



اتحادهای مثلثاتی

۱) فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

تمرین های کتاب - ۴۸

(ب) $\sin 2\alpha$

(الف) $\cos 2\alpha$

تمرین های کتاب - ۴۸

۲) نسبت‌های مثلثاتی زاویه $22,5^\circ$ را به دست آورید.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

ت) مقدار $\sin 22,5^\circ$ را به دست آورید.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

۴) مقدار $\sin 15^\circ$ را بیابید.

نمودار توابع مثلثاتی و دوره‌ی تناوب

۵) الف) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود)

۱۴۰۰ - سوال های امتحانی - $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

ب) مقدار عددی $\sin 15^\circ$ را محاسبه کنید.

۶) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود)

۱۳۹۹ - سوال های امتحانی - $y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2$



۷) اگر دوره تناوب $f(x) = 3 \cos(mx) + 4$ برابر با $\frac{\pi}{5}$ باشد، دوره تناوب تابع

متنا - ۱۳۹۸

$$g(x) = -\cos(m+2)x \quad (m > 0)$$

۸) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هریک از توابع زیر را به دست آورید. تمرین های کتاب - ۴۰

الف

$$y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2$$

تمرین های کتاب - ۴۰

ب

$$y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x$$

تمرین های کتاب - ۴۰

پ

$$y = -\frac{3}{4} \cos 3x$$

تمرین های کتاب - ۴۰

۹) الف) دوره تناوب و مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $y = 2 - 3 \sin 4x$ را به دست آورید.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

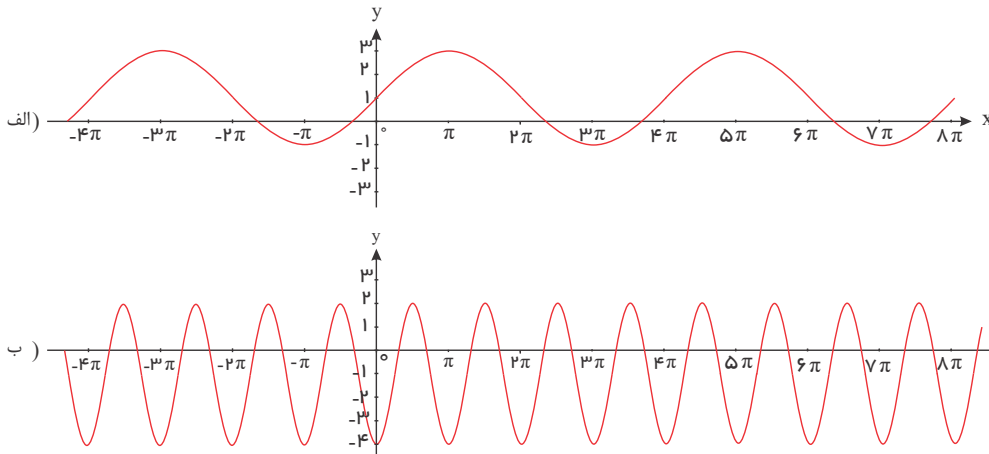
ب) دامنه تابع $f(x) = \tan(2x)$ را به دست آورید.

۱۰) الف) مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $y = 1 - 2 \sin\left(\frac{-\pi}{3}x\right)$ را به دست آورید.

ب) معادله مثلثاتی $\cos 2\alpha - \sin \alpha + 1 = 1$ را حل کرده، جواب های کلی آن را سوال های امتحانی - ۱۳۹۸ بنویسید.

۱۱ ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

تمرین های کتاب - ۴۱



۱۲ ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = |2 \sin 3x - 4|$ (الف) متنا - ۱۳۹۸

ب) $g(x) = |4 \cos 2x - 3|$

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

۱۳ به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) دوره تناوب و مقدار ماکسیمم و مینیمم تابع $y = -3 \cos 2\pi x + 1$ را به دست آورید.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

۱۴ در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

تمرین های کتاب - ۴۱

الف)

$$T = 3, \quad Max = 9, \quad Min = 3$$

تمرین های کتاب - ۴۱

ب)

$$T = 4\pi, \quad Max = -1, \quad Min = -7$$

تمرین های کتاب - ۴۱

تمرین های کتاب - ۴۱

۱۵ کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک نادرست است؟

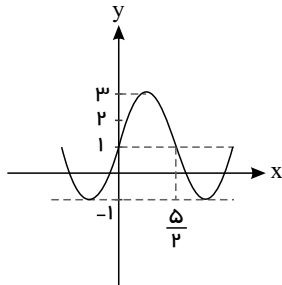
الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است. تمرین های کتاب - ۴۱

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. تمرین های کتاب - ۴۱

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد. تمرین های کتاب - ۴۱

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. تمرین های کتاب - ۴۱

۱۶) اگر نمودار تابع $f(x) = a \sin bx + c$ بصورت زیر باشد، ضابطه آن را بنویسید. منتهای - ۱۳۹۸



۱۷) اگر دوره تناوب تابع $f(x) = m \cos(mx) + 3$ برابر با $\frac{\pi}{4}$ باشد، مینیمم و ماکزیمم تابع را بیابید. ($m > 0$) منتهای - ۱۳۹۸

۱۸) اگر $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$ و $\tan \alpha = \frac{2m-1}{3}$ ، آنگاه حدود m را بیابید. منتهای - ۱۳۹۸

۱۹) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

$$y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x$$

۲۰) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود). سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

$$y = \pi \sin(-x) + 1$$

۲۱) در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. سوال های امتحانی - ۱۳۹۹



سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

الف) برد تابع $y = \tan x$ برابر است.ف) معادلهٔ مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کرده و جواب های کلی آن را بنویسید.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

۲۳) معادلهٔ مثلثاتی $\sin x - \cos 2x = 0$ را حل کنید.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

۲۴) معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

تمرین های کتاب - ۴۸

۲۵) معادلات زیر را حل کنید.

الف)

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0$$

تمرین های کتاب - ۴۸

ب)

$$\cos x = \cos 2x$$

تمرین های کتاب - ۴۸

پ)

$$\cos 2x - \sin x + 1 = 1$$

تمرین های کتاب - ۴۸

ت)

$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$$

تمرین های کتاب - ۴۸

ث

$$\sin x - \cos 2x = 0$$

تمرین های کتاب - ۴۸

منتا - ۱۳۹۸

۲۶) جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 3x + \sin 5x = 0$ را بیابید.

۲۷) جواب های کلی معادله زیر را بیابید.

$$\tan 4x = \cot\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right)$$

منتا - ۱۳۹۸

۲۸) معادلات زیر را حل کنید.

منتا - ۱۳۹۸

الف) $\sin 2x + 3 \cos x = 0$

ب) $4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1$

۲۹) معادله مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2 \cos\left(\frac{5\pi}{8} - x\right) = 3$$

منتا - ۱۳۹۸

۳۰) معادله مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\tan^2 x + \sqrt{3} \tan x = 0$$

منتا - ۱۳۹۸

۳۱) معادله مثلثاتی $\cos(2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

۳۲) معادله مثلثاتی $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

۳۳) معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.

سوال های امتحانی - ۱۴۰۰

پاسخنامه تشریحی

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{12}{13} \xrightarrow{\alpha \text{ حاده است.}} \sin \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\text{الف) } \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2\left(\frac{25}{169}\right) - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{-119}{169}$$

$$\text{ب) } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{120}{169}$$

$$۱) \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \rightarrow \sin^2 22,5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \rightarrow \sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$۲) \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \rightarrow \cos^2 22,5^\circ = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \rightarrow \cos 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$۳) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \tan 22,5^\circ = \frac{\sin 22,5^\circ}{\cos 22,5^\circ} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$۴) \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \rightarrow \cot 22,5^\circ = \frac{1}{\tan 22,5^\circ} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

ت

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \rightarrow \sin^2 22,5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \rightarrow \sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$y = a \cos bx + c \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} \\ \max = |a| + c \\ \min = -|a| + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi \\ \max = |8| + 0 = 8 \\ \min = -|8| + 0 = -8 \end{cases}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

۶) در تابع $y = a \sin bx + c$ می‌دانیم که $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $Max = |a| + c$ و $Min = -|a| + c$ است.

$$y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi \\ \max = |-\pi| - 2 = \pi - 2 \\ \min = -|-\pi| - 2 = -\pi - 2 \end{cases}$$

۱

۲

۴

۵
الف

۶



$$\text{می دانیم: } f(x) = a \cos bx + c \text{ و } f(x) = a \sin bx + c \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$f(x) = 3 \cos(mx) + 4 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow m = 10$$

$$\Rightarrow g(x) = -\cos 12x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

الف

$$y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \xrightarrow[\text{Max} = |a| + c, \text{Min} = -|a| + c]{y = a \sin bx + c, T = \frac{2\pi}{|b|}} T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$$

$$\text{, } \text{Max} = |-\pi| - 2 = \pi - 2 \text{ , } \text{Min} = -|-\pi| - 2 = -\pi - 2$$

ب

$$y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x \xrightarrow[\text{Max} = |a| + c, \text{Min} = -|a| + c]{y = a \cos bx + c, T = \frac{2\pi}{|b|}} T = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{2}\right|} = 4$$

$$\text{, } \text{Max} = | -1 | + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} \text{ , } \text{Min} = -| -1 | + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3}$$

پ

$$y = -\frac{3}{4} \cos 3x \xrightarrow[\text{Max} = |a| + c, \text{Min} = -|a| + c]{y = a \cos bx + c, T = \frac{2\pi}{|b|}} T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{, } \text{Max} = | -\frac{3}{4} | + 0 = \frac{3}{4} \text{ , } \text{Min} = -| -\frac{3}{4} | + 0 = -\frac{3}{4}$$

الف ۹

$$y = a \sin bx + c \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} \\ \text{Max} = |a| + c \\ \text{Min} = -|a| + c \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Max} = |a| + c = | -3 | + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$\text{Min} = -|a| + c = -| -3 | + 2 = -3 + 2 = -1$$

$$y = \tan f(x) \rightarrow f(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \tan 2x \rightarrow 2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

الف ۱۰ می دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ همواره داریم: $\text{Max} = |a| + c$ و $\text{Min} = -|a| + c$

$$\text{پس: } \begin{cases} \text{Max} = | -2 | + 1 = 2 + 1 = 3 \\ \text{Min} = -| -2 | + 1 = -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

ب می دانیم که $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ است.

$$\cos 2\alpha - \sin \alpha + 1 = 1 \rightarrow \cos 2\alpha - \sin \alpha = 0 \rightarrow 1 - 2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha = 0 \rightarrow 2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$$

پس:

ب

پس:



$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \sin \alpha = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{c}{a} = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow \alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

(الف) نمودار داده شده یک تابع سینوسی با $T = 4\pi$ و $Max = 3$ و $Min = -1$ است. $(y = a \sin bx + c)$ (۱۱)

$$T = 4 \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \rightarrow |b| = \frac{1}{4} \rightarrow b = \pm \frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} Max = 3 \rightarrow |a| + c = 3 \\ Min = -1 \rightarrow -|a| + c = -1 \end{array} \right\} \rightarrow c = 1, a = \pm 2$$

چون شکل، فرمت خود سینوس را دارد باید $ab > 0$ باشد پس:

$$y = 2 \sin\left(\frac{1}{4}x\right) + 1 \quad \text{یا} \quad y = -2 \sin\left(\frac{1}{4}x\right) + 1$$

(ب) نمودار داده شده یک تابع کسینوسی با $T = \pi$ و $Max = 2$ و $Min = -4$ است. $(y = a \cos bx + c)$

$$T = \pi \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \rightarrow |b| = 2 \rightarrow b = \pm 2$$

$$\left. \begin{array}{l} Max = 2 \rightarrow |a| + c = 2 \\ Min = -4 \rightarrow -|a| + c = -4 \end{array} \right\} \rightarrow c = -1, a = \pm 3$$

چون شکل، فرمت قرینه کسینوس را دارد باید $a < 0$ باشد پس:

$$y = -3 \cos(\pm 2x) - 1$$

(۱۲)

(الف) $f(x) = |2 \sin 3x - 4|$

$$-1 \leq \sin 3x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \sin 3x \leq 2 \Rightarrow -2 - 4 \leq 2 \sin 3x - 4 \leq 2 - 4$$

$$\Rightarrow -6 \leq 2 \sin 3x - 4 \leq -2 \Rightarrow 2 \leq |2 \sin 3x - 4| \leq 6 \Rightarrow 2 \leq f(x) \leq 6 \Rightarrow \begin{cases} \max f = 6 \\ \min f = 2 \end{cases}$$

(ب) $g(x) = |4 \cos 2x - 3|$

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 4 \cos 2x \leq 4 \Rightarrow -4 - 3 \leq 4 \cos 2x - 3 \leq 4 - 3$$

$$-7 \leq 4 \cos 2x - 3 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |4 \cos 2x - 3| \leq 7 \Rightarrow 0 \leq g(x) \leq 7 \Rightarrow \begin{cases} \min g = 0 \\ \max g = 7 \end{cases}$$

(۱۳)

(الف) در تابع $y = a \cos bx + c$ دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $Max = |a| + c$ و $Min = -|a| + c$ است.

$$y = -3 \cos 2\pi x + 1 \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1 \\ Max = |-3| + 1 = 3 + 1 = 4 \\ Min = -|-3| + 1 = -3 + 1 = -2 \end{cases}$$

(۱۴)

تابع مثلثاتی را $y = a \sin bx + c$ در نظر می‌گیریم.

(الف)

$$T = 3 \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 3 \rightarrow |b| = \frac{2\pi}{3} \rightarrow b = \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{cases} Max = |a| + c = 9 \\ Min = -|a| + c = 3 \end{cases} \rightarrow c = 6, a = \pm 3 \xrightarrow{\text{بافرض } a > 0, b > 0} y = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + 6$$

تابع مثلثاتی را $y = a \sin bx + c$ در نظر می‌گیریم.

(ب)

$$T = 4\pi \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} Max = |a| + c = -1 \\ Min = -|a| + c = -7 \end{cases} \rightarrow c = -4, a = \pm 3 \xrightarrow{\text{بافرض } a > 0, b > 0} y = 3 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 4$$

(۱۵)

الف نادرست

ب نادرست

 پ درست ← در بازه 0 تا π تابع غیر صعودی است.

ت درست

۱۶

$$\frac{T}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow T = 5 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 5 \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{5} \xrightarrow{b>0} b = \frac{2\pi}{5}$$

$$\left. \begin{aligned} \max &= |a| + c = 3 \\ \min &= -|a| + c = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \rightarrow |a| = 2 \xrightarrow{a>0} a = 2$$

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{5}x\right) + 1$$

 ۱۷ در تابع $y = a \cos bx + c$ داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}, \max = |a| + c, \min = -|a| + c$$

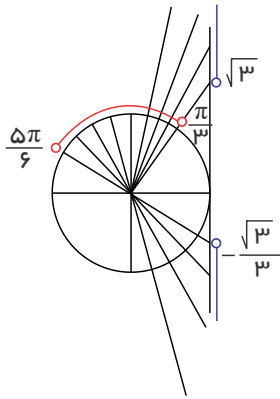
$$f(x) = m \cos(mx) + 3 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow m = 8$$

$$f(x) = 8 \cos(8x) + 3 \rightarrow \max = 8 + 3 = 11, \min = -8 + 3 = -5$$

۱۸

با توجه به دایره مثلثاتی مقابل داریم:

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{6}$$



$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \tan \alpha > \sqrt{3} \text{ یا } \tan \alpha < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2m-1}{3} > \sqrt{3} \text{ یا } \frac{2m-1}{3} < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow 2m-1 > 3\sqrt{3} \text{ یا } 2m-1 < -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow m > \frac{3\sqrt{3}+1}{2} \text{ یا } m < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

 ۱۹ دوره تناوب تابع $y = a \cos bx + c$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$\max = |a| + c = |-1| + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$$

$$\min = -|a| + c = -|-1| + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3}$$

 ۲۰ در تابع $y = a \sin bx + c$ و $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $\max = |a| + c$ و $\min = -|a| + c$ است.

$$y = \pi \sin(-x) + 1 \rightarrow y = -\pi \sin x + 1 \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi \\ \max = |a| + c = |-\pi| + 1 = \pi + 1 \\ \min = -|a| + c = -|-\pi| + 1 = -\pi + 1 \end{cases}$$

۲۱

 الف $(-\infty, +\infty)$

 می دانیم که $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}} \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

 ۲۲ می دانیم که $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ است.



$$\sin x - \cos^2 x = 0 \rightarrow \sin x - (1 - \sin^2 x) = 0 \rightarrow \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\sin x=A} \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} A = -1 \\ A = -\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A = -1 \rightarrow \sin x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

۲۴ می‌دانیم $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ است.

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۲۵

الف

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \xrightarrow{\cos 2x = 2\cos^2 x - 1} 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0$$

$$\rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

ب

$$\cos 2x = \cos x \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm x$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \rightarrow 3x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

پ

$$\cos 2x - \sin x + 1 = 1 \rightarrow \cos 2x - \sin x = 0$$

$$\xrightarrow{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x} 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\sin x=A} \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} A = -1 \\ A = -\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A = -1 \rightarrow \sin x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

ت



$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \xrightarrow{\sin x = A} A^2 + A - \frac{3}{4} = 0$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)\left(\frac{-3}{4}\right) = 1 + 3 = 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \\ A = \frac{-1 - 2}{2} = \frac{-3}{2} \rightarrow \sin x = -\frac{3}{2} < -1 \text{ امکان ندارد} \end{cases}$$

ث

$$\sin x - \cos 2x = 0 \xrightarrow{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x} \sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0$$

$$\rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \xrightarrow{\sin x = A} 2A^2 + A - 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} A = -1 \\ A = -\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A = -1 \rightarrow \sin x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\sin u = \sin v \Rightarrow u = 2k\pi + v, \quad u = 2k\pi + \pi - v \text{ نکته:}$$

$$\sin 3x + \sin 5x = 0 \Rightarrow \sin 5x = -\sin 3x = \sin(-3x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x = 2k\pi - 3x \Rightarrow 8x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \\ 5x = 2k\pi + \pi - (-3x) = 2k\pi + \pi + 3x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{u} x = \frac{k\pi}{4}$$

$$\text{نکته: } \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \quad \tan u = \tan v \rightarrow u = k\pi + v$$

$$\tan 4x = \cot\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) \Rightarrow \tan 4x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)\right)$$

$$\Rightarrow \tan 4x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 4x$$

$$\Rightarrow 8x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{16}$$

۲۸

$$\text{نکته: } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{نکته: } \sin u = \sin v \rightarrow u = 2k\pi + v, \quad u = 2k\pi + \pi - v$$

$$\text{الف) } \sin 2x + 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x + 3 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2 \sin x + 3) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad 2 \sin x + 3 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{2} \text{ غ ق}$$

۲۶

۲۷



$$\Rightarrow 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Rightarrow 2 \times 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Rightarrow 2 \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{۲۹) میدانیم: } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\sin^2\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) + 2 \cos\left(\frac{5\pi}{\lambda} - x\right) = 3 \Rightarrow \sin^2\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{5\pi}{\lambda} - x\right)\right) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{\lambda} + x\right) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) - 3 = 0, \sin\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) = t$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1, t = -3$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) = -3 \text{ غ ق قبول } , \sin\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\lambda} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{\lambda}$$

$$\text{نکته: } \tan u = \tan v \Rightarrow u = k\pi + v$$

$$\tan^2 x + \sqrt{3} \tan x = 0 \Rightarrow \tan x (\tan x + \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \tan x = 0, \tan x = -\sqrt{3}$$

$$\tan x = 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\tan x = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\cos x (2 \cos x - 9) = 5 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0 \xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 - 9A - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 81 + 40 = 121$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + 11}{4} = 5 \rightarrow \cos x = 5 \text{ (امکان ندارد)} \\ A = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - 11}{4} = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \xrightarrow{\sin x = A} A^2 + A - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 + 3 = 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \\ \sin x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 2}{2} = -\frac{3}{2} < -1 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}} \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۳۰

۳۱

۳۲

۳۳