سبقت (۰۵۱-۳۸۱۱۷)

توابع صعودی و نزولی و تابع $y=x^3$

۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

الف اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، آنگاه f در a مشتق‌پذیر است. سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

نقاط بحرانی

۲ نمودار تابعی مانند f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را رسم کنید به‌طوری که هر نقطهٔ دلخواه از D_f، یک نقطهٔ بحرانی f باشد. مسئله چند جواب دارد؟ تمرین های کتاب- ۱۱۲

۳ نقاط بحرانی توابع زیر را درصورت وجود به‌دست آورید. تمرین های کتاب- ۱۱۲

الف

$$f(x)=\sqrt{4-x^2}$$

تمرین های کتاب- ۱۱۲

ب

$$g(x)=x^3+3x^2-4$$

تمرین های کتاب- ۱۱۲

پ

$h(x) = \sqrt[3]{x}$

تمرین های کتاب- ۱۱۲

ث هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

اکسترمم‌های مطلق

۵ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۳x^۲ - ۱۲x$ را در بازهٔ $[-۱, ۳]$ به‌دست آورید.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

۶ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۳x + ۷$ را در بازهٔ $[-۱, ۳]$، درصورت وجود به‌دست آورید.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

۷ تابع $f(x) = -۲x^۳ + ۳x^۲ + ۱۲x - ۹$ را در نظر بگیرید:

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

الف مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در بازه $[۰, ۳]$ در صورت وجود به‌دست آورید.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

توابع صعودی و نزولی

۸ با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x) = \frac{۱}{x^۲ + ۱}$، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است؟

تمرین های کتاب- ۱۱۲

د تابع $f(x) = x^۳ - ۳x$ در بازهٔ $(-۱, ۱)$ اکیداً صعودی است.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

اکسترمم‌های نسبی

۱۰) الف) جدول تغییرات تابع $f(x)=۲x^۳+۳x^۲-۱۲x$ را رسم و نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی آن را مشخص کنید. سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

ب) نقاط بحرانی تابع f و اکسترمم مطلق این تابع را در بازهٔ $[-۱,۳]$ مشخص کنید.

۱۱) الف) جدول تغییرات تابع $f(x)=x^۳-۳x+۴$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

ب) اکسترمم‌های مطلق تابع $g(x)=x^۳+۲x-۵$ را در بازهٔ $[-۲,۱]$ در صورت وجود تعیین کنید.

۱۲) اگر تابع $f(x)=ax^۲+bx$ در $x=۱$ دارای ماکسیمم نسبی برابر ۷ باشد، مقادیر a و b را به‌دست آورید. سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

۱۳) در تابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به‌دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$f(x)=x^۳+۳x^۲-۹x-۱۰$ سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

۱۴) مقادیر ماکسیمم مطلق و مینمم مطلق توابع زیر را در بازه‌های مشخص‌شده، درصورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=-۲x^۳+۹x^۲-۱۳ \quad ; \quad x\in[-۱,۲]$ تمرین های کتاب- ۱۱۲

ب) $g(x)=x^۳+۲x-۵ \quad ; \quad x\in[-۲,۱]$

۱۵) اگر نقطهٔ $(۲,۱)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۳+bx^۲+d$ باشد، مقادیر b و d را به‌دست آورید. سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

۱۶) در هریک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به‌دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. تمرین های کتاب- ۱۱۲

الف

$$f(x) = x^۳ + ۳x^۲ - ۹x - ۱۰$$

تمرین های کتاب- ۱۱۲

ب

$$g(x) = -۲x^۳ + ۳x^۲ + ۱۲x - ۹$$

تمرین های کتاب- ۱۱۲

پ

$$h(x) = -x^۳ - ۳x + ۲$$

تمرین های کتاب- ۱۱۲

۱۷) اگر تابع $f(x) = ax^۲ + bx$ در $x = ۱$ دارای اکسترمم نسبی برابر -۳ باشد، مقادیر a و b را بیابید.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

۱۸) در تابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$f(x) = x^۳ + ۳x^۲ - ۹x - ۱۰$ سوال های امتحانی- ۱۴۰۰

ظ با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

بهینه سازی

۲۰) اگر محیط یک مستطیل ۲۴ سانتی‌متر باشد. طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکسیمم شود.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

۲۱) دو عدد حقیقی a و b را طوری بیابید که داشته باشیم $۲a + b = ۶۰$ و حاصل‌ضرب آن‌ها بیشترین مقدار ممکن گردد.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

۲۲ ورق فلزی مربع شکل به‌طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشهٔ آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبهٔ جعبه را به اندازهٔ x برمی‌گردانیم تا یک جعبهٔ در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟

سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

۲۳ دو عدد حقیقی را بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

۲۴ الف) می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به‌شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینهٔ ۱۰۰ متر نرده را دراختیار داشته باشیم، در این‌صورت بیش‌ترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

تمرین های کتاب- ۱۲۰

ب) بدون استفاده از مشتق نیز، این مسئله را حل کنید.

۲۵ هر صفحهٔ مستطیل‌شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت $32cm^2$ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایینی هر صفحه $2cm$ و حاشیه‌های کناری هرکدام یک سانتی‌متر درنظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کم‌ترین مقدار ممکن باشد.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

۲۶ کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعهٔ مستطیل‌شکل به‌مساحت ثابت ۱۰۰۰۰ مترمربع را دیوارکشی کند. هزینهٔ هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینهٔ هرمتر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است.

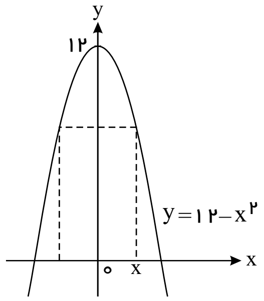
تمرین های کتاب- ۱۲۰

الف) هزینهٔ موردنیاز برای انجام این کار را به‌صورت یک تابع بنویسید.

ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینهٔ دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

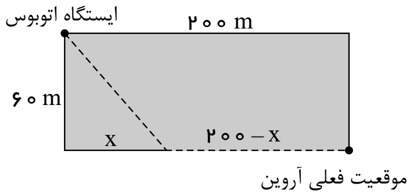
۲۷ ابعاد مستطیلی با بیش‌ترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور xها و دو رأس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی $y = ۱۲ - x^۲$ باشند.

تمرین های کتاب- ۱۲۰



۲۸ آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰متری غرب و ۶۰متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت ۳ متربرثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به‌سمت غرب برود. همچنین، می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت $۲\ m/s$ عبور کند. باتوجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کم‌ترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.

تمرین های کتاب- ۱۲۰



۲۹ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۲۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

۳۰ نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشد.

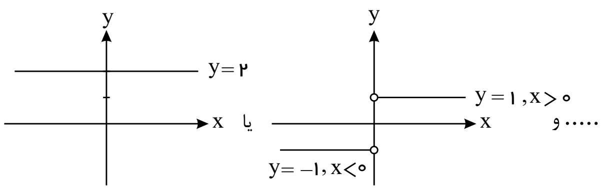
سوال های امتحانی- ۱۴۰۰

پاسخنامه تشریحی

۱

الف نادرست

۲ مسئله بی‌شمار جواب دارد و هر تابعی که قسمتی از آن به‌صورت خط افقی است جواب مسئله است مانند:



۳

الف

$f(x)=\sqrt{4-x^2} \to D_f: 4-x^2 \geq 0 \to x^2 \leq 4 \to x \in [-2,2]$

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=0 \to \begin{cases} -2x=0 \to x=0 \xrightarrow{\text{تابع}} y=2 \to \left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right. \text{ نقطهٔ بحرانی} \\ 4-x^2=0 \to x=\pm 2 \to \text{ اول و آخر بازه بحرانی هستند. } \to \left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right. , \left|\begin{matrix}-2\\0\end{matrix}\right. \end{cases}$$

ب

$g(x)=x^3+3x^2-4 \to D_g=(-\infty,+\infty)$

$$g'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)=0 \to \begin{cases} x=0 \xrightarrow{\text{تابع}} y=-4 \to \left|\begin{matrix}0\\-4\end{matrix}\right. \text{ نقطهٔ بحرانی} \\ x=-2 \xrightarrow{\text{تابع}} y=0 \to \left|\begin{matrix}-2\\0\end{matrix}\right. \text{ نقطهٔ بحرانی} \end{cases}$$

پ

$h(x)=\sqrt[3]{x} \to D_h=(-\infty,+\infty)$

$$h'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=0$$

مشتق صفر نمی‌شود ولی به‌ازای $x=0$ (ریشهٔ مخرج) مشتق وجود ندارد بنابراین $x=0$ طول نقطهٔ بحرانی تابع است.

$x=0 \xrightarrow{\text{تابع}} y=0 \to \left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ **نقطهٔ بحرانی**

ث درست

۵

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x \to f'(x)=6x^2+6x-12=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=-2 \text{ (غ ق ق (در بازه نیست} \end{cases}$$

$$\text{پس:} \begin{cases} f(-1)=-2+3+12=13 \\ f(3)=54+27-36=45 \to \text{ مطلق } Max \\ f(1)=2+3-12=-7 \to \text{ مطلق } Min \end{cases}$$

۶

$$f(x)=x^3-3x+7 \to f'(x)=3x^2-3=0 \to \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \to \begin{cases} f(-1)=-1+3+7=9 \\ f(3)=27-9+7=25 \to \text{ مطلق } max \\ f(1)=1-3+7=5 \to \text{ مطلق } min \end{cases}$$

۷

الف

$$f'(x)=-6x^2+6x+12=0 \to \begin{cases} x=-1 \text{ (غ ق ق (در بازه قرار ندارد.} \\ x=2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} f(0) = -9 \rightarrow \text{مطلق } Min \\ f(3) = 0 \\ f(2) = 11 \rightarrow \text{مطلق } Max \end{cases}$$

۸

$$g(x) = \frac{1}{x^2+1} \rightarrow g'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

۹ نادرست

د

علت: $f'(x) = 3x^2 - 3 > 0 \rightarrow 3x^2 > 3 \rightarrow x^2 > 1 \rightarrow x > 1$ یا $x < -1$

۱۰

الف) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x \rightarrow f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = -2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	20 Max	$\searrow$	-7 Min	$\nearrow$	$+\infty$

ب) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ قق} \rightarrow \left| \begin{matrix} 1 \\ -7 \end{matrix} \right. \text{ نقطهٔ بحرانی} \\ x = -2 \text{ (در بازه نیست) غ‌قق} \end{cases}$

پس : $\begin{cases} f(-1) = -2 + 3 + 12 = 13 \\ f(3) = 54 + 27 - 36 = 45 \rightarrow \text{مطلق } Max \rightarrow \left| \begin{matrix} 3 \\ 45 \end{matrix} \right. \\ f(1) = 2 + 3 - 12 = -7 \rightarrow \text{مطلق } Min \rightarrow \left| \begin{matrix} 1 \\ -7 \end{matrix} \right. \end{cases}$

۱۱ الف)

$$f(x) = x^3 - 3x + 4 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$\rightarrow$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	6 Max	$\searrow$	2 Min	$\nearrow$	$+\infty$

ب)

$g'(x) = 3x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{2}{3}$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

$$\rightarrow \begin{cases} g(-2) = -8 - 4 - 5 = -17 : \text{مطلق } Min \\ g(1) = 1 + 2 - 5 = -2 : \text{مطلق } Max \end{cases}$$

۱۲ نقاط اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای دو خاصیت هستند:

۱) در تابع صدق می‌کنند.

۲) طولشان مشتق را صفر می‌کند.

$\left| \begin{matrix} 1 \\ 7 \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 7 = a + b$

$\left| \begin{matrix} 1 \\ 7 \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{طولش مشتق را صفر می‌کند.}} f'(x) = 2ax + b \rightarrow 0 = 2a + b$

پس: $\begin{cases} a + b = 7 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \rightarrow a = -7 \, , \, b = 14$

۱۳

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = -3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۳		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۱۷	$\searrow$	-۱۵	$\nearrow$	$+\infty$
			Max		Min		

۱۴

الف) $f(x) = -۲x^۳ + ۹x^۲ - ۱۳ \to f'(x) = -۶x^۲ + ۱۸x = -۶x(x-۳) = ۰$

$$\to \begin{cases} x = ۰ & \text{ق ق} \\ x = ۳ & \text{(باتوجه به بازه) غ ق ق} \end{cases}$$

اکنون باید $f(۰)$ و $f(-۱)$ و $f(۲)$ را حساب کنیم.

$$\begin{cases} f(۰) = -۱۳ \to \text{مطلق } Min \\ f(-۱) = ۲ + ۹ - ۱۳ = -۲ \\ f(۲) = -۱۶ + ۳۶ - ۱۳ = ۷ \to \text{مطلق } Max \end{cases}$$

ب) $g(x) = x^۳ + ۲x - ۵ \to g'(x) = ۳x^۲ + ۲ = ۰ \to$ تابع فاقد نقطهٔ بحرانی است.

اکنون باید $g(-۲)$ و $g(۱)$ را حساب کنیم.

$$\begin{cases} g(-۲) = -۸ - ۴ - ۵ = -۱۷ \to \text{مطلق } Min \\ g(۱) = ۱ + ۲ - ۵ = -۲ \to \text{مطلق } Max \end{cases}$$

۱۵ نقطهٔ اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر، در تابع صدق می‌کند و طولش، مشتق را صفر می‌کند.

$$f(۲) = ۱ \to ۸ + ۴b + d = ۱ \to ۴b + d = -۷$$

$$f'(۲) = ۰ \xrightarrow{f'(x)=۳x^۲+۲bx} ۰ = ۱۲ + ۴b \to b = -۳\ ,\ d = ۵$$

۱۶

الف

$$f(x) = x^۳ + ۳x^۲ - ۹x - ۱۰ \to D_f = (-\infty, +\infty)$$

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۶x - ۹ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x = ۱ \\ x = \dfrac{c}{a} = -۳ \end{cases}$$

$\to$

x	$-\infty$		-۳		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۱۷ Max	$\searrow$	-۱۵ Min	$\nearrow$	$+\infty$

ب

$$g(x) = -۲x^۳ + ۳x^۲ + ۱۲x - ۹ \to D_g = (-\infty, +\infty)$$

$$g'(x) = -۶x^۲ + ۶x + ۱۲ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -۱ \\ x = -\dfrac{c}{a} = \dfrac{-۱۲}{-۶} = ۲ \end{cases}$$

$\to$

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-۱۶ Min	$\nearrow$	۱۱ Max	$\searrow$	$-\infty$

پ

$$h(x) = -x^۳ - ۳x + ۲ \to D_h = (-\infty, +\infty)$$

$h'(x) = -۳x^۲ - ۳ = ۰ \to -۳x^۲ = ۳ \to x^۲ = -۱$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

$\to$

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

تابع داده‌شده اکیداً نزولی است و درضمن نقطهٔ بحرانی و اکسترمم نسبی ندارد.

۱۷ اکسترمم‌های پیوسته و مشتق‌پذیر در تابع صدق کرده و طولشان، مشتق را صفر می‌کنند.

$$\left.\begin{array}{l} f(۱) = -۳ \to -۳ = a + b \\ f'(۱) = ۰ \to f'(x) = ۲ax + b \to ۰ = ۲a + b \end{array}\right\} \to a = ۳ \text{ و } b = -۶$$

۱۸

$$f(x)=x^{3}+3x^{2}-9x-10 \to f'(x)=3x^{2}+6x-9=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=\dfrac{c}{a}=-3 \end{cases}$$

$\to$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	17	$\searrow$	-15	$\nearrow$	
			max نسبی		min نسبی		

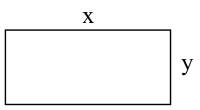
ظ

$$f(x)=-2x^{3}+3x^{2}+12x-9$$

$$\to f'(x)=-6x^{2}+6x+12=0 \xrightarrow{a+b=c} \begin{cases} x=-1 \\ x=-\dfrac{c}{a}=\dfrac{-12}{-6}=2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	11	$\searrow$	$-\infty$
			Min		Max		

۲۰



$$\text{محیط}=24 \to 2(x+y)=24 \to x+y=12 \to y=12-x$$

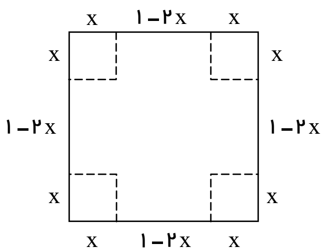
$$S=xy=x(12-x)=12x-x^{2} \xrightarrow{S'=0} 12-2x=0 \to x=6, y=6$$

۲۱

$$2a+b=60 \to b=60-2a$$

$$ab=a(60-2a)=60a-2a^{2} \xrightarrow{\text{مشتق}=0} 60-4a=0 \to a=15\ ,\ b=30$$

۲۲



$$\to V_{\text{جعبه}}=\text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع}$$

$$V=(1-2x)^{2}\cdot x=(1+4x^{2}-4x)x=4x^{3}-4x^{2}+x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=0} 12x^{2}-8x+1=0 \xrightarrow{\Delta=b^{2}-4ac=64-48=16} \begin{cases} x=\dfrac{8+4}{24}=\dfrac{1}{2} \quad \text{غ ق ق} \\ x=\dfrac{8-4}{24}=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

۲۳

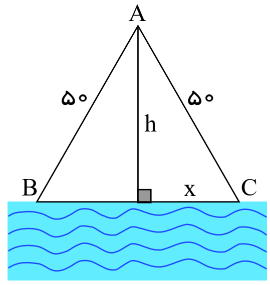
$$x-y=10 \to y=x-10$$

$$xy=x(x-10)=x^{2}-10x \xrightarrow{\text{مشتق}=0} 2x-10=0 \to x=5\ ,\ y=-5$$

۲۴ طبق شکل زیر در مثلث متساوی‌الساقین ABC طول هرکدام از ساق‌ها ۵۰ متر است. (ضلع سوم مثلث کنارهٔ رودخانه است و هزینهٔ ۱۰۰ متر نرده برای تشکیل دو ساق مثلث است.)

روش اول:

کاربرد مشتق نهایی با تمرین کتاب



دومتغیره : $S = \frac{۱}{۲}h(۲x) = hx$

فیثاغورث: $۲۵۰۰ = h^۲ + x^۲ \to x^۲ = ۲۵۰۰ - h^۲ \to x = \sqrt{۲۵۰۰ - h^۲}$

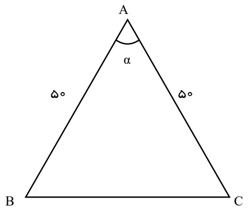
پس: $S = hx = h \cdot \sqrt{۲۵۰۰ - h^۲}$ یک‌متغیره $\xrightarrow{S'=۰} \sqrt{۲۵۰۰ - h^۲} + \frac{۱(-۲h)}{۲\sqrt{۲۵۰۰ - h^۲}}h = ۰$

$\to \sqrt{۲۵۰۰ - h^۲} = \frac{h^۲}{\sqrt{۲۵۰۰ - h^۲}} \to ۲۵۰۰ - h^۲ = h^۲ \to ۲h^۲ = ۲۵۰۰$

$\to h^۲ = ۱۲۵۰ = ۶۲۵ \times ۲ \to h = ۲۵\sqrt{۲}$ و $x = \sqrt{۲۵۰۰ - ۱۲۵۰} = \sqrt{۱۲۵۰} = ۲۵\sqrt{۲}$

بنابراین: $S_{Max} = (۲۵\sqrt{۲})(۲۵\sqrt{۲}) = ۱۲۵۰$

روش دوم:

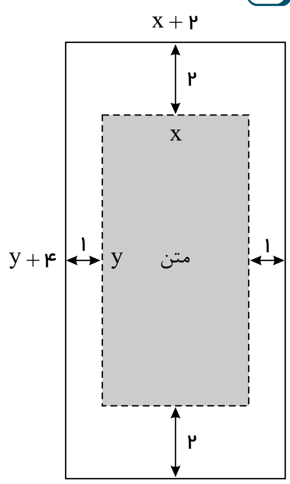


$$\begin{aligned} \to S &= \frac{۱}{۲}AB \times AC \times \sin\alpha \\ &= \frac{۱}{۲} \times ۵۰ \times ۵۰ \times \sin\alpha \\ &= ۱۲۵۰ \sin\alpha \end{aligned}$$

می‌دانیم که ماکسیمم $\sin\alpha$ برابر یک است پس:

$$S_{Max} = ۱۲۵۰ \times ۱ = ۱۲۵۰$$

۲۵



دومتغیره : $S = (x+۲)(y+۴) = xy + ۴x + ۲y + ۸$

مساحت متن $= ۳۲ \to xy = ۳۲ \to y = \frac{۳۲}{x}$

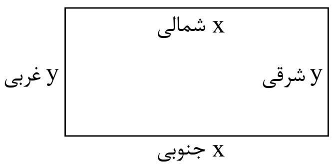
پس: $S = x(\frac{۳۲}{x}) + ۴x + ۲(\frac{۳۲}{x}) + ۸ = ۳۲ + ۴x + \frac{۶۴}{x} + ۸$

$= ۴۰ + ۴x + \frac{۶۴}{x}$: یک‌متغیره $\xrightarrow{S'=۰} ۴ - \frac{۶۴}{x^۲} = ۰$

$\to \frac{۶۴}{x^۲} = ۴ \to x^۲ = ۱۶ \to x = ۴ \xrightarrow{y=\frac{۳۲}{y}} y = ۸$

بنابراین ابعاد صفحه باید ۶ و ۱۲ باشد

۲۶



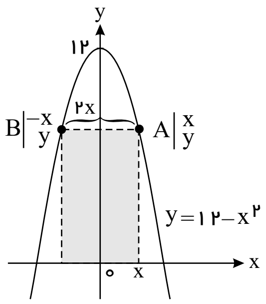
$\to xy = ۱۰۰۰۰ \to y = \frac{۱۰۰۰۰}{x}$

هزینهٔ دیوارکشی: $P(x) = ۲(x+x) + ۸(y+y) = ۴x + ۱۶y = ۴x + \frac{۱۶۰۰۰۰}{x}$: یک‌متغیره

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=۰} ۴-\frac{۱۶۰۰۰۰}{x^۲}=۰ \to \frac{۱۶۰۰۰۰}{x^۲}=۴ \to ۴x^۲=۱۶۰۰۰۰$$

$$\to x^۲=۴۰۰۰۰ \to x=۲۰۰\ ,\ y=\frac{۱۰۰۰۰}{۲۰۰}=۵۰$$

۲۷



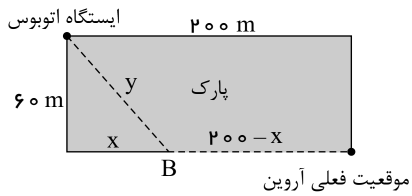
$S=$ طول $\times$ عرض $=۲xy=۲x(۱۲-x^۲)=۲۴x-۲x^۳$: یک‌متغیره

$$\xrightarrow{S'=۰} ۲۴-۶x^۲=۰ \to ۶x^۲=۲۴ \to x^۲=۴ \to x=۲\ ,\ y=۱۲-۴=۸$$

بنابراین طول مستطیل برابر ۸ و عرض مستطیل برابر ۴ است.

۲۸

شکل مسئله بدین‌صورت است.



$t_۱$ زمان رسیدن آروین از موقعیت فعلی به نقطهٔ B است پس:

$$t_۱=\frac{۲۰۰-x}{۳}$$

$t_۲$ زمان رسیدن آروین از نقطهٔ B به ایستگاه اتوبوس است پس:

$$t_۲=\frac{y}{۲}=\frac{\sqrt{۳۶۰۰+x^۲}}{۲}$$

پس: $t=t_۱+t_۲=\frac{۲۰۰}{۳}-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶۰۰+x^۲}$: یک‌متغیره

$$\xrightarrow{t'=۰} \frac{-۱}{۳}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۲x}{۲\sqrt{۳۶۰۰+x^۲}}=۰ \to \frac{x}{۲\sqrt{۳۶۰۰+x^۲}}=\frac{۱}{۳}$$

$$\to ۳x=۲\sqrt{۳۶۰۰+x^۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۹x=۴(۳۶۰۰+x^۲)$$

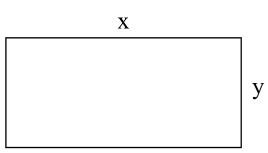
$$\to ۵x^۲=۱۴۴۰۰ \to x^۲=۲۸۸۰ \to x=\sqrt{۲^۶\times۳^۲\times۵}=۲۴\sqrt{۵}$$

۲۹

$$x-y=۲۰ \to y=x-۲۰$$

$$xy=x(x-۲۰)=x^۲-۲۰x \quad \text{یک متغیره} \xrightarrow{\text{مشتق}=۰} ۲x-۲۰=۰ \to x=۱۰ \xrightarrow{y=x-۲۰} y=-۱۰$$

۳۰



$S=xy$: دو متغیر

محیط $=۱۴ \to ۲x+۲y=۱۴ \to x+y=۷ \to y=۷-x$

پس : $S = x(7 - x) = -x^2 + 7x$: یک متغیر $\xrightarrow{\text{مشتق}=0} -2x + 7 = 0 \to x = \frac{7}{2} \xrightarrow{y=7-x} y = 7 - \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$