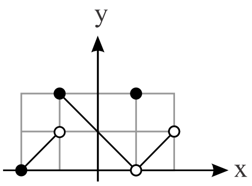
۱ برای تابع f که نمودار آن داده شده است، کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۲$

ب) $f(۱) = ۲$

پ) $f(۲) = ۱$

ت) $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x) = ۰$

ث) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x) = ۲$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۱$

چ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد.

ح) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد.

۲ تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۲ تعریف نشده باشد. $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۴$

۳ تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۳ حد نداشته باشد. $f(۳) = ۱$

۴ مثالی از یک تابع، همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطه? ۲ مساوی -۱ باشد.

۵ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 7}(-3)$ ب) $\lim\limits_{x\to 0}(-2x-7)$ پ) $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-4x+5)$

ت) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$ ث) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x^2-x}$ ج) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$

چ) $\lim\limits_{x\to -2}[x]$ ح) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}$ خ) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+7}$

د) $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x}$ ذ) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+5}$ ر) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-2}$

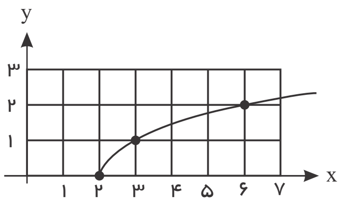
ز) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-2}{[x]+1}$ ژ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{3}}\cos x$ س) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)$

ش) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x}{[x]}$ ص) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$ ض) $\lim\limits_{x\to 0}(x+[x])$

۶ دربارهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x-2}$ موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ ت) $f(2)$



۷ اگر $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ موجود است؟

۸ توابع زیر را در نظر بگیرید و به سوالات پاسخ دهید:

$$f(x)=\text{۲}x+\text{۱} \quad , \quad g(x)=\text{۲}x+\text{۱} \quad (x\neq \text{۲}) \quad , \quad h(x)=\begin{cases} \text{۲}x+\text{۱} & x\neq \text{۲} \\ \text{۳} & x=\text{۲} \end{cases}$$

الف) مقادیر $f(\text{۲})$, $h(\text{۲})$ و $g(\text{۲})$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

ب) حدهای زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to \text{۲}} h(x) \quad , \quad \lim_{x\to \text{۲}} g(x) \quad , \quad \lim_{x\to \text{۲}} f(x)$$

۹ تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x & x>\text{۰} \\ -x & x<\text{۰} \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. آیا f در نقطهٔ صفر حد دارد؟ آیا $f(\text{۰})$ موجود است؟

۱۰ نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^{\text{۲}}+\text{۲} & x>\text{۰} \\ -\text{۲}x-\text{۲} & x\leq \text{۰} \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را - در صورت وجود - بیابید.

۱۱ آیا حد تابع زیر در $x=\text{۲}$ موجود است؟

$$f(x)=\begin{cases} -x+\text{۲} & x>\text{۲} \\ -\text{۲} & x=\text{۲} \\ x-\text{۳} & x<\text{۲} \end{cases}$$

۱۲) اگر m یک عدد صحیح باشد، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to m^+} [x]$

ب) $\lim\limits_{x\to m^-} [x]$

پ) $\lim\limits_{x\to m} [x]$

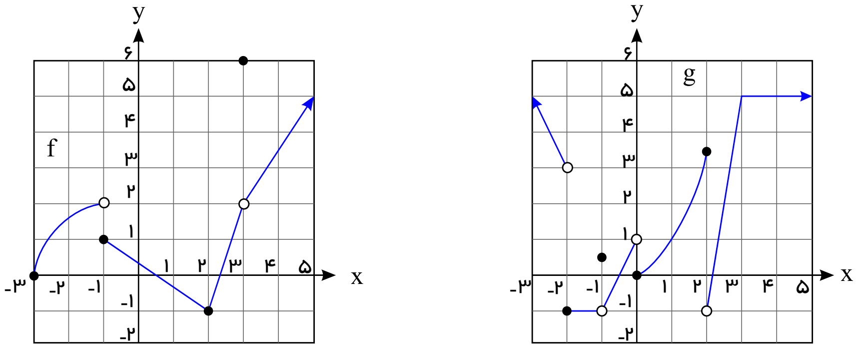
۱۳) در هر یک از حالت‌های زیر دربارهٔ حد تابع $f+g$ چه می‌توان گفت؟

الف) اگر توابع f و g هیچ‌کدام در نقطه‌ای مانند a حد نداشته باشند.

ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

۱۴) دو تابع متفاوت مثال بزنید که در یک نقطه دارای حدهای برابر باشند.

۱۵ با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.



الف) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$　　ب) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$　　پ) $\lim\limits_{x\to ۳} g(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳} (f(x)+g(x))$　　ث) $\lim\limits_{x\to -۱} (f(x)+g(x))$　　ج) $\lim\limits_{x\to ۲} (۲f(x)+۵g(x))$

چ) $\lim\limits_{x\to ۰} (f(x))^۴$　　ح) $\lim\limits_{x\to ۰} (g(x))^۲$

خ) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{f(x)}{g(x)}$　　د) $\lim\limits_{x\to ۵} (f(x)\cdot g(x))$

۱۶ اگر $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۳$ و $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۲} h(x)=-۱$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

ب) $\lim\limits_{x\to ۲} (h(x))^۵$　　الف) $\lim\limits_{x\to ۲} (f(x)+h(x))$

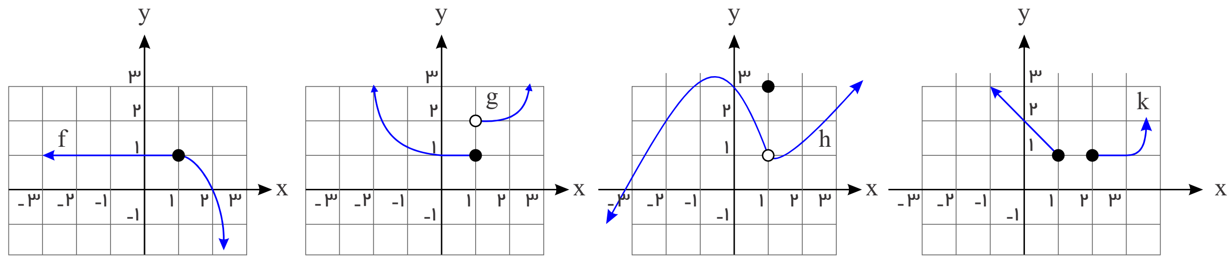
ت) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{g(x)}{f(x)}$　　پ) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{۱}{h(x)}$　　ث) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{۳f(x)}{g(x)-۵h(x)}$

۱۷ نمودار دو تابع $f(x)=\dfrac{|x-۳|}{x-۳}$ و $g(x)=۱$ را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ موجود است؟ (چرا؟) $\lim\limits_{x\to ۳} g(x)$ چطور؟ در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابرند؟

۱۸ تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطهٔ $x = ۱$ مساوی -۱ باشد؛ ولی تابع در ۱ پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.

۱۹ کدام‌یک از توابع زیر در $x = ۱$ پیوسته است؟



۲۰ با توجه به نمودار تابع $f(x) = [x]$، تابع در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۲۱ توابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۹}{x - ۳} & x \neq ۳ \\ ۶ & x = ۳ \end{cases}$ و $g(x) = \dfrac{x^۲ - ۹}{x - ۳}$ را در نظر می‌گیریم. پیوستگی این تابع‌ها را در $x = ۳$ بررسی کنید.

۲۲ پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} -۲x + ۲ & x \leq ۰ \\ x^۲ + ۲ & x > ۰ \end{cases}$ را در نقطهٔ $x = ۰$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

۲۳ در مواقعی تجویز دارو برای کودکان بر اساس جرم کودک انجام می‌گیرد. روش‌های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک کودک (برحسب کیلوگرم) در شرایط اضطراری (که جرم نمی‌تواند اندازه‌گیری شود) وجود دارد. یکی از این روش‌ها استفاده از تابع $f(t)=\begin{cases} ۶t+۴ & ۰\leq t<۱ \\ ۲t+۱۰ & ۱\leq t\leq ۱۰ \end{cases}$ است که در آن t سن کودک برحسب سال است. به طور مثال جرم یک کودک ۶ ماهه به کمک این تابع چنین محاسبه می‌شود:

۶ ماه $\rightarrow \frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$ سال $\qquad f(\frac{۱}{۲})=۶\times(\frac{۱}{۲})+۴=۷$

الف) $f(۲)$ و $f(۵)$ را بیابید.

ب) آیا f در بازهٔ $[۰,۱۰]$ پیوسته است؟

۲۴ با توجه به توابع f و g و h با ضابطه‌های داده شده، به سوالات پاسخ دهید.

$$f(x)=۲x+۱ \quad , \quad g(x)=۲x+۱ \quad x\neq ۲ \quad , \quad h(x)=\begin{cases} ۲+x & x\neq ۲ \\ ۳ & x=۲ \end{cases}$$

الف) مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید: $f(۲)=\quad , \quad g(۲)=\quad , \quad h(۲)=$

ب) حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید: $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)= \qquad \lim\limits_{x\to ۲} g(x)= \qquad \lim\limits_{x\to ۲} h(x)=$

پ) کدام تابع در $x=۲$ پیوسته است؟

۲۵ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-۳ & x<۲ \\ -۲ & x=۲ \\ -x+۲ & x>۲ \end{cases}$ را رسم کنید. f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

پاسخنامه تشریحی

۱

ب) $f(1)=2$ **درست**

الف) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ **نادرست است (زیرا** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$**)**

ت) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0$ **درست**

پ) $f(2)=1$ **نادرست است (زیرا این حد وجود ندارد)**

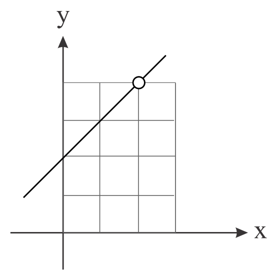
ج) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ **درست**

ث) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$ **نادرست**

ح) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=$ وجود ندارد **درست**

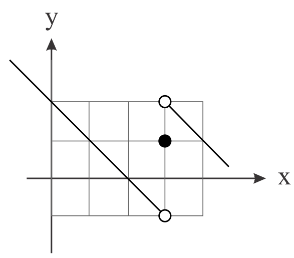
چ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$ وجود ندارد **درست**

۲



$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$$

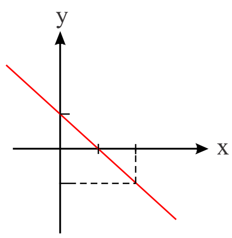
۳



$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & x<3\\ 1 & x=3\\ -x+5 & x>3\end{cases}$$

۴

$f(x)=-x+1$



۵

الف) $\lim\limits_{x\to 7}(-3)=3$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}(-2x-7)=-2(0)-7=0-7=-7$

پ) $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-4x+5)=3(-1)^2-4(-1)+5=3+4+5=12$

ت) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}=\dfrac{3^2-3(3)}{3^2-9}=\dfrac{0}{0}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{x}{۲x^۲ - x} = \frac{۰}{۲(۰)^۲ - ۰} = \frac{۰}{۰}$

ج) $\lim\limits_{x\to(-۲)} \frac{x^۳ + ۸}{x + ۲} = \frac{(-۲)^۳ + ۸}{-۲ + ۲} = \frac{۰}{۰}$

چ) $\lim\limits_{x\to -۲} [x] =$ وجود ندارد $\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۲)^+} [x] = [(-۲)^+] = -۲ \\ \lim\limits_{x\to(-۲)^-} [x] = [(-۲)^-] = -۳ \end{cases}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \sqrt{x} = \sqrt{۰^+} = ۰$

خ) $\lim\limits_{x\to ۲} \sqrt{x + ۷} = \sqrt{۲ + ۷} = \sqrt{۹} = ۳$

د) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \sqrt{x} = \sqrt{۰^-} =$ وجود ندارد

ذ) $\lim\limits_{x\to ۲} \sqrt{x + ۵} = \sqrt{۲ + ۵} = \sqrt{۷}$

ر) $\lim\limits_{x\to ۱} \sqrt{x - ۲} = \sqrt{۱ - ۲} = \sqrt{-۱}$ وجود ندارد

ز) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{x - ۲}{[x] + ۱} = \frac{۳^+ - ۲}{[۳^+] + ۱} = \frac{۳ - ۲}{۳ + ۱} = \frac{۱}{۴}$

ژ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۳}} \cos x = \cos(-\frac{\pi}{۳}) = \cos(\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲}$

س) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\sin x + \cos x) = \sin\frac{\pi}{۴} + \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$

ش) $\lim\limits_{x\to -۲^+} \frac{x}{[x]} = \frac{(-۲)^+}{[(-۲)^+]} = \frac{-۲}{-۲} = ۱$

ص) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱ - \sin^۲ x}{۱ - \sin x} = \frac{۱ - (۱)^۲}{۱ - ۱} = \frac{۰}{۰}$

ض) $\lim\limits_{x\to ۰} (x + [x]) =$ وجود ندارد $\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^+} (x + [x]) = ۰^+ + [۰^+] = ۰ + ۰ = ۰ \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} (x + [x]) = ۰^- + [۰^-] = ۰ + (-۱) = -۱ \end{cases}$

۶

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = ۰$

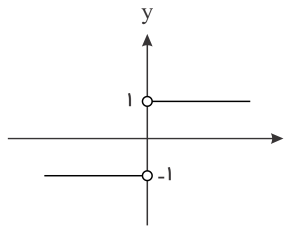
ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) =$ وجود ندارد

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) =$ وجود ندارد

ت) $f(۲) = ۰$

۷

$$f(x)=\frac{|x|}{x} \to f(x)=\begin{cases} ۱ & , \quad x>۰ \\ -۱ & , \quad x<۰ \end{cases}$$



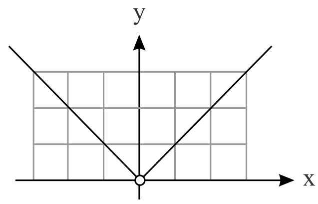
$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=$ وجود ندارد

۸

الف) $f(۲)=۵$, $h(۲)=۳$, $g(۲)=$ وجود ندارد

ب) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۵$, $\lim\limits_{x\to ۲} h(x)=۵$, $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=۵$

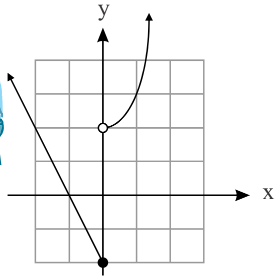
۹



$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۰ ,\ \lim_{x\to ۰^-} f(x)=۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x)=۰$$

$f(۰)=$ وجود ندارد

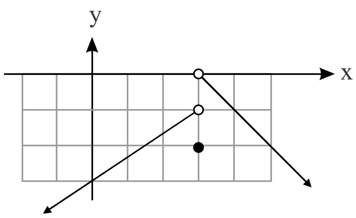
۱۰



$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۲ ,\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۲ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x)=$ وجود ندارد

۱۱

ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم و داریم:



$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۰ ,\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=-۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲} f(x)=$ وجود ندارد

۱۲

الف) $\lim\limits_{x\to m^+} [x]=m$

ب) $\lim\limits_{x\to m^-} [x]=m-۱$

پ) $\lim\limits_{x\to m} [x]=$ وجود ندارد

۱۳ الف – دقیقا نمی‌توان گفت که $f+g$ در $x=a$ حد دارد یا ندارد.

ب – حد تابع $f+g$ در $x=a$ وجود ندارد.

۱۴

$f(x)=x+۳ \to \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۴$

$g(x)=۵x-۱ \to \lim\limits_{x\to ۱} g(x)=۴$

۱۵

الف) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=۲$ ب) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=$ وجود ندارد

پ) $\lim\limits_{x\to ۳} g(x)=۵$ ت) $\lim\limits_{x\to ۳} (f(x)+g(x))=۲+۵=۷$

ث) $\lim\limits_{x\to -۱} (f(x)+g(x))=$ وجود ندارد $+(-۱)=$ وجود ندارد

ج) $\lim\limits_{x\to ۲} (۲f(x)+۵g(x))=۲\lim\limits_{x\to ۲} f(x)+۵\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=۲(-۱)+۵($وجود ندارد$)=$ وجود ندارد

چ) $\lim\limits_{x\to ۰} (f(x))^۴=(\frac{۱}{۳})^۴=\frac{۱}{۸۱}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۰} (g(x))^۲=$ وجود ندارد

خ) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{-۱}{\text{وجود ندارد}}=$ وجود ندارد

د) $\lim\limits_{x\to ۵} (f(x)\cdot g(x))=۵\times ۵=۲۵$

۱۶

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} (f(x)+h(x))=\lim\limits_{x\to ۲} f(x)+\lim\limits_{x\to ۲} h(x)=۳+(-۱)=۲$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲} (h(x))^۵=(\lim\limits_{x\to ۲} h(x))^۵=(-۱)^۵=-۱$

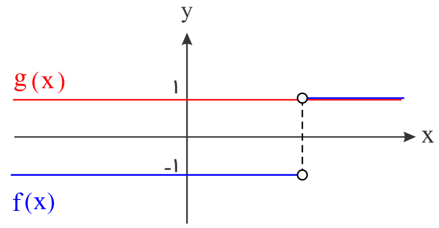
پ) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to ۲} f(x)}{\lim\limits_{x\to ۲} g(x)}=\frac{۳}{۰}=$ وجود ندارد

ت) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to ۲} g(x)}{\lim\limits_{x\to ۲} f(x)}=\frac{۰}{۳}=۰$

ث) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{۳f(x)}{g(x)-۵h(x)}\frac{۳\lim\limits_{x\to ۲} f(x)}{\lim\limits_{x\to ۲} g(x)-۵\lim\limits_{x\to ۲} h(x)}=\frac{۳\times ۳}{۰-۵\times(-۱)}=\frac{۹}{۰+۵}=\frac{۹}{۵}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{۱}{h(x)}=\frac{۱}{\lim\limits_{x\to ۲} h(x)}=\frac{۱}{-۱}=-۱$

۱۷



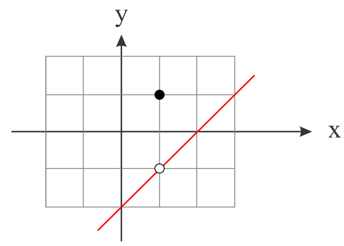
$$f(x)=\frac{|x-۳|}{x-۳} \quad , \quad g(x)=۱$$

$\lim\limits_{x\to ۳} f(x) =$ وجود ندارد

$$\lim_{x\to ۳} g(x)=۱$$

در نقاط $x > ۳$ حد دو تابع با هم برابرند.

۱۸



$$f(x)=\begin{cases} x-۲ & x\neq ۱ \\ ۱ & x=۱ \end{cases}$$

همان‌طور که در شکل می‌بینیم وقتی $x\to ۱$ حد تابع برابر -۱ خواهد بود.

۱۹

تابع f در $x=۱$ پیوسته است.

توابع g,h,k در $x=۱$ پیوسته نیستند.

۲۰ تابع $f(x)=[x]$ در نقاط صحیح پیوسته نیست و در سایر نقاط پیوسته است.

۲۱

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲-۹}{x-۳} & x\neq ۳ \\ ۶ & x=۳ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}\,(x+۳)}{\cancel{(x-۳)}}=۶ \quad , \quad f(۳)=۶$$

$\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=f(۳)$ بنابراین تابع f در $x=۳$ پیوسته است.

$$g(x)=\frac{x^۲-۹}{x-۳}$$

$$\lim_{x\to ۳} g(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}\,(x+۳)}{\cancel{(x-۳)}}=۶$$

وجود ندارد $= g(۳)$ بنابراین تابع g در $x=۳$ پیوسته نیست.

۲۲

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(-۲x+۲)=-۲(۰^-)+۲=۰+۲=۲$$

$$f(۰)=-۲(۰)+۲=۰-۲=۲$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}(x^۲+۲)=(۰^+)^۲+۲=۰+۲=۲$$

تابع f در نقطهٔ $x=\circ$ پیوسته است. $\rightarrow \lim\limits_{x\to\circ} f(x)=f(\circ)\rightarrow$

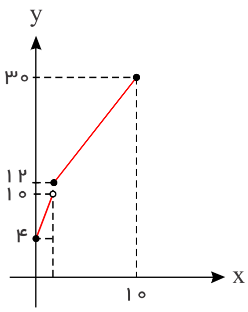
تابع f در نقاط دیگر به جز $x=\circ$ هم پیوسته است.

۲۳

$$f(t)=\begin{cases} ۶t+۴ & \circ\le t<۱ \\ ۲t+۱\circ & ۱\le t\le ۱\circ \end{cases}$$

الف) $f(۲)=۲(۲)+۱\circ=۱۴$ $\qquad$ $f(۵)=۲(۵)+۱\circ=۲\circ$

ب) با توجه به نمودار رسم شده مشاهده می‌شود که تابع f در بازهٔ $[\circ,۱\circ]$ پیوسته نیست.



۲۴

الف) $f(۲)=۲(۲)+۱\rightarrow f(۲)=۵$

$g(۲)=$ وجود ندارد.

$h(۲)=۳$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲}(۲x+۱)=۵$

$\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=\lim\limits_{x\to ۲}(۲x+۱)=۵$

$\lim\limits_{x\to ۲} h(x)=\lim\limits_{x\to ۲}(۲+x)=۴$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=f(۲)\rightarrow$ تابع f در $x=۲$ پیوسته است.

$g(۲)=$ وجود ندارد. $\rightarrow$ تابع g در $x=۲$ پیوسته نیست.

$\lim\limits_{x\to ۲} h(x)\neq h(۲)\rightarrow$ تابع h در $x=۲$ پیوسته نیست.

۲۵ تابع f در $x=۲$ ناپیوسته است و در سایر نقاط پیوسته است.