geq ۰$ یا $\frac{۲۷-۹x}{۶x-۱۰}\geq ۰$ می‌باشد که بعد از تعیین علامت به جواب $(\frac{۵}{۳},۳]$ می‌رسیم.

$$\to D_{fog}=\{x\neq\frac{۵}{۳}\ ,\ x\in(\frac{۵}{۳},۳]\}=(\frac{۵}{۳},۳]$$

$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{۶}{۳x-۵})=\sqrt{۲(\frac{۶}{۳x-۵})-۳}=\sqrt{\frac{۲۷-۹x}{۳x-۵}}$$

البته می‌توانستیم دامنهٔ $fog$ را بعد از تشکیل ضابطهٔ آن نیز به‌دست آوریم.

**ب**

$$f(x)=\sqrt{x+۲}\ ,\ g(x)=\sqrt{x^۲-۱۶}$$

$$D_f: x+۲\geq ۰\to x\geq -۲\ ,\ D_g: x^۲-۱۶\geq ۰\to |x|\geq ۴\to x\geq ۴ \text{ یا } x\leq -۴$$

$$gof(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x+۲})=\sqrt{(\sqrt{x+۲})^۲-۱۶}\ \overset{x\geq -۲ \text{ با فرض}}{=\!=\!=}\ \sqrt{x-۱۴}$$

$$\xrightarrow[\text{دامنهٔ } gof]{\text{برای تعیین}} x-۱۴\geq ۰\to x\geq ۱۴\xrightarrow[x\geq -۲]{\text{اعمال شرط}} x\geq ۱۴\to D_{gof}=[۱۴,+\infty)$$

**پ**

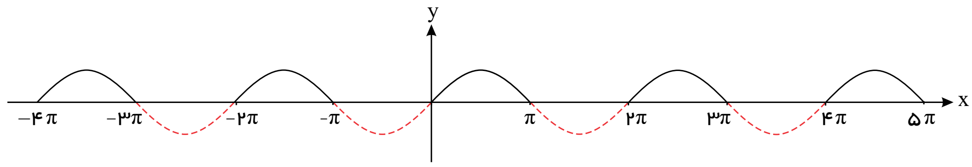
$$f(x)=\sin x\ ,\ g(x)=\sqrt{x}$$

$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=x\geq ۰\to D_{gof}=\{x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}$$

$=\{x\in\mathbb{R}\ ,\ \sin x\geq ۰\}=\{$تمام $x$ هایی که در نواحی ۱ و ۲ قرار می‌گیرند$\}$

$$\overset{\text{مانند}}{=\!=\!=}\cdots\cup[-۴\pi,-۳\pi]\cup[-۲\pi,-\pi]\cup[۰,\pi]\cup[۲\pi,۳\pi]\cup[۴\pi,۵\pi]\cup\cdots$$

برای درک بهتر موضوع با توجه به نمودار $y=\sin x$ بازه‌هایی که $\sin x$ نامنفی است را می‌توانیم ببینیم:




۳۷

الف

$f(x)=\sqrt{x-۱}\to D_f: x-۱\geq ۰\to x\geq ۱$

$g(x)=۲x^۲-۱\to D_g=\mathbb{R}$

$D_{fog}:\{x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}, ۲x^۲-۱\geq ۱\}=\{x\in\mathbb{R}, ۲x^۲\geq ۲\}=\{x\in\mathbb{R}, x^۲\geq ۱\}=\{x\in\mathbb{R}, x\geq ۱$ یا $x\leq -۱\}=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$

ب

$fog(x)=f(g(x))=\sqrt{۲x^۲-۱-۱}=\sqrt{۲x^۲-۲}$

۳۸

$f(x)=۳x-۴\to f(g(x))=۳g(x)-۴$

پس: $۳g(x)-۴=۳x^۲-۶x+۱۴\to ۳g(x)=۳x^۲-۶x+۱۸\to g(x)=x^۲-۲x+۶$

۳۹

الف

$f(x)=\sqrt{۴-۲x}\to D_f: ۴-۲x\geq ۰\to x\leq ۲$

$g(x)=x^۲+۲x-۱\to D_g=\mathbb{R}$

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\leq ۲ \mid \sqrt{۴-۲x}\in\mathbb{R}\}=x\leq ۲\to x\in(-\infty,۲]$

ب

$gof(۲)-\frac{f}{g}(۰)=g(f(۲))-\frac{f(۰)}{g(۰)}=g(۰)-\frac{f(۰)}{g(۰)}=-۱-\frac{۲}{-۱}=-۱+۲=۱$

۴۰

الف

$fog(-۱)=f(g(-۱))=f(-۳)=۱$

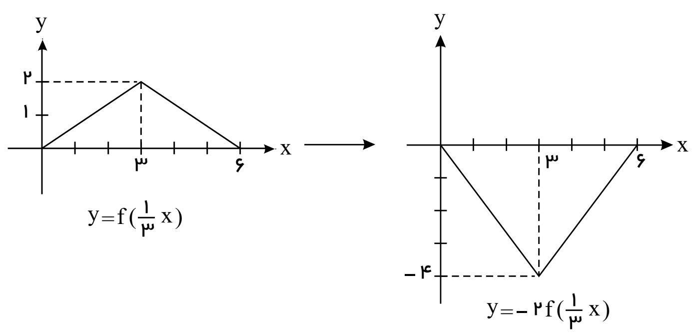
ب

$g(۳t-۱)=۰\xrightarrow{g(-۴)=۰}۳t-۱=-۴\to ۳t=-۳\to t=-۱$

پ

$x\leq -۲$

۴۱ ابتدا طول نقاط را ۳ برابر کرده و سپس عرض نقاط را ۲− برابر کنیم.




۴۲

الف)

$f(x)=\frac{x+۳}{۲x}\to D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

$g(x)=۳x-۱\to D_g=\mathbb{R}$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \,,\, g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \,,\, ۳x - ۱ \neq ۰\} = \{x \in \mathbb{R} \,,\, x \neq \frac{۱}{۳}\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{۱}{۳}\right\}$$

ب)

$$g^{-۱}of^{-۱}(۵) = g^{-۱}\left(f^{-۱}(۵)\right) = g^{-۱}(۶۴) = ۴$$

علت:

$$f^{-۱}(۵) \longrightarrow ۵ = \frac{۱}{۸}x - ۳ \longrightarrow \frac{۱}{۸}x = ۸ \longrightarrow x = ۶۴$$

$$g^{-۱}(۶۴) \longrightarrow ۶۴ = x^{۳} \longrightarrow x = ۴$$

(۴۳) می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد، آن‌گاه $f^{-۱}(b) = a$ است.

$$g^{-۱}of^{-۱}(۵) = g^{-۱}(f^{-۱}(۵)) = g^{-۱}(۶۴) = ۴$$

علت:
$$\begin{cases} f^{-۱}(۵) = \alpha \to f(\alpha) = ۵ \to \frac{۱}{۸}\alpha - ۳ = ۵ \to \frac{۱}{۸}\alpha = ۸ \to \alpha = ۶۴ \\ g^{-۱}(۶۴) = \beta \to g(\beta) = ۶۴ \to \beta^{۳} = ۶۴ \to \beta = ۴ \end{cases}$$

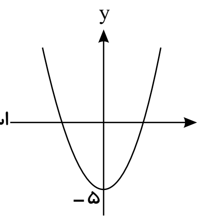
(۴۴) می‌دانیم که $fof^{-۱}(x) = x$ و $f^{-۱}of(x) = x$ است.

$$fog(x) = f(g(x)) = ۳(\frac{x+۴}{۳}) - ۴ = x + ۴ - ۴ = x$$

$$gof(x) = g(f(x)) = \frac{۳x - ۴ + ۴}{۳} = \frac{۳x}{۳} = x$$

بنابراین دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ وارون یکدیگرند.

در تابع ۵ $f(x) = x^{۲} - ۵$ که به شکل




است با انتخاب $x \geq ۰$ یا $x \leq ۰$ تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر می‌شود.

(۴۶)

درست

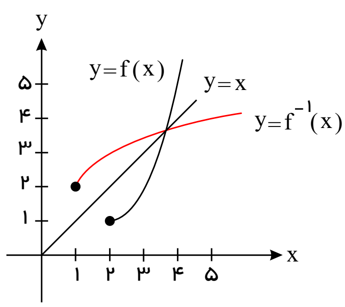
الف

$$y = -\frac{۲x+۶}{۷} \to ۷y = -۲x - ۶ \to ۲x = -۷y - ۶ \to x = -\frac{۷}{۲}y - ۳ \to f^{-۱}(x) = -\frac{۷}{۲}x - ۳$$

(۴۷) تابع ۵ $f(x) = x^{۲} - ۴x + ۵$ معرف سهمی $f(x) = (x-۲)^{۲} + ۱$ با محور تقارن $x_s = ۲$ می‌باشدکه غیر یک‌به‌یک و وارون‌ناپذیر است.

حال اگر دامنهٔ تابع را به یکی از فاصله‌های $[x_s, +\infty) = [۲, +\infty)$ یا $(-\infty, x_s] = (-\infty, ۲]$ محدود کنیم تابع $f$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر خواهد شد:

حالت اول:




$$\begin{cases} f(x) = (x-۲)^{۲} + ۱ \\ D_f = [۲, +\infty) \end{cases} \to y = (x-۲)^{۲} + ۱$$

$$\to (x-۲)^{۲} = y - ۱ \xrightarrow{\text{جذر}} |x-۲| = \sqrt{y-۱}$$

$$\xrightarrow[x-۲\geq ۰]{\text{با توجه به } D_f} x - ۲ = \sqrt{y-۱} \to x = \sqrt{y-۱} + ۲$$

$$\to f^{-۱}(x) = \sqrt{x-۱} + ۲$$

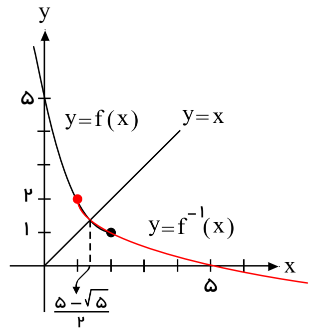
حالت دوم:

$$\begin{cases} f(x)=(x-2)^2+1 \\ D_f=(-\infty,2] \end{cases} \to y=(x-2)^2+1$$

$$\to (x-2)^2=y-1 \xrightarrow{\text{جذر}} |x-2|=\sqrt{y-1}$$

$$\xrightarrow[x-2\le 0]{\text{با توجه به } D_f} -(x-2)=\sqrt{y-1} \to x-2=-\sqrt{y-1} \to x=-\sqrt{y-1}+2$$

$$\to f^{-1}(x)=-\sqrt{x-1}+2$$




۴۸

الف) $f(x)=\frac{-8x+3}{2}$ : $y=\frac{-8x+3}{2} \xrightarrow{\times 2} 2y=-8x+3 \xrightarrow{-3} -8x=2y-3$

$$\xrightarrow{\div(-8)} x=\frac{2y-3}{-8}=\frac{-1}{4}y+\frac{3}{8} \xrightarrow{\text{حالا}} f^{-1}(x)=\frac{-1}{4}x+\frac{3}{8}$$

ب) $g(x)=-5-\sqrt{3x+1}$ : $y=-5-\sqrt{3x+1} \to y+5=-\sqrt{3x+1}$

$$\xrightarrow[\left(\begin{smallmatrix} y+5\le 0 \\ y\le -5 \end{smallmatrix}\right)]{\text{به توان ۲ برسان}} (y+5)^2=(3x+1) \xrightarrow{-1} (y+5)^2-1=3x \xrightarrow{\div 3} x=\frac{1}{3}(y+5)^2-\frac{1}{3}$$

$$x\ge \frac{-1}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا}} g^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x+5)^2-\frac{1}{3}$$

که با توجه به شرایط $y\le -5$ و $x\ge \frac{-1}{3}$، برای دامنه و برد تابع وارون، داریم:

$$D_{g^{-1}}=R_g=(-\infty,-5]\ ,\ R_{g^{-1}}=D_g=[-\frac{1}{3},+\infty)$$

۴۹ در هر مورد وارون یکی از توابع را یافته (معمولاً آن تابعی که محاسبهٔ $x$ برحسب $y$ در آن ساده‌تر است) و نشان می‌دهیم که تابع وارون به‌دست آمده همان تابع دوم است.

الف)
$$\begin{cases} f(x)=\frac{-7}{2}x-3 \\ g(x)=-\frac{2x+6}{7} \to y=-\frac{2x+6}{7} \xrightarrow{\times(-7)} -7y=2x+6 \xrightarrow{-6} 2x=-7y-6 \\ \xrightarrow{\div 2} x=\frac{-7y-6}{2}=\frac{-7}{2}y-3 \xrightarrow{\text{حالا}} g^{-1}(x)=\frac{-7}{2}x-3 \to g^{-1}(x)=f(x)\ \checkmark \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} f(x)=-\sqrt{x-8} \\ g(x)=8+x^2\ ;\ x\le 0 \to y=8+x^2 \xrightarrow{-8} x^2=y-8 \xrightarrow{\text{جذر}} |x|=\sqrt{y-8} \\ \xrightarrow[|x|=-x]{\text{با توجه به } x\le 0} -x=\sqrt{y-8} \to x=-\sqrt{y-8} \xrightarrow{\text{حالا}} g^{-1}(x)=-\sqrt{x-8}=f(x)\ \checkmark \end{cases}$$

۵۰

$$f(x)=\frac{9}{5}x+32 \to y=\frac{9}{5}x+32 \xrightarrow{-32} \frac{9}{5}x=y-32 \xrightarrow{\times\frac{5}{9}} x=\frac{5}{9}(y-32)$$

$$\xrightarrow{\text{حالا}} f^{-1}(x)=\frac{5}{9}(x-32)$$

رابطهٔ $f(x)=\frac{9}{5}x+32$ نشان می‌دهد که $x$ درجهٔ سلسیوس معادل $f(x)$ درجهٔ فارنهایت است مثلاً $x=5^\circ C$ معادل $f(5)=\frac{9}{5}(5)+32=41$ درجهٔ فارنهایت است. درحالی که رابطهٔ $f^{-1}(x)=\frac{5}{9}(x-32)$ به ما می‌گوید هر $x$ درجهٔ فارنهایت معادل $f^{-1}(x)$ درجهٔ سلسیوس می‌باشد. مثلاً $x=32$ درجهٔ فارنهایت معادل $f^{-1}(32)=\frac{5}{9}(32-32)$ یا ۰ درجهٔ سلسیوس است.

۵۱ الف)
برای محاسبهٔ $(fog)^{-1}(5)$ دو راه پیش‌رو داریم. یکی اینکه تابع مرکب $fog$ را محاسبه کرده و وارون آن را بیابیم و در نهایت به جای $x$های آن ۵ قرار دهیم. دیگر اینکه از رابطهٔ $(fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$ استفاده کرده و با توجه به تابع وارون‌های $f^{-1}$ و $g^{-1}$، تابع مرکب $g^{-1}of^{-1}$ را محاسبه کرده و به‌جای $x$هایش ۵ قرار دهیم. ما هردو راهکار را انجام می‌دهیم:

روش اول:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{۱}{۸}x - ۳ \\ g(x) = x^۳ \end{cases} \rightarrow fog(x) = f(g(x)) = f(x^۳) = \frac{۱}{۸}x^۳ - ۳ \rightarrow fog(x) = \frac{۱}{۸}x^۳ - ۳$$

$$\xrightarrow{\text{حالا محاسبهٔ } (fog)^{-۱}} y = \frac{۱}{۸}x^۳ - ۳ \xrightarrow{+۳} \frac{۱}{۸}x^۳ = y + ۳ \xrightarrow{\times ۸} x^۳ = ۸y + ۲۴$$

$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم بگیر.}} x = \sqrt[۳]{۸y + ۲۴} \rightarrow (fog)^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{۸x + ۲۴} \xrightarrow[x=۵]{\text{قرار بده}} (fog)^{-۱}(۵) = \sqrt[۳]{۴۰ + ۲۴} = \sqrt[۳]{۶۴} = \sqrt[۳]{۴^۳} = ۴$$

حال، روش دوم را نیز امتحان می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{۱}{۸}x - ۳ \rightarrow y = \frac{۱}{۸}x - ۳ \rightarrow \frac{۱}{۸}x = y + ۳ \rightarrow x = ۸y + ۲۴ \rightarrow f^{-۱}(x) = ۸x + ۲۴ \\ g(x) = x^۳ \rightarrow y = x^۳ \rightarrow x = \sqrt[۳]{y} \rightarrow g^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا می‌نویسیم}} (fog)^{-۱}(x) = (g^{-۱}of^{-۱})(x) = g^{-۱}(f^{-۱}(x)) = g^{-۱}(۸x + ۲۴) = \sqrt[۳]{۸x + ۲۴}$$

$$\xrightarrow[x=۵]{\text{قرار بده}} (fog)^{-۱}(۵) = \sqrt[۳]{۴۰ + ۲۴} = \sqrt[۳]{۶۴} = \sqrt[۳]{۴^۳} = ۴$$

حال، با توجه به ضابطه‌های $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ موارد (ب) و (پ) را به راحتی می‌توانیم محاسبه کنیم:

ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶) = f^{-۱}(f^{-۱}(۶)) \xrightarrow[f^{-۱}(۶)=۴۸+۲۴=۷۲]{f^{-۱}(x)=۸x+۲۴} f^{-۱}(۷۲) = ۸(۷۲) + ۲۴ = ۶۰۰$

پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵) = g^{-۱}(f^{-۱}(۵)) \xrightarrow[f^{-۱}(۵)=۴۰+۲۴=۶۴]{f^{-۱}(x)=۸x+۲۴} g^{-۱}(۶۴) = \sqrt[۳]{۶۴} = ۴$

همانطور که می‌بینید جواب‌های موارد (الف) و (پ) یکی هستند!

۵۲

الف

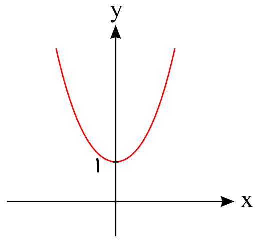
$$g(x) = ۱ + \sqrt{x - ۲} \rightarrow y = ۱ + \sqrt{x - ۲} \xrightarrow{-۱} y - ۱ = \sqrt{x - ۲} \xrightarrow[(x \geq ۲)]{\text{به توان ۲}} (y - ۱)^۲ = x - ۲$$

$$\rightarrow x = (y - ۱)^۲ + ۲ \longrightarrow f^{-۱}(x) = (x - ۱)^۲ + ۲$$

$$\begin{cases} \text{برای } D_f : x - ۲ \geq ۰ \rightarrow x \geq ۲ \rightarrow D_f = [۲, +\infty) = R_{f^{-۱}} \\ \text{برای } R_f : y = ۱ + \underbrace{\sqrt{x - ۲}}_{\min = ۰} \rightarrow \min(y) = ۱ + ۰ = ۱ \rightarrow y \geq ۱ \rightarrow R_f = [۱, +\infty) = D_{f^{-۱}} \end{cases}$$

ب

تابع $h(x) = x^۲ + ۱$ که معرف یک سهمی به شکل




است، به دلیل یک به یک نبودن روی دامنهٔ خود $(D_h = \mathbb{R})$ وارون‌پذیر نخواهد بود.

پرسش: آیا راهی است که تابع $h(x) = x^۲ + ۱$ را تبدیل به یک تابع وارون پذیر کند؟!

پاسخ: آری. با توجه به نمودار فوق اگر چناچه دامنهٔ تابع را به یکی از دو فاصلهٔ $[۰, +\infty)$ یا $(-\infty, ۰]$ محدود کنیم تابع، یک به یک و وارون‌پذیر می‌شود. مثلاً:

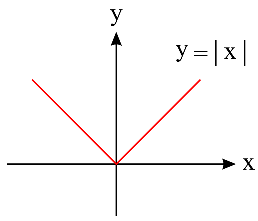
$$h(x) = x^۲ + ۱ \,,\; D_h = [۰, +\infty) \rightarrow y = x^۲ + ۱ \xrightarrow{-۱} x^۲ = y - ۱ \xrightarrow[y \geq ۱]{\text{جذر بگیر}} x = \sqrt{y - ۱}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا}} h^{-۱}(x) = \sqrt{x - ۱} \,;\; D_{h^{-۱}} = [۱, +\infty) = R_h \;,\; R_{h^{-۱}} = D_h = [۰, +\infty)$$

۵۳

الف

با توجه به نمودار



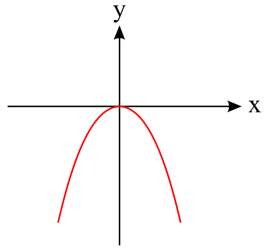

اگر دامنهٔ تابع را به یکی از دو فاصلهٔ $[۰, +\infty)$ یا $(-\infty, ۰]$ محدود کنیم، آن‌گاه تابع مورد نظر یک‌به‌یک خواهد بود.

حالت اول: $\begin{cases} f(x)=|x| \\ x\geq ۰ \end{cases} \to f(x)=x \to y=x \to f^{-۱}(x)=x$

حالت دوم: $\begin{cases} f(x)=|x| \\ x\leq ۰ \end{cases} \to f(x)=-x \to y=-x \to x=-y \to f^{-۱}(x)=-x$

**ب**

تابع $g(x)=-x^۲$ که معرف سهمی




است که یک‌به‌یک نیست و با محدود کردن دامنهٔ آن به یکی از دو فاصلهٔ $[۰,+\infty)$ یا $(-\infty,۰]$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر می‌شود.

حالت اول:

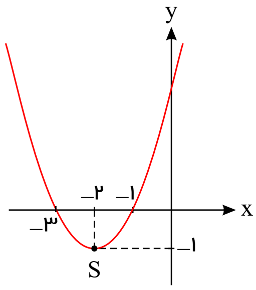
$$\begin{cases} g(x)=-x^۲ \\ x\geq ۰ \end{cases} \to y=-x^۲ \to x^۲=-y \xrightarrow{\text{جذر}} |x|=\sqrt{-y} \xrightarrow[|x|=x]{x\geq ۰} x=\sqrt{-y} \to g^{-۱}(x)=\sqrt{-x}$$

حالت دوم:

$$\begin{cases} g(x)=-x^۲ \\ x\leq ۰ \end{cases} \to y=-x^۲ \to x^۲=-y \xrightarrow{\text{جذر}} |x|=\sqrt{-y} \xrightarrow[|x|=-x]{x\leq ۰} x=-\sqrt{-y} \to g^{-۱}(x)=-\sqrt{-x}$$

**پ**

سهمی $h(x)=x^۲+۴x+۳$ نیز که می‌شود آن را به صورت $h(x)=(x+۲)^۲-۱$ نوشت نموداری به شکل




داشته و در کل دامنهٔ خود غیر یک‌به‌یک است.

حال اگر دامنهٔ آن را از $\mathbb{R}$ به $(-\infty,-۲]$ یا $[-۲,+\infty)$ محدود کنیم، آن‌گاه با یکی از دو شاخهٔ سهمی مواجه بوده و تابعی یک‌به‌یک و وارون‌پذیر داریم:

حالت اول:

$$\begin{cases} h(x)=(x+۲)^۲-۱ \\ D_h=[-۲,+\infty) \end{cases} \to y=(x+۲)^۲-۱ \to (x+۲)^۲=y+۱ \xrightarrow{\text{جذر}}$$

$$|x+۲|=\sqrt{y+۱} \xrightarrow[x+۲\geq ۰]{x\geq -۲} x+۲=\sqrt{y+۱} \to x=\sqrt{y+۱}-۲ \to h^{-۱}(x)=\sqrt{x+۱}-۲$$

حالت دوم:

$$\begin{cases} h(x)=(x+۲)^۲-۱ \\ D_h=(-\infty,-۲] \end{cases} \to y=(x+۲)^۲-۱ \to (x+۲)^۲=y+۱ \xrightarrow{\text{جذر}}$$

$$|x+۲|=\sqrt{y+۱} \xrightarrow[x+۲\leq ۰]{x\leq -۲} -(x+۲)=\sqrt{y+۱} \to x+۲=-\sqrt{y+۱} \to x=-\sqrt{y+۱}-۲ \to h^{-۱}(x)=-\sqrt{x+۱}-۲$$

**۵۴**

$$f(x)=-\frac{۷}{۲}x-۳ \to y=-\frac{۷}{۲}x-۳ \to \frac{۷}{۲}x=-y-۳ \to ۷x=-۲y-۶ \to x=\frac{-۲y-۶}{۷} \to f^{-۱}(x)=\frac{-۲x-۶}{۷}$$

درست

پیوسته

درست

۴۰

علت : $h'(x)=۱۲x^۳+۴x \to h''(x)=۳۶x^۲+۴ \to h''(۱)=۳۶+۴=۴۰$

**۵۹**

$$y=-۵-\sqrt{۳x+۱} \to \sqrt{۳x+۱}=-۵-y \to ۳x+۱=۲۵+y^۲+۱۰y \to ۳x=y^۲+۱۰y+۲۴ \to x=\frac{y^۲+۱۰y+۲۴}{۳}$$

$$\to f^{-۱}(x)=\frac{y^۲+۱۰x+۲۴}{۳}$$

$-۵$

علت : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{۵x^۲ - ۳x}{-x^۲+۱} \overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{۵x^۲}{-x^۲} = -۵$

۷

علت : $(۲g - f)'(۲) = ۲g'(۲) - f'(۲) = ۱۰ - ۳ = ۷$

نادرست

نادرست

نادرست

علت: $f'(x) = ۳x^۲ - ۳ > ۰ \to ۳x^۲ > ۳ \to x^۲ > ۱ \to x > ۱$ یا $x < -۱$

درست

علت: $f(-۲) = -۱۶ + ۲۰ + ۶ - ۱۰ = ۰$