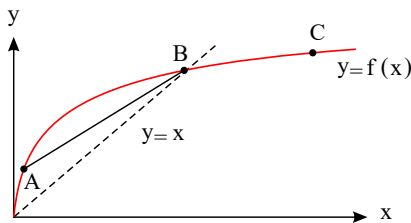




تعریف مشتق و تعبیر هندسی مشتق

۱) برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به

تمرین های کتاب -



بزرگ‌ترین مرتب کنید. الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C

ت) شیب خط AB

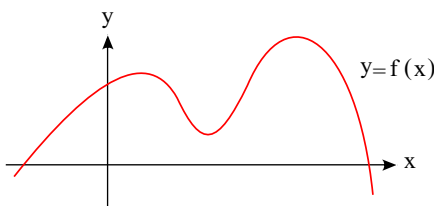
ث) شیب خط $y = 2$

ج) شیب خط $y = x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1, m_2, m_3, \dots و m_6 در نظر بگیرید.

۲) نقاطی مانند A, B, C, D, E, F و G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که: الف)

تمرین های کتاب -



A ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آن جا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

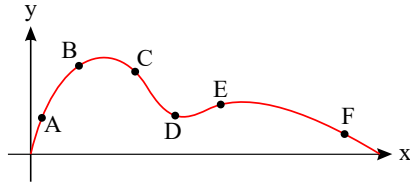
ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آن جا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آن جا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

۳) نقاط A, B, C, D, E و F را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این

تمرین‌های کتاب -



کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟ الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم).

پ) $m_E < m_B < m_A$

ت) شیب منحنی در نقاط F, D, C منفی است.

ث) $m_F < m_D < m_C$

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$

۴) در هر ثانیه علی j متر با دوچرخه و رضا s متر با پای پیاده طی می‌کنند، به طوری که $s > j$. در یک

زمان داده شده، چگونه می‌توان مسافت طی شده توسط رضا و علی را مقایسه کرد؟ تمرین‌های کتاب -

الف) علی $s - j$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

ب) علی $j \cdot s$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

پ) علی j/s متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

ت) علی $j \cdot s$ برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

ث) علی j/s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

۵) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

تمرین‌های کتاب -

الف) در یک نقطه برابر صفر شود. ب) در $x = 2$ برابر ۳ شود.

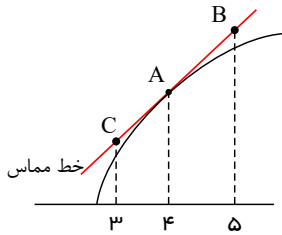
پ) در تمام نقاط مثبت باشد. ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

ث) در تمام نقاط منفی باشد.

۶ برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(4) = 1.5$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل مختصات نقاط A ،

تمرین های کتاب - ۰

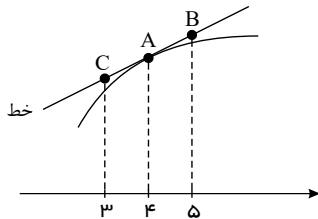
B و C را بیابید.



۷ برای تابع f در شکل روبه رو داریم $f'(4) = 1.5$ و $f(4) = 24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

A ، B و C را بیابید.

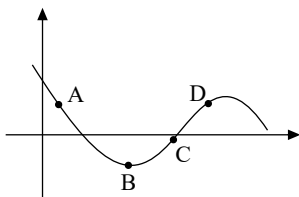


۸ اگر $f(x) = 1 - 2x^2$ باشد. $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

۹ نقاط داده شده روی منحنی را با شیب های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸



شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۲
نقطه				

۱۰ مشتق تابع $f(x) = x^3 - 2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه ای به طول $x = -1$ به دست

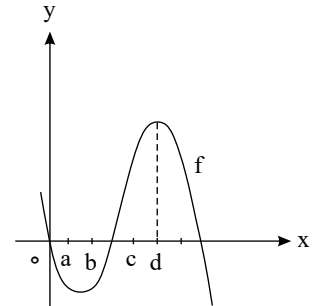
سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

آورید.

۱۱) با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a و b و c و d را با مشتق‌های داده در جدول نظیر کنید.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

x	$f'(x)$
	۰
	۰٫۵
	۲
	-۰٫۵

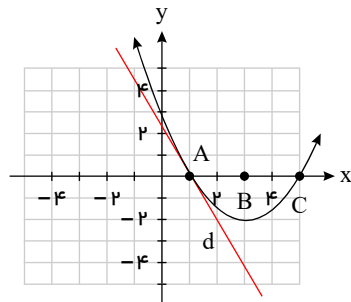


سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

۱۲) در نمودار مقابل خط d در نقطه $x = 1$ بر نمودار f مماس شده است:

الف) مشتق تابع f را در نقطه $x = 1$ محاسبه کنید.

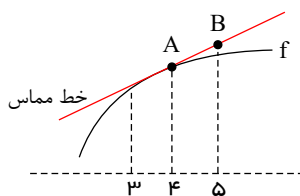
ب) شیب نمودار را در نقاط C, B مقایسه کنید.



سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

۱۳) برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4) = \frac{3}{2}$ و $f(4) = 25$

باتوجه به شکل، مختصات نقاط A و B را بیابید.

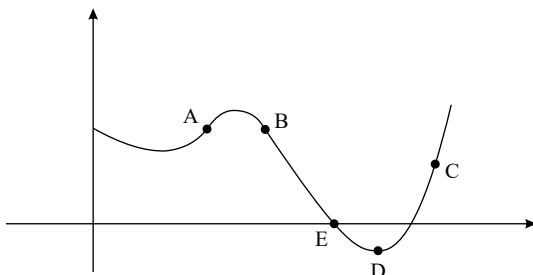


۱۴) نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید. (یک نقطه اضافی

سوال های امتحانی - ۱۴۰۰

است.)

شیب	نقطه
-۳	
-۱	
۰	
۱	



قواعد مشتق گیری

۱۵) مشتق توابع داده شده را بیابید.

تمرین های کتاب -

الف

$$f(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$$

تمرین های کتاب -

ب

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$$

تمرین های کتاب -

پ

$$f(x) = (\sqrt{3x + 2})(x^3 + 1)$$

تمرین های کتاب -

ت

$$f(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$$

تمرین های کتاب -

۱۶) مشتق تابع $y = \frac{1}{x}(2\sqrt{x} - 1)^4$ را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

۱۷) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

الف) $f(x) = \left(\frac{x}{2x-1}\right)^5$ ب) $g(x) = x^2(\sqrt{x+1})$



ط اگر $f'(2) = 3$ و $g'(2) = 5$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $(2g - f)'(2)$ برابر است.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

۱۹ مشتق توابع زیر را به دست آورید. ساده کردن مشتق الزامی نیست) سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

الف

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x}$$

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

۲۰ مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

الف) $f(x) = (x^2 + 1)^3(5x - 1)$ ب) $g(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$

۲۱

مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x) = \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^5$

ب) $g(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

سوال های امتحانی - ۱۴۰۰

۲۲ مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

الف

$$f(x) = \left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^8$$

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

ب

$$g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(\sqrt{3x+2})$$

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

۲۳ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). سوال‌های امتحانی - ۱۳۹۹

الف

$$f(x) = \frac{3x + 1}{\sqrt{x}}$$

سوال‌های امتحانی - ۱۳۹۹

ب

$$g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(x^2 + 5x)^7$$

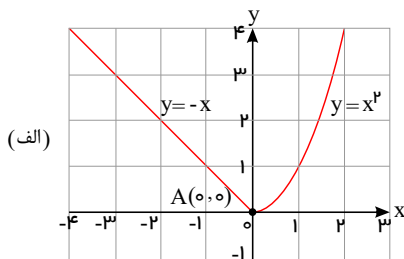
سوال‌های امتحانی - ۱۳۹۹

بررسی مشتق پذیری

۲۴ اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ ، به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و -۲ بررسی کنید.
تمرین‌های کتاب -

۲۵ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.
تمرین‌های کتاب -

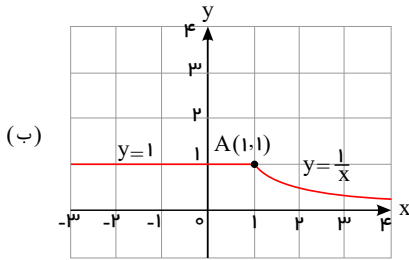
تمرین‌های کتاب -



الف

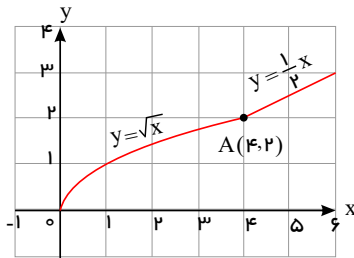
ب

تمرین های کتاب - ۵



پ

تمرین های کتاب - ۵



۲۶ مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

۲۷ تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

الف نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

ب تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

۵ اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، آنگاه f در a مشتق پذیر است.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

۳۰ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

۳۱ به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در نقطه $x = -2$ بررسی کنید.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

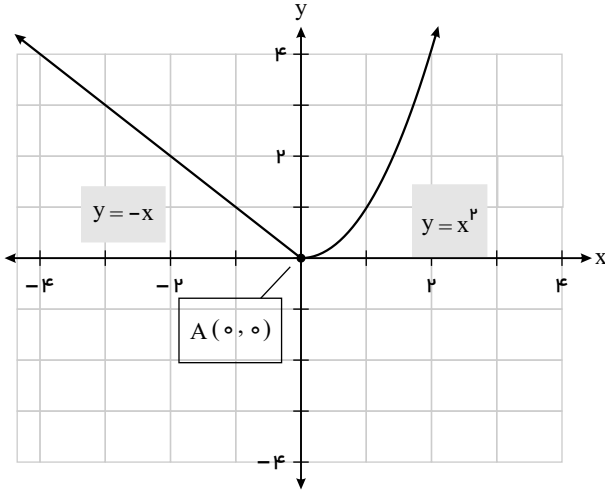
سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

 اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در a است.

 (۳۳) با محاسبه مشتق چپ و راست تابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید این تابع در نقطه A مشتق پذیر

سوال های امتحانی - ۱۴۰۰

نیست.



سوال های امتحانی - ۱۴۰۰

 اگر $h(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$ باشد، آنگاه $h''(1)$ برابر است.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

 تابع $y = f(x)$ در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده، مشتق پذیر نیست؟

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

 (۳۶) تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x + 1 & x < 0 \end{cases}$ داده شده است:

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

 الف) نشان دهید که $f'(0)$ وجود ندارد.

$$f(x) = (x^4 - 3x)^5$$

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

 تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست. خط $x = 0$ را منحنی می نامیم.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

رابطه‌ی بین f و f'

تمرین های کتاب - ۰

$$\text{تابع } (39) f(x) = \begin{cases} 5x - 4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x + 6 & x > 3 \end{cases} \text{ داده شده است.}$$

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

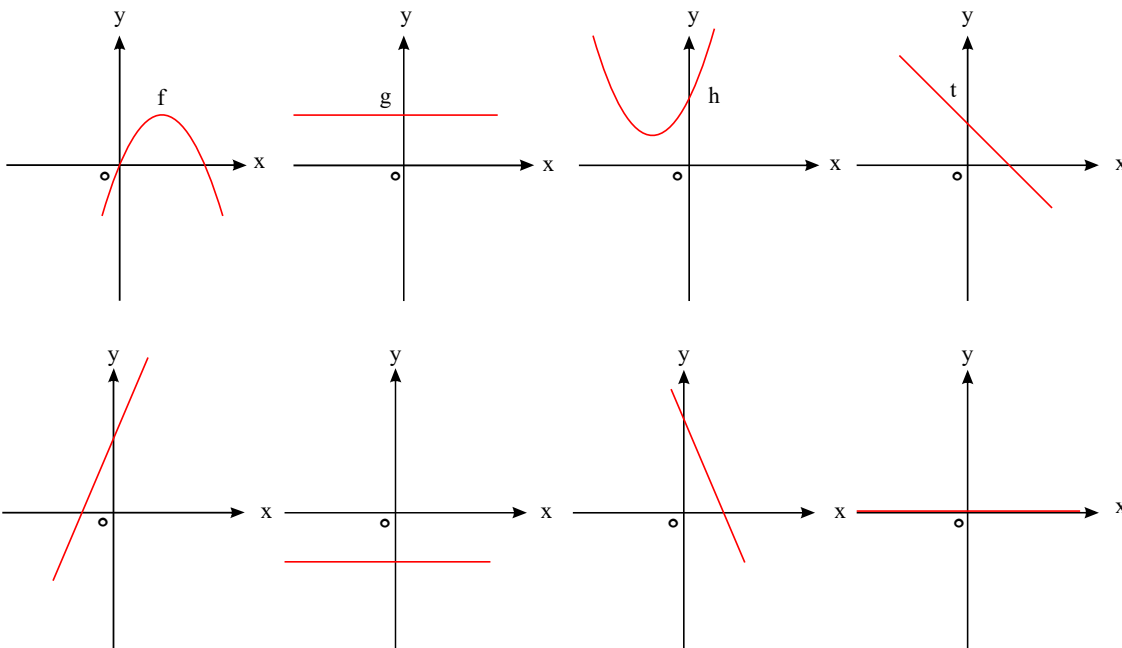
ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.

پ) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

تمرین های کتاب - ۰

(40) نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آن‌ها، نظیر کنید.



سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

نمودار تابع f' را رسم کنید.

ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

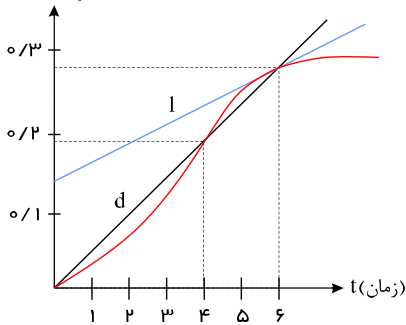
نمودار تابع f' را رسم کنید.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

آهنگ تغییرات

۴۵) کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده اند بر حسب زمان (هفته) در نمودار

کسری از جمعیت که آلوده شده اند



زیر نشان داده شده است. الف) شیب های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می دهند.

تمرین های کتاب -

ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان های $t = 1$, $t = 2$ یا $t = 3$ بیشتر است؟

پ) قسمت «ب» را برای $t = 4$, $t = 5$ و $t = 6$ بررسی کنید.

۴۶) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 1$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ t

بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ باهم

برابرنند؟

تمرین های کتاب -



۴۷) توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است. تمرین های کتاب -

t	۰	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۶
ثانیه s							
$f(t)$	۱۱	۱۲٫۴	۱۳٫۸	۱۵٫۱	۱۶٫۳	۱۷٫۴	۱۸٫۴
متر m							

بر اساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰٫۴ ثانیه است نشان دهد؟

- الف) $۱٫۲۳ m/s$ ب) $۱۴٫۹۱ m/s$ پ) $۱۱٫۵ m/s$ ت) $۱۶٫۰۳ m/s$

۴۸) کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است:

- الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[۰, ۱]$ همیشه کم‌تر از شیب آن منحنی در نقطه است.
 ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.
 پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = ۰$ و هم $f(a) = ۰$
- تمرین های کتاب -

۴۹) گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = ۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = ۴۰ \left(1 - \frac{t}{۱۰۰}\right)^2$ به دست آید:

- تمرین های کتاب -
- الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[۰, ۱]$ چقدر است؟
 ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰, ۱۰۰]$ می‌شود؟

۵۰) یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + ۲t^3$ گرم است. تمرین های کتاب -

- الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۳ \leq t \leq ۴$ چند گرم افزایش می‌یابد؟
 ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = ۳$ چقدر است؟



۵۱) آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 7$ تغییر می کند به دست آورید.
سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

۵۲) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t$ ، برحسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 4]$ با هم برابرند.
سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

۵۳) یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است. آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه زمانی $[3, 4]$ چقدر است؟
سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

۵۴) تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟
سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

۵۵) خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند، که در آن $0 \leq t \leq 5$ برحسب ثانیه است. سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ چقدر است؟
سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

۵۶) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ برحسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ t (برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟
سوال های امتحانی - ۱۴۰۰

۵۷) یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $1 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟
سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = 4$ چقدر است؟
سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

پاسخنامه تشریحی

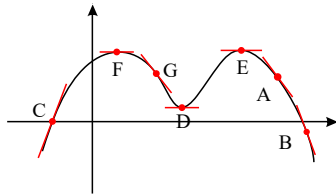
۱

ترتیب شیب‌ها به صورت مقابل است:

$$m_D < m_F < m_G < m_E < m_C < m_A$$

در $y = 2$ شیب صفر است و بقیه موارد شیب‌ها همگی مثبت هستند پس هرچه زاویه بزرگ‌تر شود شیب هم افزایش می‌یابد.

۲

الف) شیب خط مماس در نقطه A منفی است یعنی مشتق در نقطه A منفی است.ب) چون نقطه B زیر محور x ‌ها قرار دارد پس مقدار تابع در نقطه B منفی است و در ضمن مشتق در این نقطه منفی است.پ) نقطه C محل برخورد با محور x ‌ها است. پس $f(C) = 0$ است و در ضمن مشتق در این نقطه مثبت است.ت) خط مماس در نقطه D افقی است پس مشتق در نقطه D صفر است.ث) در E و F مماس افقی است و مشتق در این نقاط صفر استج) چون نقطه G بالای محور x ‌ها است پس مقدار تابع در نقطه G مثبت است و چون شیب خط مماس در G منفی است یعنی مشتق در نقطه G منفی است.

۳

الف) نادرست است زیرا در نقاط C ، D و F شیب منفی است.ب) نادرست است زیرا زاویه خط مماس در نقطه A با جهت مثبت محور x ‌ها از زاویه خط مماس در نقطه B با جهت مثبت محور x ‌ها بیشتر و هر دو زاویه حاده هستند.

پ) درست است.

ت) درست است.

ث) نادرست است زیرا $m_D < m_F$.

ج) درست است.

۴

سرعت حرکت علی با دوچرخه j متر در ثانیه و سرعت حرکت رضا با پای پیاده s متر در ثانیه است. حال مسافت طی شده توسط علی و رضا را در بازه زمانی $[t_1, t_2]$ یافته و با هم مقایسه می‌کنیم.

$$x_A = V_A \cdot \Delta t = j \cdot \Delta t$$

$$x_R = V_R \cdot \Delta t = s \cdot \Delta t$$

$$x_A - x_R = j \cdot \Delta t - s \cdot \Delta t = (j - s) \Delta t$$

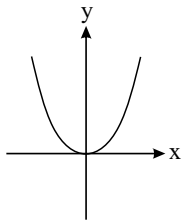
$$\frac{x_A}{x_R} = \frac{j \cdot \Delta t}{s \cdot \Delta t} = \frac{j}{s} \Rightarrow x_A = \frac{j}{s} \cdot x_R$$

حال با محاسبه اختلاف مسافت یا نسبت مسافت طی شده توسط این دو نفر داریم:

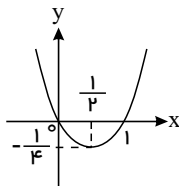
بنابراین مورد «ث» صحیح است.

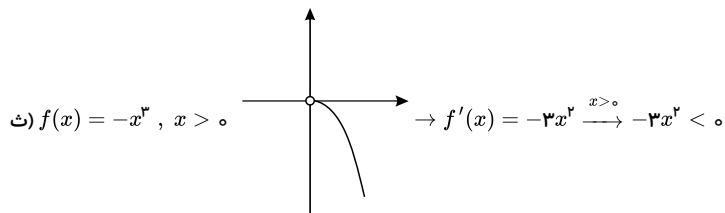
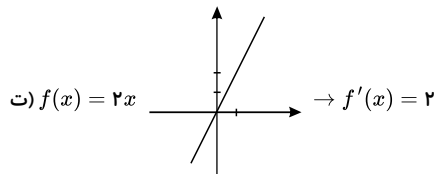
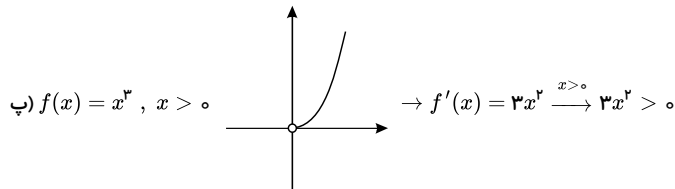
۵

الف) $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow f'(0) = 0$



ب) $f(x) = x^2 - x \rightarrow f'(x) = 2x - 1 \rightarrow f'(2) = 3$





$$m_{AC} = 1,5 \rightarrow \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = 1,5 \rightarrow \frac{25 - y_C}{4 - 3} = 1,5$$

$$\rightarrow 25 - y_C = 1,5 \rightarrow y_C = 23,5 \rightarrow C \left| \begin{array}{l} 3 \\ 23,5 \end{array} \right.$$

$$m_{AB} = 1,5 \rightarrow \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = 1,5 \rightarrow \frac{25 - y_B}{4 - 5} = 1,5$$

$$\rightarrow 25 - y_B = -1,5 \rightarrow y_B = 26,5 \rightarrow B \left| \begin{array}{l} 5 \\ 26,5 \end{array} \right.$$

مختصات A نیز به صورت $\left. \begin{array}{l} 4 \\ 25 \end{array} \right|$ است.

$$m_{AC} = 1,5 \rightarrow \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = 1,5 \rightarrow \frac{24 - y_C}{4 - 3} = 1,5$$

$$\rightarrow 24 - y_C = 1,5 \rightarrow y_C = 22,5 \rightarrow C \left| \begin{array}{l} 3 \\ 22,5 \end{array} \right.$$

$$m_{AB} = 1,5 \rightarrow \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = 1,5 \rightarrow \frac{24 - y_B}{4 - 5} = 1,5$$

$$\rightarrow 24 - y_B = -1,5 \rightarrow y_B = 25,5 \rightarrow B \left| \begin{array}{l} 5 \\ 25,5 \end{array} \right.$$

مختصات نقطه A هم طبق صورت سؤال $\left. \begin{array}{l} 4 \\ 24 \end{array} \right|$ است.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - 2x^2 - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - 2x^2 + 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x^2 + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2(x^2 - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2(x + 1)(x - 1)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} -2(x - 1) = -2(-2) = 4$$

۶

۷

۸

۹

 توجه کنید که $m_B = 0$ است و $m_A < 0$ و $m_C > m_D > 0$ است.

شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۲
نقطه	C	B	D	A

۱۰

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^x - 2 - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^x - 2 + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^x + 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^x - x + 1)}{x + 1} = 1 + 1 + 1 = 3$$

 ۱۱ $a = -0.5$ و $c = 2$ و $b = 0.5$ و $d = 0$ است.

۱۲

$$\text{الف) } A \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right|_C \left| \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \right| \rightarrow f'(1) = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{0 - 2}{1 - 0} = -2$$

 ب) $m_C > m_B$

 ۱۳ مختصات نقطه A به صورت $\left(\frac{4}{25}, 5 \right)$ است.

$$m_{AB} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{25 - y_B}{4 - 5} = \frac{3}{2} \rightarrow 25 - y_B = \frac{-3}{2} \rightarrow y_B = 26.5 \rightarrow B \left(\frac{5}{26.5} \right)$$

۱۴

شیب	-۳	-۱	۰	۱
نقطه	E	B	D	A

۱۵

الف

$$f'(x) = 6x(2x - 5)^x + 3(2x - 5)^x(2)(3x^2 - 4)$$

ب

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)(-3x + 2) - (-3)(x^x - 3x + 1)}{(-3x + 2)^2}$$

پ

$$f'(x) = \frac{1(3)}{2\sqrt{3x+2}}(x^x + 1) + 3x^x(\sqrt{3x+2})$$

ت

$$f'(x) = \frac{9(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x - 2)}{(\sqrt{x})^2}$$

 ۱۶ از مشتق حاصل ضرب استفاده می‌کنیم. $(y = uv \rightarrow y' = u'v + u'v)$

۱۷

الف

$$y = \frac{1}{x}(2\sqrt{x} - 1)^x \rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}(2\sqrt{x} - 1)^x + 2(2\sqrt{x} - 1)^x \left(2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right) \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \left(\frac{x}{2x-1} \right)^5 \rightarrow f'(x) = 5 \left(\frac{x}{2x-1} \right)^4 \left(\frac{1(2x-1) - 2(x)}{(2x-1)^2} \right)$$

$$g(x) = x^x(\sqrt{x+1}) \rightarrow g'(x) = 2x(\sqrt{x+1}) + \frac{1(1)}{2\sqrt{x+1}}x^x$$

ط

۷

$$\text{عنت} : (2g - f)'(2) = 2g'(2) - f'(2) = 10 - 3 = 7$$

الف

۱۹



$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x} \rightarrow g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x) - (-1)\sqrt{x}}{(1-x)^2} \rightarrow g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x) + \sqrt{x}}{(1-x)^2}$$

$$(y = uv \rightarrow y' = u'v + v'u)$$

الف) مشتق حاصل ضرب می باشد.

$$f(x) = (x^r + 1)^r(\Delta x - 1) \rightarrow f'(x) = r(x^r + 1)^{r-1}(rx)(\Delta x - 1) + \Delta(x^r + 1)^r$$

$$g(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}} \rightarrow g'(x) = \frac{9(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x - 2)}{x}$$

$$f(x) = \left(\frac{x^r}{rx - 1}\right)^\Delta \rightarrow f'(x) = \Delta \left(\frac{x^r}{rx - 1}\right)^{\Delta-1} \left(\frac{rx(rx - 1) - rx^r}{(rx - 1)^2}\right)$$

$$g(x) = (\sqrt{3x+2})(x^r+1) \rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x+2}}(x^r+1) + rx^r(\sqrt{3x+2})$$

الف)

$$f(x) = \left(\frac{-3x+1}{x^r+\Delta}\right)^\Delta$$

$$f'(x) = \Delta \left(\frac{-3x+1}{x^r+\Delta}\right)^{\Delta-1} \left(\frac{-3(x^r+\Delta) - rx(-3x+1)}{(x^r+\Delta)^2}\right)$$

ب)

$$g(x) = \frac{1}{x}(\sqrt{3x+2})$$

$$g'(x) = \frac{-1}{x^2}(\sqrt{3x+2}) + \frac{1}{2\sqrt{3x+2}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

الف)

$$f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}} \rightarrow f'(x) = \frac{3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+1)}{x}$$

ب)

$$g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(x^r + \Delta x)^\nu \rightarrow g'(x) = \frac{-1}{x^2}(x^r + \Delta x)^\nu + \nu(x^r + \Delta x)^{\nu-1}(rx + \Delta)\left(\frac{1}{x}\right)$$

۲۴) تابع داده شده در $x = 2$ و $x = -2$ پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^r - 4| - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^r - 4|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|(x+2)(x-2)|}{x - 2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+2)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -(x+2) = -4 \end{cases} \rightarrow \text{تابع در } x = 2 \text{ مشتق ناپذیر است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x^r - 4| - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x^r - 4|}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|(x+2)(x-2)|}{x + 2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x+2)(x-2)}{(x+2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} -(x-2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x-2) = -4 \end{cases} \rightarrow \text{تابع در } x = -2 \text{ مشتق ناپذیر است.}$$

۲۰)

ب)

الف) ۲۱)

ب)

۲۲)

۲۳)

الف

$$\begin{cases} y_1 = x^2 \rightarrow y' = 2x \rightarrow y'(0^+) = 0 \\ y_2 = -x \rightarrow y' = -1 \rightarrow y'(0^-) = -1 \end{cases} \xrightarrow{y'(0^+) \neq y'(0^-)} \text{تابع در } x = 0 \text{ مشتق ناپذیر است.}$$

ب

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{x} \rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \rightarrow y'(1^+) = -1 \\ y_2 = 1 \rightarrow y' = 0 \rightarrow y'(1^-) = 0 \end{cases} \xrightarrow{y'(1^+) \neq y'(1^-)} \text{تابع در } x = 1 \text{ مشتق ناپذیر است.}$$

پ

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow y'(4^-) = \frac{1}{4} \\ y_2 = \frac{1}{2}x \rightarrow y' = \frac{1}{2} \rightarrow y'(4^+) = \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{y'(4^+) \neq y'(4^-)} \text{تابع در } x = 4 \text{ مشتق ناپذیر است.}$$

 تابع f در $x = a$ وقتی مشتق پذیر است که تابع در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x = a$ با هم برابر باشند. (۲۶)

$$\text{پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x) = 1 + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x - 1) = 3 - 1 = 2 \\ f(1) = 1 + 1 = 2 \end{cases} \rightarrow \text{تابع در } x = 1 \text{ پیوسته است.}$$

$$\text{مشتق‌های راست و چپ: } \begin{cases} f'(1^+) = 2x + 1 = 2(1) + 1 = 3 \\ f'(1^-) = 3 \end{cases}$$

 با توجه به پیوسته بودن و تساوی مشتق‌های راست و چپ، تابع در $x = 1$ مشتق پذیر است.

(۲۷)

 در $x = 0$ مشتق‌های راست و چپ برابر نیستند (نقطه گوشه)، بنابراین مشتق پذیر نیست.

الف

$$\begin{cases} f'(0^+) = 2x = 0 \\ f'(0^-) = 2 \end{cases} \rightarrow f'(0^+) \neq f'(0^-)$$

نادرست (۲۸)

نادرست (۲۹)

برای محاسبه مشتق راست سراغ ضابطه پایین و برای محاسبه مشتق چپ سراغ ضابطه بالا می‌رویم. (۳۰)

$$\left. \begin{aligned} x \geq 0 &\rightarrow f(x) = x \rightarrow f'_+(0) = 1 \\ x < 0 &\rightarrow f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow f'_-(0) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

 تابع داده شده در $x = -2$ پیوسته است. $(\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = f(-2) = 0)$ (۳۱)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x^2 - 4| - \overbrace{f(-2)}^0}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x^2 - 4|}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x+2)(x-2)}{(x+2)} = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{|x^2 - 4| - \overbrace{f(-2)}^0}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{|x^2 - 4|}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)} = -4$$

 چون مشتق‌های راست و چپ برابر نیستند، تابع در $x = -2$ مشتق ناپذیر است.

پیوسته

(۳۳)

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

 مشتق‌های راست و چپ تابع در $x = 0$ با هم برابر نیستند، بنابراین تابع در $x = 0$ مشتق ناپذیر است.

۴۰

$$\text{علت: } h'(x) = 12x^2 + 4x \rightarrow h''(x) = 24x + 4 \rightarrow h''(1) = 24 + 4 = 28$$

 تابع در $x = 1$ (گوشه) و $x = -1$ (ناپیوسته) مشتق ناپذیر است.

(۳۶)

الف

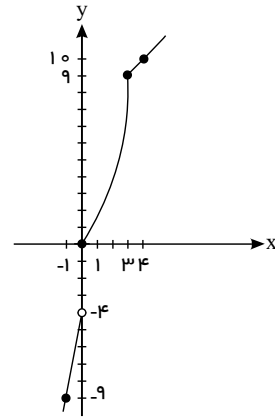
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 0$
 تابع در $x = 0$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است. \rightarrow
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + 1) = 1$

$$f(x) = (x^x - 3x)^5 \rightarrow f'(x) = 5(x^x - 3x)^4 (4x^x - 3)$$

مماس قائم

۳۹

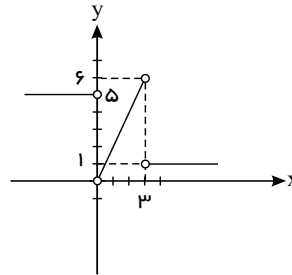
(الف)



(ب) تابع در $x = 0$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است و $x = 3$ طول نقطه گوشه‌ای (زاویه دار) تابع است بنابراین تابع در $x = 3$ نیز مشتق ناپذیر است.

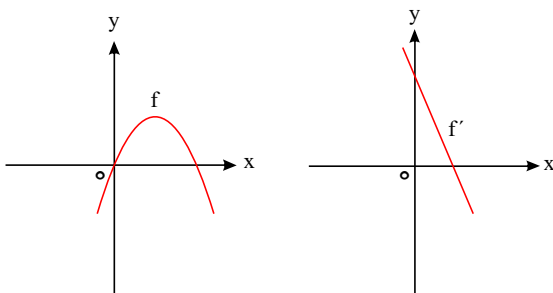
$$پ) f'(x) = \begin{cases} 5 & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

(ت) نمودار f'

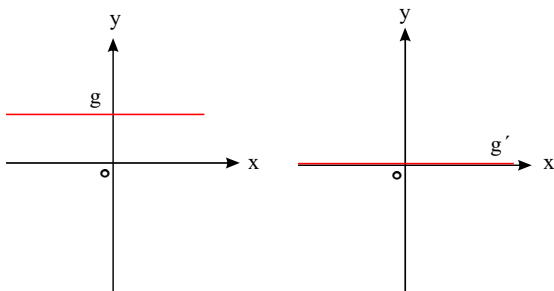


۴۰

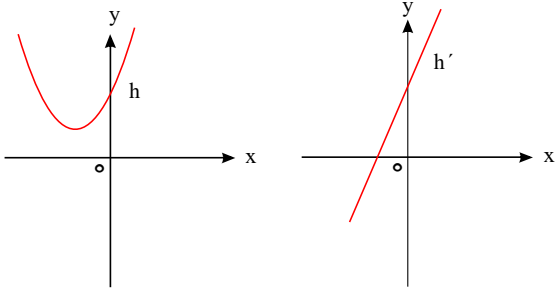
(۱) شکل ابتدا صعودی و سپس نزولی است. آن قسمت از شکل که صعودی است در نمودار f' بالای محور x ها و آن قسمت از شکل که نزولی است در نمودار f' پایین محور x است.



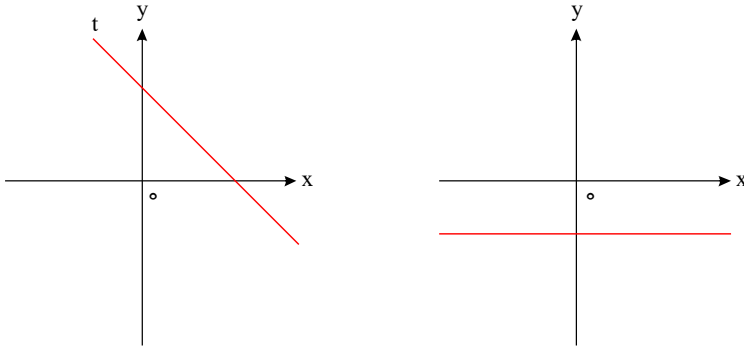
(۲) g تابع ثابت است و مشتق آن صفر می‌شود. بنابراین نمودار g' روی محور x ها است.



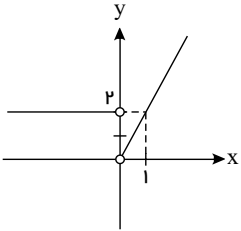
۳) شکل ابتدا نزولی و سپس صعودی است. آن قسمت از شکل که نزولی است در نمودار h' پایین محور x ها و آن قسمت از شکل که صعودی است در نمودار h' بالای محور x ها است.



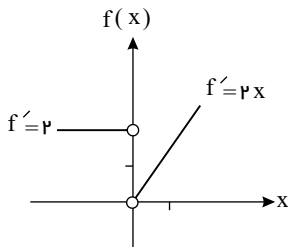
۴) شکل یک تابع خطی با شیب منفی است پس مشتق آن یک عدد منفی است یعنی نمودار t' آن یک خط افقی پایین محور x ها است.



$$f'(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$$



$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$



(۴۵) الف)

شیب خط d نشان دهنده شیب خط گذرنده از دو نقطه $t = 4$ و $t = 6$ است، یعنی شیب خط d برابر با آهنگ تغییر متوسط در بازه $[4, 6]$ است. شیب خط l نشان دهنده شیب خط مماس در نقطه $t = 6$ است، یعنی شیب خط l برابر با آهنگ لحظه‌ای تغییر در $t = 6$ است.

ب)

برای مقایسه گسترش آلودگی در زمان‌های $t = 1$ ، $t = 2$ و $t = 3$ باید خط مماس بر تابع در این زمان‌ها را رسم کنیم، که داریم:

شیب خط مماس در $t = 1 >$ شیب خط مماس در $t = 2 >$ شیب خط مماس در $t = 3$

بنابراین آهنگ لحظه‌ای تغییر یعنی سرعت گسترش آلودگی در $t = 3$ بیشتر است.

ب)

با رسم خط مماس در نقاط $t = 4$ ، $t = 5$ و $t = 6$ داریم:



$$[0, 5] \text{ در } \text{سرعت متوسط} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{(25 - 5 + 10) - (0 - 0 + 10)}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای} = f'(t) = 2t - 1$$

$$\text{پس: } 2t - 1 = 4 \rightarrow 2t = 5 \rightarrow t = 2,5$$

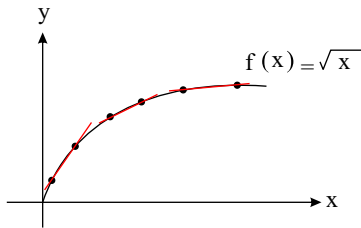
$$\frac{f(0,4) - f(0,3)}{0,4 - 0,3} = \frac{16,3 - 15,1}{0,1} = \frac{1,2}{0,1} = 12$$

$$\frac{f(0,5) - f(0,4)}{0,5 - 0,4} = \frac{17,4 - 16,3}{0,1} = \frac{1,1}{0,1} = 11$$

سرعت توپ در ارتفاع نظیر زمان ۰٫۴ ثانیه باید عددی بین ۱۱ و ۱۲ باشد بنابراین گزینهٔ ب، درست است.

(الف) نادرست است. (۴۷)

$$f(x) = x^2 - x \rightarrow \begin{cases} \text{آهنگ تغییر متوسط در } [0,1] = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{0 - 0}{1} = 0 \\ \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای در } x = 0 = f'(0) = 2x - 1 = 2(0) - 1 = -1 \end{cases}$$



(ب) نادرست است.

تابع $f(x) = \sqrt{x}$ تابعی صعودی است ولی آهنگ تغییر متوسط آن نزولی است:

(پ) نادرست است.

$$f(x) = x^3 - x^2 \rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(x) = 3x^2 - 2x \rightarrow f'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{الف) آهنگ تغییر متوسط در } [0, 1] = \frac{V(1) - V(0)}{1 - 0} = \frac{40(1 - \frac{1}{100})^2 - 40(1 - 0)^2}{1}$$

$$= 39,204 - 40 = -0,796$$

$$\text{ب) آهنگ تغییر متوسط در } [0, 100] = \frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = \frac{40(1 - \frac{100}{100})^2 - 40(1 - \frac{0}{100})^2}{100}$$

$$= \frac{0 - 40}{100} = -0,4$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = V'(t) = 80(1 - \frac{t}{100})(\frac{-1}{100}) = -0,8(1 - \frac{t}{100})$$

$$\text{پس: } -0,4 = -0,8(1 - \frac{t}{100}) \rightarrow 1 = 2(1 - \frac{t}{100}) \rightarrow 1 = 2 - \frac{t}{50} \rightarrow \frac{t}{50} = 1 \rightarrow t = 50$$

$$\text{الف) } m(4) - m(3) = (\sqrt{4} + 2(4)^3) - (\sqrt{3} + 2(3)^3)$$

$$= 2 + 128 - \sqrt{3} - 54 = 76 - \sqrt{3} \sim 74,3$$

$$\text{ب) } m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \rightarrow m'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 54 \sim 54,29$$

$$\left. \begin{aligned} \text{سرعت متوسط} &= \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{28 - 0}{4} = 7 \\ \text{سرعت لحظه‌ای} &= f'(t) = 4t - 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow 4t - 1 = 7 \rightarrow t = 2$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} = \frac{(\sqrt{4} + 128) - (\sqrt{3} + 54)}{1} = 76 - \sqrt{3}$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{(35 + 50) - (0 + 50)}{25} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$d(t) = -5t^2 + 20t \rightarrow d'(t) = -10t + 20 \rightarrow d'(2) = -20 + 20 = 0$$

$$\text{سرعت متوسط در } [0, 5] = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{(25 - 5 + 10) - 10}{5} = 4$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای} = 2t - 1$$

$$\text{طبق فرض: } 2t - 1 = 4 \rightarrow 2t = 5 \rightarrow t = \frac{5}{2}$$

الف

$$m(4) - m(1) = (2 + 128) - (1 + 2) = 127$$

ب

$$m(t) = \sqrt{t} + 2t^3 \rightarrow m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2$$

$$\rightarrow m'(4) = \frac{1}{4} + 96 = 96,25$$