۱) تابع با ضابطه‌ی $\begin{cases} \dfrac{x^{۲}-۱}{x+۱} & ;|x|>۱ \\ ۲x & ;|x|\leq ۱ \end{cases}$، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول های ۱ و -۱ چگونه است؟

سراسری- ۱۳۸۸

۱) در -۱ ناپیوسته - در ۱ ناپیوسته

۲) در -۱ ناپیوسته - در ۱ پیوسته

۳) در -۱ پیوسته - در ۱ پیوسته

۴) در -۱ پیوسته - در ۱ ناپیوسته

۲) اگر $f(x)=\begin{cases} x+a & ; \quad x<۱ \\ ۱ & ; \quad x\geq ۱ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x+۱ & ; \quad x<۱ \\ \frac{a}{x+۱} & ; \quad x\geq ۱ \end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، تابع $f+g$ در $x=۱$ پیوسته است؟

خارج از کشور- ۱۳۸۴

۱) -۴

۲) ۴

۳) -۲

۴) ۲

۳) با کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{۱}{x+a} & ; \quad x\geq -۱ \\ x^{۲}+ax & ; \quad x<-۱ \end{cases}$ ، در $x=-۱$ پیوسته است؟

خارج از کشور- ۱۳۸۷

۱) $\{۱,\sqrt{۲}\}$

۲) $\{۱-\sqrt{۲},۱+\sqrt{۲}\}$

۳) $\varnothing$

۴) $\mathbb{R}$

۴ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{۲x}}{۲-x} & ;x\neq ۲\\ a & ;x=۲\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، در نقطه‌ی $x=۲$ پیوسته است؟

سراسری- ۱۳۸۷

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۵ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲+x-۶}{x^۲-۴} & ,x\neq ۲\\ ۲x+a & ,x=۲\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $-\frac{۱۱}{۴}$ ۲) $\frac{۷}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۶ مجموعهٔ نقاط پیوستگی تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x^۲+x}$ کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $\mathbb{R}-\{-۱,۰\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۱,-۱\}$ ۴) $\mathbb{R}$

۷ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}۲x-\dfrac{|x|}{x} & ,x>۱\\ a-۳ & ,x=۱\\ ۳x^۲+b[۳x] & ,x<۱\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته باشد، آنگاه $a+b$ کدام است؟([ ]، نماد جزء صحیح است.)

قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۶

۸) تابع $f(x) = x^{۲} + m[x] + \dfrac{n|x-۲]}{x-۲}$ با شرط $f(۲) = ۳$ در پیوسته است. آنگاه $\dfrac{m}{n}$ کدام است؟ ([ ]، علامت جز صحیح است.)

قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۳
۲) ۲
۳) -۳
۴) -۲

۹) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^{۲}+x-۲|}{x-۱} & ;x \neq ۱ \\ a & ;x = ۱ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر R پیوسته است؟

سراسری- ۱۳۹۰

۱) هر مقدار a
۲) -۳
۳) ۳
۴) هیچ مقدار a

۱۰) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} a + \sin ۳x & ۰ \leq x < \dfrac{\pi}{۲} \\ b \cos ۲x & \dfrac{\pi}{۲} < x \leq ۲\pi \end{cases}$ با شرط $f(\dfrac{\pi}{۲}) = ۲$ در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ پیوسته است $a-b$ کدام است؟

سراسری- ۱۳۸۹

۱) -۵
۲) -۴
۳) ۴
۴) ۵

۱۱) به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^{۲} + ax - ۵ & x > ۲ \\ ax - ۱ & x \leq ۲ \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

سراسری- ۱۳۹۱

۱) هر مقدار حقیقی a
۲) هیچ مقدار a
۳) فقط $a = -۲$
۴) فقط $a = ۲$

۱۲ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{x} & ;۱\le x\le ۶ \\ a+\cos^{۲}\dfrac{\pi x}{۳۶} & ; \quad x>۶ \end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟

سراسری- ۱۳۹۴

۱) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۴}$ ۳) $\dfrac{۱}{۴}$ ۴) $\dfrac{۱}{۲}$

۱۳ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^{۳}-۳x^{۲}+۴}{x-۲} & ;x>۲ \\ ۲x+b & ;x\le ۲ \end{cases}$، به ازای کدام مقدار b همواره پیوسته است؟

خارج از کشور- ۱۳۸۹

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۴ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} a\sin ۲x & ;\dfrac{\pi}{۴}\le x<\dfrac{۳\pi}{۴} \\ \cos(x+\dfrac{\pi}{۴}) & ;\dfrac{۳\pi}{۴}\le x\le ۲\pi \end{cases}$ بر بازه‌ی $[\dfrac{\pi}{۴},۲\pi]$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

خارج از کشور- ۱۳۹۰

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۱۵ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} -x^{۲}+۴ & x\ge ۱ \\ ax+۵x-a & x<۱ \end{cases}$ به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a، در بازه‌ی $[-۲,۲]$ پیوسته است؟

سراسری- ۱۳۸۴

۱) $\varnothing$ ۲) R ۳) $\{۰,۱\}$ ۴) $\{-۲,۲\}$

۱۶ به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} a+\sin^۲ x & ۰\leq x<\frac{\pi}{۴} \\ \sqrt{۲}\cos ۳x & \frac{\pi}{۴}\leq x\leq ۲\pi \end{cases}$، روی بازه‌ی $[۰\ ,\ ۲\pi]$ پیوسته است؟ خارج از کشور- ۱۳۸۸

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) هیچ مقدار a

۱۷ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \frac{x^۳-۳x^۲+۴}{x-۲} & ;x>۲ \\ ۲x+b & ;x\leq ۲ \end{cases}$، به ازای کدام مقدار b همواره پیوسته است؟ خارج از کشور- ۱۳۸۹

۱) -۴ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) ۴

پاسخنامه تشریحی

۱ ① ② ③ ④ ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x>1 \text{ یا } x<-1 \\ 2x & -1\le x\le 1 \end{cases}$$

حد راست و حد چپ و مقدار تابع را باید در $x=1$ و $x=-1$ بدست آوریم.

$$x=1:\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=1-1=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2(1)=2 \\ f(1)=2(1)=2 \end{cases} \Rightarrow$$ تابع در $x=1$ ناپیوسته است.

$$x=-1:\begin{cases} \lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to (-1)^+} 2x=2(-1)=-2 \\ \lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to (-1)^-}(x-1)=-1-1=-2 \\ f(-1)=2(-1)=-2 \end{cases} \Rightarrow$$ تابع در $x=-1$ پیوسته است.

۲ ① ② ③ ④ ابتدا $f(x)+g(x)$ را تشکیل می‌دهیم و سپس شرط پیوستگی (یعنی تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x=1$ اعمال می‌کنیم.

$$f(x)+g(x)=\begin{cases} 2x+a+1 & x<1 \\ \frac{a}{x+1}+1 & x\ge 1 \end{cases}$$

حد راست: $\lim\limits_{x\to 1^+}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 1^+}(\frac{a}{x+1}+1)=\frac{a}{2}+1$

حد چپ: $\lim\limits_{x\to 1^-}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+a+1)=2+a+1=a+3$

مقدار تابع: $(f+g)(1)=\frac{a}{2}+1$

پس: $\frac{a}{2}+1=a+3\to a+2=2a+6\to a=-4$

۳ ① ② ③ ④

برای این که تابع f در نقطه ی مرزی $x=-1$ پیوسته باشد، باید حد راست، حد چپ و مقدار تابع در این نقطه برابر باشند.

$$\begin{rcases} \lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to (-1)^+}\frac{1}{x+a}=\frac{1}{-1+a}=\frac{-1}{1-a} \\ \lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to (-1)^-}(x^2+ax)=(-1)^2+a(-1)=1-a \\ f(-1)=\frac{1}{-1+a}=\frac{-1}{1-a} \end{rcases} \Rightarrow \frac{-1}{1-a}=1-a\Rightarrow (1-a)^2=-1\Rightarrow$$ امکان ندارد

۴ ① ② ③ ④

شرط پوسیدگی تابع f در $x=a$ این است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{2x}}{2-x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 2}\frac{1-\frac{1(2)}{2\sqrt{2x}}}{-1}=-\frac{1}{2}$$

پس $f(2)=a=-\frac{1}{2}$ است

۵ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+x-۶}{x^۲-۴} = \lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۳)}{(x-۲)(x+۲)} = \lim_{x\to ۲}\frac{x+۳}{x+۲} = \frac{۵}{۴}$$

$$f(۲) = ۲\times ۲ + a = ۴ + a$$

$$\xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} ۴ + a = \frac{۵}{۴} \Rightarrow a = -\frac{۱۱}{۴}$$

۶ ۴ ۳ ۲ **۱** تابع f در دامنهٔ خود پیوسته است.

$$x^۲ + x = ۰ \Rightarrow x(x+۱) = ۰ \quad \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۱ \end{cases}$$

f مجموعهٔ نقاط پیوستگی $= \mathbb{R} - \{-۱, ۰\}$

۷ ۴ **۳** ۲ ۱

$$\lim_{x\to ۱^+}(۲x - \frac{\overbrace{|x|}^{x}}{x}) = \lim_{x\to ۱^+}(۲x-۱) = ۲(۱) - ۱ = ۱$$

$$f(۱) = a - ۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-}(۳x^۲ + b[۳x]) = ۳(۱)^۲ + b[۳^-] = ۳ + ۲b$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow a - ۳ = ۱ \Rightarrow a = ۴ \\ \Rightarrow ۳ + ۲b = ۱ \Rightarrow b = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = ۳$$

۸ **۴** ۳ ۲ ۱

$$f(x) = x^۲ + m[x] + \frac{n|x-۲|}{x-۲}\ ,\ f(۲) = ۳$$

با توجه به تعریف پیوستگی داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۴ + m[۲^+] + \frac{n(x-۲)}{x-۲} = ۴ + ۲m + n \quad \Rightarrow ۴ + ۲m + n = ۳ \Rightarrow ۲m + n = -۱$$

$$\lim_{x\to ۲^-} = ۴ + m[۲^-] + \frac{n(x-۲)}{x-۲} = ۴ + m - n \quad \Rightarrow ۴ + m - n = ۳ \Rightarrow m - n = -۱$$

$$\begin{cases} ۲m + n = -۱ \\ m - n = -۱ \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\frac{-۲}{۳}}{\frac{۱}{۳}} = -۲$$

۹ **۴** ۳ ۲ ۱

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = ۱$ بدست آوریم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+}\frac{\overbrace{|(x+۲)(x-۱)|}^{+}}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+}\frac{(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)} = ۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-}\frac{\overbrace{|(x+۲)(x-۱)|}^{-}}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)} = -۳$$

این تابع در $x = ۱$ پیوسته نمی‌باشد.

۱۰ **۴** ۳ ۲ ۱ کافی است شرط پیوستگی را در $x = \frac{\pi}{۲}$ بررسی کنید (تساوی حد راست و چپ و مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{۲}$)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} b\cos ۲x = b\cos\pi = -b \\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} (a+\sin ۳x) = a+\sin\frac{۳\pi}{۲} = a-۱ \\ f(\frac{\pi}{۲}) = ۲ \end{cases}$$

پس: $-b = ۲ \to b = -۲ \ , \ a-۱ = ۲ \to a = ۳ \to a-b = ۵$

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ چون هر دو ضابطه پیوسته هستند، برای آنکه تابع دو ضابطه‌ای f روی R (مجموعه‌ی اعداد حقیقی) پیوسته باشد، کافی است شرایط پیوستگی تابع را تنها در نقطه‌ی مرزی آن، یعنی $x=۲$ برقرار نماییم.

$$\begin{cases} \text{حد راست} = \lim\limits_{x\to۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to۲^+} (x^۲+ax-۵) = ۴+۲a-۵ = ۲a-۱ \\ \text{حد چپ} = \lim\limits_{x\to۲^-} f(x) = f(۲) = \lim\limits_{x\to۲^-} (ax-۱) = ۲a-۱ \end{cases}$$

چون به ازای هر مقدار a، حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۲$ با هم برابر هستند، پس نتیجه می‌گیریم که به ازای هر مقدار حقیقی a، تابع f روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است.

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴ چون تابع، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک پیوسته است پس حتماً در $x=۶$ نیز باید پیوسته باشد. یعنی حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۶$ باید با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to۶^+} f(x) = \lim\limits_{x\to۶^+} (a+\cos^۲\frac{\pi x}{۳۶}) = a+\cos^۲\frac{\pi}{۶} = a+\frac{۳}{۴} \\ \lim\limits_{x\to۶^-} f(x) = \lim\limits_{x\to۶^-} \sin\frac{\pi}{x} = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲} \\ f(۶) = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow a+\frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{-۱}{۴}$$

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم اگر $x=k$ یکی از ریشه‌های تابع $f(x)$ باشد آن‌گاه $f(x)$ بر $x-k$ بخش‌پذیر است.

کافی است شرط پیوستگی (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x=۲$ اعمال کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to۲^+} \frac{x^۳-۳x^۲+۴}{x-۲} = \frac{۰}{۰} \to \lim\limits_{x\to۲^+} \frac{(x-۲)(x^۲-x-۲)}{(x-۲)} = \lim\limits_{x\to۲^+} (x^۲-x-۲) = ۰ \\ \lim\limits_{x\to۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to۲^-} (۲x+b) = ۴+b \\ f(۲) = ۴+b \end{array}\right\} \Rightarrow ۰ = ۴+b \Rightarrow b = -۴$$

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴ برای پیوستگی f در بازه ی $[\frac{\pi}{۴}, ۲\pi]$ تنها کافی است شرایط پیوستگی را در نقطه‌ی مرزی $x=\frac{۳\pi}{۴}$ اعمال کنیم. (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^+} \cos(x+\frac{\pi}{۴}) = \cos\pi = -۱ \\ \lim\limits_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^-} a\sin ۲x = a\sin\frac{۳\pi}{۲} = -a \\ f(\frac{۳\pi}{۴}) = \cos(\frac{۳\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}) = \cos\pi = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow -a = -۱ \Rightarrow a = ۱$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴ کافی است شرط پیوستگی یعنی تساوی حدود راست و چپ و مقدار تابع با هم را در $x=۱$ بررسی کنیم.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} (-x^۲ + ۴) = -۱ + ۴ = ۳ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} (ax + ۵x - a) = a + ۵ - a = ۵ \\ f(۱) = -۱ + ۴ = ۳ \end{cases}$$

تابع f در $x = ۱$ پیوسته نمی‌باشد. بنابراین به ازای هیچ مقداری برای a تابع f در بازه‌ی $[-۲, ۲]$ پیوسته نمی‌باشد.

۱۶ (۴) (۳) (۲) **(۱)** برای پیوستگی تابع f در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$، تنها کافی است شرایط پیوستگی تابع را در نقطه‌ی مرزی به طول $x = \frac{\pi}{۴}$ اعمال کنیم. (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}^+} \sqrt{۲}\cos ۳x = \sqrt{۲}\cos\frac{۳\pi}{۴} = \sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = -۱ \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} (a + \sin^۲ x) = a + \sin^۲\frac{\pi}{۴} = a + \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ = a + \frac{۱}{۲} \\ f(\frac{\pi}{۴}) = \sqrt{۲}\cos\frac{۳\pi}{۴} = \sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow a + \frac{۱}{۲} = -۱ \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$$

۱۷ (۴) (۳) (۲) **(۱)** کافی است شرط پیوستگی (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x = ۲$ اعمال کنیم

$$\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{x^۳ - ۳x^۲ + ۴}{x - ۲} = \frac{۰}{۰}$$

برای استخراج عامل صفرشونده می‌توان صورت را برای عامل صفرشونده $x - ۲$ تقسیم نمود:

$$\begin{array}{l|l} x^۳ - ۳x^۲ + ۴ & x - ۲ \\ \hline & x^۲ - x - ۲ \\ ۰ & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{\cancel{(x-۲)}(x^۲ - x - ۲)}{\cancel{(x-۲)}} = ۰ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} (۲x + b) = ۴ + b \end{array}\right\} ۰ = ۴ + b \to b = -۴$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۴
۲	۱
۳	۳
۴	۳
۵	۱
۶	۱
۷	۳
۸	۴
۹	۴
۱۰	۴
۱۱	۱
۱۲	۲
۱۳	۱
۱۴	۴
۱۵	۱
۱۶	۱
۱۷	۱