



سبق (۰۵۱-۳۸۱۱۷)

نام آزمون: هندسه دوازدهم نهایی و تمرین کتاب

ریاضی شاکریان : t.me/riazi-jazb

خرید محصولات : ۰۹۰۱۴۲۵۳۰۵۰

### تعریفی ها

۱) درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

الف) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه به صورت مخروط می‌باشد.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

ب) اگر صفحه  $p$  در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند شکل حاصل یک هذلولی است. سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

ت) شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، ..... آن نامیده می‌شود.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

ث) شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن برابر ..... است.

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

۵) در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید. سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض ..... است. سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

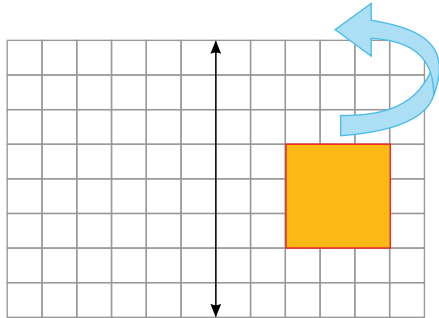
۶) در هر قسمت، عبارت مناسب را انتخاب کنید. سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

الف) اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل از تقاطع صفحه با سطح مخروطی ..... خواهد بود. (بیضی - سهمی - هذلولی) سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

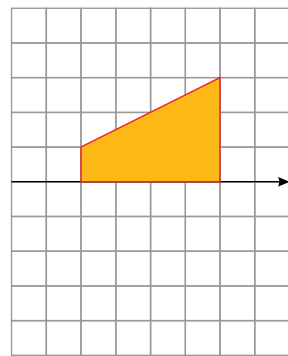
## دوران و برش

۷) اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟  
تمرین های کتاب - ۱۳۲

۸) مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روبه‌رو در فاصله ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد. الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده‌شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.



ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه‌ای موازی با قاعده آن توصیف کنید.



۹) در شکل روبه‌رو می‌خواهیم دوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم. الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.  
تمرین های کتاب - ۱۳۲  
ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟

## بیضی

۱۰) اگر در یک بیضی داشته باشیم  $a = 5$  و  $b = 3$  در این صورت اندازه فاصله کانونی این بیضی را محاسبه کنید.  
سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

۱۱) در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است. فاصله کانونی بیضی را به دست آورید.  
سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

۱۲) کانون‌های یک بیضی نقاط  $(1, 3)$  و  $(1, -5)$  است.  
سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.  
سوال های امتحانی - ۱۳۹۹



۱۳) کانون‌های یک بیضی نقاط  $(۲, ۵)$  و  $(۲, -۳)$  و  $a = ۵$  است. مختصات مرکز و اندازه قطر کوچک بیضی را پیدا کنید. سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

۱۴) کانون‌های یک بیضی نقاط  $(۱, ۳)$  و  $(۱, -۵)$  است. سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی و معادله قطر بزرگ بیضی را بنویسید. سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

ش) اگر  $a = ۶$  باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید. سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

۱۶) در یک بیضی قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟ سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

ض) هرچه خروج از مرکز بیضی ..... (کوچکتر، بزرگتر) شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد. سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

ط) اگر  $a = ۶$  باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید. سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

ظ) اگر خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود، شکل بیضی به شکل ..... نزدیک خواهد شد. (پاره‌خط - دایره - نقطه) سوال های امتحانی - ۱۳۹۹

۲۰) خروج از مرکز یک بیضی افقی  $\frac{۴}{۵}$ ، مرکز آن  $(-۴, -۱)$  و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. سوال های امتحانی - ۱۴۰۰

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.  
ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را پیدا کنید.

۲۱) خروج از مرکز یک بیضی افقی  $\frac{۴}{۵}$ ، مرکز آن  $\begin{vmatrix} -۴ \\ -۱ \end{vmatrix}$  و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید. تمرین های کتاب - ۱۳۲  
ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

تمرین های کتاب - ۱۳۲

 ۲۲) کانون‌های یک بیضی نقاط  $(1, 3)$  و  $(1, -5)$  است.

الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

 ب) اگر  $a = 6$  باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

## دایره

 ۲۳) معادله گسترده دایره‌ای به صورت  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$  می‌باشد. مرکز و شعاع

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

دایره را بنویسید.

سوال های امتحانی - ۱۴۰۰

 ۲۴) اگر معادله دایره به شکل  $(x + 1)^2 + y^2 = 4$  باشد:

الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بنویسید.

 ب) مختصات تقاطع دایره با محور  $x$  ها را پیدا کنید.

 ۲۵) معادله گسترده یک دایره به شکل  $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$  است. مختصات مرکز دایره

تمرین های کتاب - ۱۴۲

و اندازه شعاع آن را پیدا کنید و معادله آن را به شکل استاندارد بنویسید.

 ۲۶) شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایره‌ای شکل به شعاع  $1300$  متر، دو مسیر پیاده‌روی مطابق

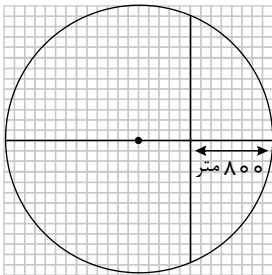
 شکل بسازد. اگر مختصات مرکز دایره  $(13, 13)$  و هر واحد برابر  $100$  متر تمرین های کتاب - ۱۴۲

باشد: الف) معادله این دایره چیست؟

ب) مختصات نقاط برخورد دو مسیر را با دایره پیدا کنید.

پ) دو مسیر در چه نقطه‌ای با یکدیگر متقاطع‌اند؟

ت) طول مسیر عمودی چقدر است؟



۲۷) در هر دایره مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کنید، محل تقاطع هر دایره را با

محورهای مختصات، در صورت وجود مشخص کنید و درستی پاسخ خود را به کمک رسم دایره بررسی کنید.

تمرین های کتاب - ۱۴۲

 الف)  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ 

 ب)  $x^2 + (y + 3)^2 - 4 = 0$ 

تمرین های کتاب - ۱۴۲

۲۸) در حالت‌های زیر معادله دایره را بنویسید.

الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن  $C(۲, -۱)$  باشد. تمرین های کتاب- ۱۴۲

ب) دایره‌ای که مرکز آن  $(۲, ۳)$  و نقطه  $(-۳, -۹)$  نقطه‌ای روی آن باشد. تمرین های کتاب- ۱۴۲

پ) دایره‌ای که نقاط  $(۰, ۳)$  و  $(-۴, -۱)$  دو سر یکی از قطرهای آن باشند. تمرین های کتاب- ۱۴۲

۲۹) وضعیت نقاط  $(۱, ۰)$ ،  $(۰, -۱)$ ،  $(-۱, -۲)$  و  $(۰, ۰)$  را نسبت به دایره  $x^2 + y^2 - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$  مشخص کنید. تمرین های کتاب- ۱۴۲

۳۰) وضعیت دایره  $(x - ۲)^2 + (y + ۳)^2 = ۴$  و خط  $y = -۱$  را نسبت به هم مشخص کنید. سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

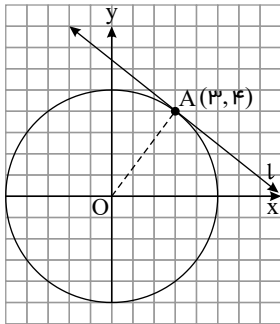
۳۱) وضعیت خط  $x + y = ۳$  را نسبت به دایره  $x^2 + y^2 - ۲x - ۳ = ۰$  مشخص کنید. سوال های امتحانی- ۱۳۹۸

۳۲) معادله دایره‌ای را بنویسید که بر خط  $۳x + ۴y = ۱$  مماس بوده و مرکز آن  $(۱, ۲)$  باشد. سوال های امتحانی- ۱۳۹۹

۳۳) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن، نقطه  $\left( \frac{۰}{۳} \right)$  و بر خط  $۳x - ۴y = ۳$  مماس باشد. تمرین های کتاب- ۱۴۲

۳۴) اگر بدانیم خط  $l$  در نقطه  $\begin{matrix} ۳ \\ ۴ \end{matrix}$  بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است، معادله خط مماس چیست؟

تمرین های کتاب - ۱۴۲



۳۵) وضع خط‌های زیر را نسبت به دایره مشخص کنید.

تمرین های کتاب - ۱۴۲

الف)  $۶x + ۴y = ۰$  و  $x^2 + y^2 - ۴x - ۴y + ۷ = ۰$

ب)  $y = -x - ۲$  و  $x^2 + y^2 = ۲$

۳۶) وضعیت دو دایره به معادلات  $(x + ۱)^2 + (y - ۲)^2 = ۱$  و

سوال های امتحانی - ۱۳۹۸

$x^2 + y^2 - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$  را نسبت به هم مشخص کنید.

۳۷) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $\begin{matrix} -۱ \\ -۱ \end{matrix}$  و با دایره  $x^2 + y^2 - ۴x - ۶y = ۳$  مماس

تمرین های کتاب - ۱۴۲

درون باشد.

۳۸) مشخص کنید در حالت‌های زیر دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف)  $x^2 + y^2 - ۲x + ۴y = ۴$  و  $x^2 + y^2 + ۲x - ۴y = ۹$

ب)  $(x - ۲)^2 + (y + ۳)^2 = ۷$  و  $x^2 + (y - ۵)^2 = ۵$

# پاسخنامه تشریحی

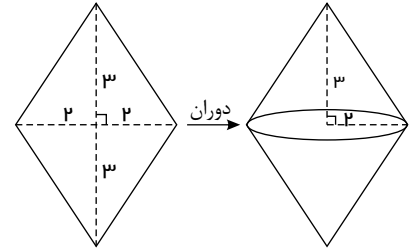
- ۱ الف درست  
 ۲ پ نادرست  
 ۳ ت سطح مقطع  
 ۴ ث کره توخالی

۵ الف شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض استوانه است.

۶ الف بیضی

۷ شکل حاصل، دو مخروط یکسان است که از قاعده بهم چسبیده‌اند و شعاع قاعده هر کدام از آن‌ها ۲ و ارتفاعشان ۳ می‌باشد. پس حجم شکل حاصل، برابر است با:

$$V = 2 \left( \frac{1}{3} \pi r^2 h \right) \xrightarrow[r=3]{r=2} \frac{2}{3} \pi (2)^2 \times 3 = 8\pi$$



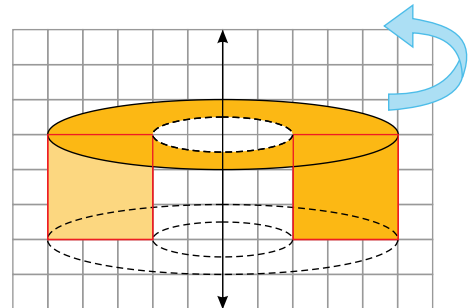
۸ الف

باید حجم یک استوانه به شعاع ۵ و ارتفاع ۳ را حساب کنیم که استوانه به شعاع ۲ ارتفاع آن از مرکز آن برداشته شده است. (درواقع حجم یک لوله استوانه‌ای را که شعاع داخلی آن ۲، شعاع خارجی آن ۵ و ارتفاع آن ۳ است باید حساب کنیم).  
 حجم شکل حاصل، برابر با اختلاف حجم استوانه بزرگ‌تر و استوانه کوچک‌تر است.

$$\text{استوانه کوچک‌تر: } \begin{cases} h_1 = 3 \\ r_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \pi r_1^2 h_1 = \pi (2^2)(3) = 12\pi$$

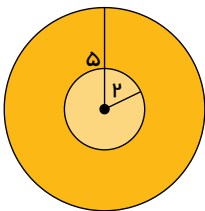
$$\text{استوانه بزرگ‌تر: } \begin{cases} h_2 = 3 \\ r_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \pi (5^2)(3) = 75\pi$$

$$\text{حجم شکل حاصل} = 75\pi - 12\pi = 63\pi$$



ب

سطح مقطع حاصل، به صورت یک دیسک است که شعاع داخلی آن ۲ و شعاع خارجی آن ۵ است.

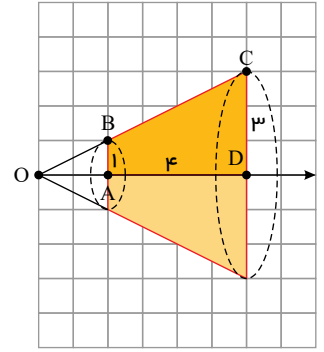


۹ الف

باید حجم یک مخروط ناقص (قسمت رنگی) را حساب کنیم. برای این کار ابتدا با قضیه تالس مقدار  $x$  را پیدا می‌کنیم:



$$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{1}{3} \Rightarrow x=2$$

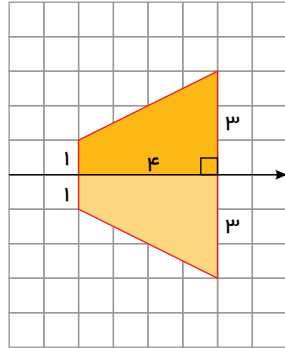


بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} \text{حجم مخروط بزرگ} &= \frac{1}{3}\pi(3)^2(6) = 18\pi \\ \text{حجم مخروط کوچک} &= \frac{1}{3}\pi(1)^2(2) = \frac{2\pi}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{حجم مخروط ناقص} = 18\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{52\pi}{3}$$

(ب)

یک ذوزنقه به شکل روبه‌روست:



$$\Rightarrow \text{مساحت سطح مقطع} = \frac{(2+6) \times 4}{2} = 16$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow c = 4 \rightarrow 2c = 8$$

$$\begin{cases} 2a = 8 \rightarrow a = 4 \\ 2b = 6 \rightarrow b = 3 \end{cases} \rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7 \rightarrow c = \sqrt{7} \rightarrow 2c = 2\sqrt{7}$$

**الف**

$$F \left| \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right., F' \left| \begin{matrix} 1 \\ -5 \end{matrix} \right. \rightarrow FF' = 2c \rightarrow 2c = 8 \rightarrow c = 4$$

$$FF' \text{ وسط } W \left| \begin{matrix} 1+1 \\ 2 \\ 3-5 \\ 2 \end{matrix} \right. \rightarrow W \left| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right.$$

$$F \left| \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix} \right. \text{ و } F' \left| \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix} \right. \rightarrow FF' \text{ وسط } W \left| \begin{matrix} 2+2 \\ 2 \\ 5-3 \\ 2 \end{matrix} \right. = 2 \text{ و } FF' = 2c \rightarrow 2c = 8 \rightarrow c = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow 16 = 25 - b^2 \rightarrow b = 3 \rightarrow 2b = 6$$

**الف**

$$F \left| \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right. \text{ و } F' \left| \begin{matrix} 1 \\ -5 \end{matrix} \right. \rightarrow x_F = x_{F'} \text{ بیضی قائم}$$

۱۰

۱۱

۱۲

۱۳

۱۴



$$FF' \text{ وسط } W \begin{cases} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases} \text{ و معادله قطر بزرگ } x = 1$$

$$FF' = 2c \rightarrow 2c = 8$$

ش

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow 16 = 36 - b^2 \rightarrow b^2 = 20 \rightarrow b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \rightarrow 2b = 4\sqrt{5}$$

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow e = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} 2a = 8 \rightarrow a = 4 \\ 2b = 6 \rightarrow b = 3 \end{cases} \rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7 \rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$\text{پس: } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

۱۶

ض هرچه خروج از مرکز بیضی کوچکتر شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.

ط

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow 16 = 36 - b^2 \rightarrow b^2 = 20 \rightarrow b = 2\sqrt{5} \rightarrow 2b = 4\sqrt{5}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ خروج از مرکز}$$

ظ دایره

$$20 \quad e = \frac{4}{5} \text{ و } \begin{cases} -4 : \alpha \\ -1 : \beta \end{cases} \text{ و } w = 6 \text{ و } 2b = 6 \text{ است.}$$

الف)

$$2b = 6 \rightarrow b = 3$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \rightarrow \frac{4}{5} = \sqrt{1 - \frac{9}{a^2}} \rightarrow \frac{16}{25} = 1 - \frac{9}{a^2} \rightarrow \frac{9}{a^2} = \frac{9}{25} \rightarrow a = 5 \rightarrow 2a = 10$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow c = 4 \rightarrow 2c = 8$$

ب)

$$A' \begin{vmatrix} \alpha - a \\ \beta \end{vmatrix}, A' \begin{vmatrix} \alpha + a \\ \beta \end{vmatrix} \rightarrow A' \begin{vmatrix} -9 \\ -1 \end{vmatrix}, A \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{الف) } e = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{4}{5} = \frac{c}{a} \rightarrow 4a = 5c \rightarrow a = \frac{5}{4}c$$

$$2b = 6 \rightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = \frac{25}{16}c^2 - 9 \rightarrow 9 = \frac{9}{16}c^2$$

$$\text{جزر} \rightarrow 3 = \frac{3}{4}c \rightarrow 3c = 12 \rightarrow c = 4, a = \frac{5}{4}(4) = 5 \rightarrow 2a = 10$$

$$\text{فاصله کانونی} = 2c = 8$$

۲۱



$$\text{ب) } W \left| \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right. , F \left| \begin{array}{c} \alpha + c \\ \beta \end{array} \right. , F' \left| \begin{array}{c} \alpha - c \\ \beta \end{array} \right. , A \left| \begin{array}{c} \alpha + a \\ \beta \end{array} \right. , A' \left| \begin{array}{c} \alpha - a \\ \beta \end{array} \right.$$

$$B \left| \begin{array}{c} \alpha \\ \beta + b \end{array} \right. , B' \left| \begin{array}{c} \alpha \\ \beta - b \end{array} \right.$$

$$\rightarrow W \left| \begin{array}{c} -۴ \\ -۱ \end{array} \right. , F \left| \begin{array}{c} ۰ \\ -۱ \end{array} \right. , F' \left| \begin{array}{c} -۸ \\ -۱ \end{array} \right. , A \left| \begin{array}{c} ۱ \\ -۱ \end{array} \right. , A' \left| \begin{array}{c} -۹ \\ -۱ \end{array} \right.$$

$$B \left| \begin{array}{c} -۴ \\ ۲ \end{array} \right. , B' \left| \begin{array}{c} -۴ \\ -۴ \end{array} \right.$$

(۲۲ الف)

$$F \left| \begin{array}{c} ۱ \\ ۳ \end{array} \right. , F' \left| \begin{array}{c} ۱ \\ -۵ \end{array} \right. \rightarrow FF' = ۲c \rightarrow ۲c = ۸ \rightarrow c = ۴$$

$$FF' \text{ وسط } W \left| \begin{array}{c} \frac{۱+۱}{۲} = ۱ \\ \frac{۳-۵}{۲} = -۱ \end{array} \right.$$

چون  $x_{F'} = x_F$  است بیضی قائم است و معادله قطر بزرگ  $x = \alpha$  و معادله قطر کوچک  $y = \beta$  است پس معادله قطر بزرگ  $x = ۱$  و معادله قطر کوچک  $y = -۱$  است.

$$\text{ب) } c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow ۱۶ = ۳۶ - b^2 \rightarrow b^2 = ۲۰ \rightarrow b = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

$$\rightarrow \text{قطر کوچک} = ۲b = ۴\sqrt{۵}$$

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow e = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

(۲۳)

$$\begin{aligned} f'_x = 0 &\rightarrow ۲x - ۶ = 0 \rightarrow x = ۳ \\ f'_y = 0 &\rightarrow ۲y + ۲ = 0 \rightarrow y = -۱ \end{aligned} \rightarrow C \left| \begin{array}{c} ۳ \\ -۱ \end{array} \right.$$

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - ۴c}{۴} = \frac{۳۶ + ۴ - ۲۴}{۴} = \frac{۱۶}{۴} = ۴ \rightarrow R = ۲$$

(۲۴)

الف)

$$(x+1)^2 + (y-0)^2 = ۴ \rightarrow C \left| \begin{array}{c} -۱ \\ ۰ \end{array} \right. , R = ۲$$

ب)

$$y = 0 \rightarrow (x+1)^2 = ۴ \rightarrow \begin{cases} x+1 = ۲ \rightarrow x = ۱ \rightarrow \left| \begin{array}{c} ۱ \\ ۰ \end{array} \right. \\ x+1 = -۲ \rightarrow x = -۳ \rightarrow \left| \begin{array}{c} -۳ \\ ۰ \end{array} \right. \end{cases}$$

(۲۵)

$$x^2 + ۲x + y^2 + ۲y - ۸ = 0 \rightarrow (x+1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 - ۸ = 0$$

$$\rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = ۱۰ \rightarrow \begin{cases} C \left| \begin{array}{c} -۱ \\ -۱ \end{array} \right. \\ R = \sqrt{۱۰} \end{cases}$$

(۲۶)

$$\text{الف) } (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \rightarrow (x-۱۳)^2 + (y-۱۳)^2 = ۱۶۹$$

(ب) در مسیر عمودی،  $x = ۱۸$  است پس داریم:

$$x = ۱۸ \rightarrow (۱۸-۱۳)^2 + (y-۱۳)^2 = ۱۶۹ \rightarrow (y-۱۳)^2 = ۱۴۴ \rightarrow \begin{cases} y-۱۳ = ۱۲ \rightarrow y = ۲۵ \\ y-۱۳ = -۱۲ \rightarrow y = ۱ \end{cases}$$

$$\rightarrow \left| \begin{array}{c} ۱۸ \\ ۱ \end{array} \right. , \left| \begin{array}{c} ۱۸ \\ ۲۵ \end{array} \right.$$

در مسیر افقی،  $y = ۱۳$  است پس داریم:

$$y = 13 \rightarrow (x - 13)^2 + 0 = 169 \rightarrow \begin{cases} x - 13 = 13 \rightarrow x = 26 \\ x - 13 = -13 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left| \begin{matrix} 26 \\ 13 \end{matrix} \right|, \left| \begin{matrix} 0 \\ 13 \end{matrix} \right|$$

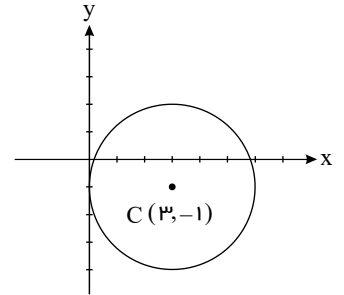
پ) مختصات نقطه تقاطع دو مسیر،  $\left| \begin{matrix} 18 \\ 13 \end{matrix} \right|$  است.

ت) طول مسیر عمودی  $24 - 1 = 25$  واحد یعنی ۲۴۰۰ متر است.

۲۷

$$\begin{aligned} \text{الف) } & x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0 \\ & \rightarrow \begin{cases} f'_x = 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \\ f'_y = 2y + 2 = 0 \rightarrow y = -1 \end{cases} \rightarrow C \left| \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \right. : \alpha \end{aligned}$$

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 9 + 1 - 1 = 9 \rightarrow R = 3$$



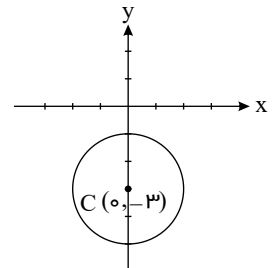
اکنون محل برخورد دایره با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم.

$$x = 0 \rightarrow y^2 + 2y + 1 = 0 \rightarrow (y + 1)^2 = 0 \rightarrow y = -1$$

$$y = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 - 9 + 1 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 = 8$$

$$\rightarrow x - 3 = \pm \sqrt{8} \rightarrow x = 3 \pm \sqrt{8}$$

$$\text{ب) } x^2 + (y + 3)^2 - 4 = 0 \rightarrow (x - 0)^2 + (y + 3)^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} C \left| \begin{matrix} 0 \\ -3 \end{matrix} \right. \\ R = 2 \end{cases}$$



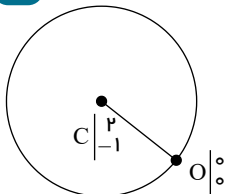
اکنون محل برخورد دایره با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم.

$$x = 0 \rightarrow (y + 3)^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} y + 3 = 2 \rightarrow y = -1 \\ y + 3 = -2 \rightarrow y = -5 \end{cases}$$

$$y = 0 \rightarrow x^2 + 9 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = -5$$
 ریشه حقیقی ندارد.

۲۸

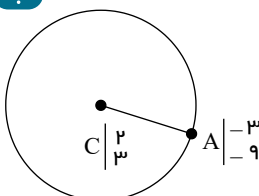
الف)



$$\rightarrow R = OC = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\text{معادله دایره: } (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

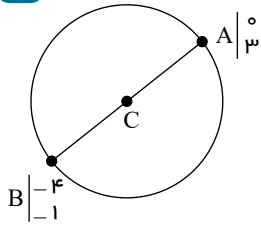
ب)



$$\rightarrow R = AC = \sqrt{(2 + 3)^2 + (3 + 9)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\text{معادله دایره: } (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 169$$

ب



$$AB \text{ وسط } C \begin{cases} \frac{0-4}{2} = -2 : \alpha \\ \frac{3-1}{2} = 1 : \beta \end{cases}$$

$$R = AC = \sqrt{(0+2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{معادله دایره: } (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

$$P(1, 0) = 1 + 0 - 2 + 0 + 1 = 0 \rightarrow \text{نقطه روی دایره است.}$$

$$P(0, -1) = 0 + 1 - 0 - 4 + 1 = -2 \rightarrow \text{نقطه داخل دایره است.}$$

$$P(-1, -2) = 1 + 4 + 2 - 8 + 1 = 0 \rightarrow \text{نقطه روی دایره است.}$$

$$P(0, 0) = 0 + 0 - 0 + 0 + 1 = 1 \rightarrow \text{نقطه خارج دایره است.}$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4 \rightarrow C \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}, R = 2$$

فاصله  $C \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$  از خط افقی  $y = -1$  برابر  $d = 2$  است و چون  $d = R$  است پس خط بر دایره مماس است.

۲۹

۳۰

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} C \begin{cases} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \end{cases} \rightarrow C \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \\ R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{4 + 0 + 12}{4} = 4 \rightarrow R = 2 \end{cases}$$

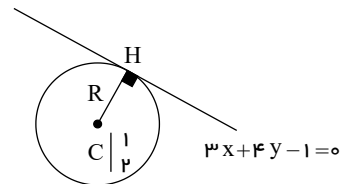
$$x + y - 3 = 0 \text{ از خط } C \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ فاصله } d = \frac{|1(1) + 1(0) - 3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

چون  $d < R$  است بنابراین خط در دو نقطه دایره را قطع کرده است.

۳۱

$$R = CH = \frac{|3(1) + 4(2) - 1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2 \rightarrow \begin{cases} C \begin{cases} 1 : \alpha \\ 2 : \beta \end{cases} \rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \rightarrow (x-1)^2 \\ R = 2 \end{cases}$$

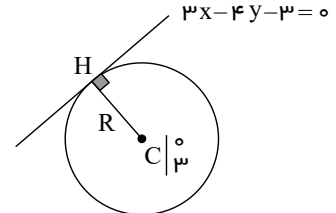
$$+(y-2)^2 = 4$$



فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره، برابر شعاع دایره است.

۳۲

$$R = CH = \frac{|0 - 12 - 3|}{\sqrt{9+16}} = \frac{15}{5} = 3$$



$$\text{پس: } \begin{cases} C \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases} \\ R = 3 \end{cases} \xrightarrow{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2} x^2 + (y-3)^2 = 9$$

خط  $l$  بر شعاع  $OA$  عمود است پس شیب خط  $l$  عکس و قرینه شیب  $OA$  است. (۳۴)

$$m_{OA} = \frac{y_O - y_A}{x_O - x_A} = \frac{0 - 4}{0 - 3} = \frac{4}{3} \rightarrow m_{OA} = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} m_{OA} = -\frac{3}{4} \\ y - y_1 = m(x - x_1) \end{cases} \rightarrow y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

$$A \left| \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right.$$

الف)  $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} f'_x = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \\ f'_y = 2y - 4 = 0 \rightarrow y = 2 \end{cases} \rightarrow C \left| \begin{matrix} 2 : \alpha \\ 2 : \beta \end{matrix} \right.$

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 4 + 4 - 7 = 1 \rightarrow R = 1$$

$$6x + 4y = 0 \text{ فاصله مرکز دایره تا خط } = CH = \frac{|12 + 8|}{\sqrt{36 + 16}} = \frac{20}{\sqrt{52}} = \frac{20}{2\sqrt{13}} = \frac{10}{\sqrt{13}}$$

چون  $CH > R$  است بنابراین خط و دایره، نقطه مشترک ندارند.

ب)  $x^2 + y^2 = 2 \rightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 2 \rightarrow \begin{cases} C \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right. \\ R = \sqrt{2} \end{cases}$

$$x + y + 2 = 0 \text{ فاصله مرکز دایره تا خط } = CH = \frac{|0 + 0 + 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

چون  $CH = R$  است بنابراین خط بر دایره مماس است.

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1 \rightarrow C \left| \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \right.^{-1}, R = 1$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \rightarrow C' \left| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right., R'^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{4 + 16 - 4}{4} = 4 \rightarrow R' = 2$$

$$\text{از طرفی } CC' = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 + 2)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

چون  $CC' > R + R'$  است دو دایره متخارج هستند.

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} f'_x = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \\ f'_y = 2y - 6 = 0 \rightarrow y = 3 \end{cases} \rightarrow C \left| \begin{matrix} 2 : \alpha \\ 3 : \beta \end{matrix} \right.$$

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 4 + 9 + 3 = 16 \rightarrow R = 4$$

$$C \left| \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right., C' \left| \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \right. \rightarrow CC' = \sqrt{(2 + 1)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\text{غرض } CC' = |R - R'| \rightarrow 5 = |4 - R'| \rightarrow \begin{cases} 4 - R' = 5 \rightarrow R' = -1 \\ 4 - R' = 5 \rightarrow R' = 9 \end{cases}$$

$$\text{پس: } \begin{cases} C' \left| \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \right. \\ R' = 9 \end{cases} \xrightarrow{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R'^2} (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 81$$

الف)  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -2 \end{cases} \rightarrow C \left| \begin{matrix} 1 : \alpha \\ -2 : \beta \end{matrix} \right.$

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 1 + 4 + 4 = 9 \rightarrow R = 3$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y - 4 = 0 \rightarrow y = 2 \end{cases} \rightarrow C' \left| \begin{matrix} -1 : \alpha \\ 2 : \beta \end{matrix} \right.$$



$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 1 + 4 + 9 = 14 \rightarrow R' = \sqrt{14}$$

از طرفی:  $CC' = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

چون  $|R - R'| < CC' < R + R'$  است پس دو دایره متقاطع هستند.

ب)  $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 7 \rightarrow \begin{cases} C \mid -3 \\ R = \sqrt{7} \end{cases}$

$$x^2 + (y-5)^2 = 5 \rightarrow \begin{cases} C' \mid 5 \\ R' = \sqrt{5} \end{cases}$$

از طرفی:  $CC' = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

چون  $CC' > R + R'$  است پس دو دایره، متخارج هستند.