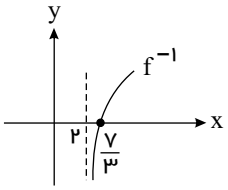
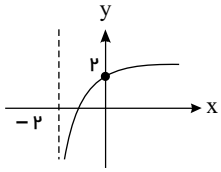
سبقت (۳۸۱۱۷-۰۵۱)

۱ اگر نمودار معکوس تابع $f(x)=\frac{۳^{۲x}}{۳^{a}}-b$ به‌صورت زیر باشد، مقدار $f(۲)$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹



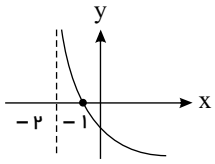
۱) ۲۵ ۲) ۲۹ ۳) وجود ندارد. ۴) ۱۹

۲ شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)=\log_{۲}^{(ax+b)}$ است. این تابع، خط $y=۵$ را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟ قلم چی- ۱۳۹۹



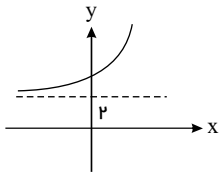
۱) ۱۱ ۲) ۱۲
۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۳ شکل روبه‌رو مربوط به نمودار تابع $y=\log_{۲}^{f(x)}$ است. $f(x)$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹



۱) $x+۲$ ۲) $x-۲$
۳) $\frac{۱}{x+۲}$ ۴) $\frac{۱}{x-۲}$

۴ نمودار مقابل مربوط به تابع یا ضابطهٔ $f(x)=۲^{ax}+b$ است و نقطهٔ $(۳,۶)$ روی آن قرار دارد. حاصل $\log_{b}^{۳a}$ کدام است. $(a>۰)$ قلم چی- ۱۳۹۹



۱) صفر ۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۵ اگر $\log_{۶}^{۲}=a$ باشد، آن‌گاه حاصل $\log_{۳}^{۱۸}$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $\frac{a}{۲-a}$ ۲) $\frac{a}{۱-a}$ ۳) $\frac{۱-a}{۲-a}$ ۴) $\frac{۲-a}{۱-a}$

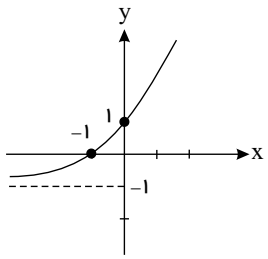
۶ اگر نمودار تابع $f(x)=\log_{a}^{x}$ از نقطهٔ $(۲ \text{ و } ۴)$ بگذرد، حاصل $۴^{\log_{a+۲}^{(a+۱)}}$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۷ نمودار تابع $f(x)=\log(ax+b)$ با دامنهٔ $(-\infty,1)$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم و سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. اگر طول نقطهٔ برخورد نمودار حاصل با نمودار f، برابر $-\sqrt{5}$ باشد، آنگاه $f(-19)$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

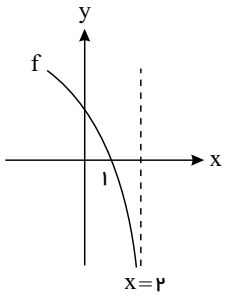
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) $\log 9$

۸ نمودار تابع $y=2^{x+b}-2a$ به‌صورت مقابل است. در این صورت $a+b$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹



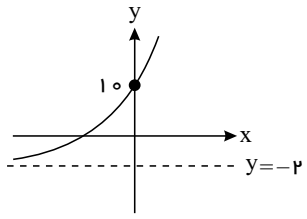
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۹ شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=a+\log(b-x)$ است، حاصل $\log_{\sqrt{b}}^{(\sqrt{2a}+b)}$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰ نمودار تابع $y=3\times 2^{x+a}+b$ به‌صورت زیر می‌باشد. حاصل $a+b$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۱ انرژی یک زلزله‌ای a برابر زلزله‌ای دیگر است $(a>1)$. اگر دو زلزله، $\frac{7}{6}$ ریشتر اختلاف داشته باشند، a کدام است؟ $(\log E=11/8+1/5M)$ قلم چی- ۱۳۹۹

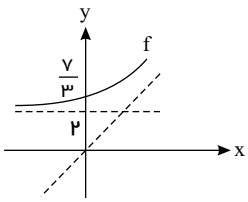
۱) $100\sqrt[4]{10}$ ۲) $10\sqrt[4]{100}$ ۳) $10\sqrt[4]{1000}$ ۴) $1000\sqrt[4]{10}$

۱۲ قدرت یک زلزله ۵ ریشتر $(5M)$ است. انرژی آزاد شده در آن چند ارگ (E) است؟ $(\log 2=0/3,\ \log E=11/8+1/5M)$ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) 2×10^{19} ۲) 3×10^{19} ۳) 2×10^{18} ۴) 3×10^{18}

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ ۴ نمودار f^{-1} را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه می‌کنیم تا نمودار f به‌دست آید؛ شکل زیر را در نظر بگیرید:



$$f(x)=\frac{3^{2x}}{3^a}-b=3^{2x-a}-b$$

با توجه به شکل مشخص است که نمودار تابع نمایی ۲ واحد به بالا انتقال یافته است، پس:

$$-b=2\Rightarrow b=-2$$

از طرفی نمودار f از نقطهٔ $(0,\frac{7}{3})$ عبور می‌کند؛ داریم:

$$f(0)=\frac{7}{3}\to\frac{7}{3}=3^{2(0)-a}+2\to\frac{7}{3}-2=3^{-a}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{3}=3^{-a}\to3^{-1}=3^{-a}\to a=1\to f(x)=3^{2x-1}+2\xrightarrow{x=2}f(2)=3^3+2=29$$

۲ ۱ ۲ ۳ ۴ تابع از نقطهٔ $(0,2)$ می‌گذرد:

$$f(x)=\log_2^{(ax+b)}\Rightarrow 2=\log_2^b\Rightarrow b=4$$

$x=-2$ ، ریشهٔ عبارت جلوی لگاریتم است:

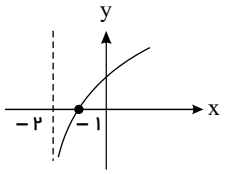
$$ax+b=0\xrightarrow[x=-2]{b=4}-2a+4=0\Rightarrow a=2$$

پس ضابطه به‌صورت $f(x)=\log_2^{(2x+4)}$ است. آن را با خط $y=5$ قطع می‌دهیم.

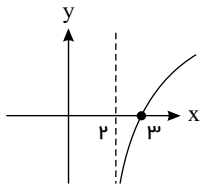
$$\log_2^{(2x+4)}=5\Rightarrow 2x+4=2^5\Rightarrow x=14$$

۳ ۱ ۲ ۳ ۴ نمودار همهٔ گزینه‌ها را رسم می‌کنیم؛ داریم:

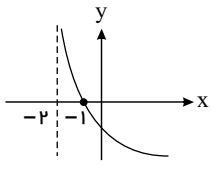
گزینهٔ ۱) $y=\log_2^{(x+2)}$



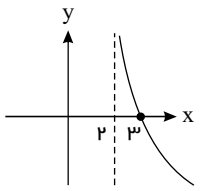
گزینهٔ ۲) $y=\log_2^{(x-2)}$



گزینهٔ ۳) $y=\log_2^{\frac{1}{x+2}}=\log_2^{(x+2)^{-1}}=-\log_2^{(x+2)}$



گزینهٔ ۴) $y=\log_{۲}^{\frac{۱}{x-۲}}=\log_{۲}^{(x-۲)^{-۱}}=-\log_{۲}^{(x-۲)}$



۴ ۱ ۲ ۳ ۴ نمودار تابع $y=۲^{ax}$ به‌اندازهٔ ۲ واحد روی محور yها به سمت بالا انتقال یافته است، بنابراین $b=۲$ است. از طرفی طبق فرض سؤال نقطهٔ $(۳,۶)$ روی نمودار است. پس داریم:

$$\begin{cases} f(۳)=۶ \\ b=۲ \end{cases} \Rightarrow ۲^{۳a}+۲=۶ \Rightarrow ۲^{۳a}=۴$$

$$\Rightarrow ۳a=۲ \Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$$

درنتیجه:

$$\log_{b}^{۳a} \overset{a=\frac{۲}{۳}}{=\!=\!=} \log_{۲}^{۳\times\frac{۲}{۳}}=\log_{۲}^{۲}=۱$$

۵ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\log_{۶}^{۲}=a \Rightarrow \log_{۲}^{۶}=\frac{۱}{a} \Rightarrow \log_{۲}^{۲}+\log_{۲}^{۳}=\frac{۱}{a} \Rightarrow ۱+\log_{۲}^{۳}=\frac{۱}{a} \Rightarrow \log_{۲}^{۳}=\frac{۱}{a}-۱=\frac{۱-a}{a} \Rightarrow \log_{۳}^{۲}=\frac{a}{۱-a} \quad (۱)$$

در نتیجه داریم:

$$\log_{۳}^{۱۸}=\log_{۳}^{۳^{۲}}+\log_{۳}^{۲}=۲\log_{۳}^{۳}+\log_{۳}^{۲} \overset{(۱)}{=\!=} ۲+\frac{a}{۱-a}=\frac{۲-۲a+a}{۱-a}=\frac{۲-a}{۱-a}$$

۶ ۱ ۲ ۳ ۴ نقطهٔ (۲و ۴) در تابع $f(x)=\log_{a}^{x}$ صدق می‌کند.

بنابراین:

$$f(۴)=\log_{a}^{۴}=۲$$

$$\Rightarrow a^{۲}=۴ \Rightarrow \begin{cases} a=۲ & (\text{ق}) \\ a=-۲ & (\text{غ ق}) \end{cases} \xrightarrow{a=۲} ۴^{\log_{a+۲}^{a+۱}}=۴^{\log_{۴}^{۳}}=۳$$

۷ ۱ ۲ ۳ ۴ به ازای دامنهٔ تابع داده شده داریم:

$$ax+b>۰ \Rightarrow ax>-b \xrightarrow[\div a]{a<۰} x<\frac{-b}{a} \Rightarrow (-\infty,\frac{-b}{a})=(-\infty,۱) \Rightarrow \frac{-b}{a}=۱ \Rightarrow b=-a$$

$$f(x)=\log(ax-a)=\log a(x-۱) \xrightarrow[x\to x+۲]{\text{دو واحد به چپ}} \log a(x+۱) \xrightarrow[\text{محور } x\text{ها}]{\text{قرینه نسبت به}} -\log a(x+۱)$$

$$f(x)=-\log a(x+۱) \Rightarrow \log a(x-۱)=\log\frac{۱}{a(x+۱)} \Rightarrow a(x-۱)=\frac{۱}{a(x+۱)} \Rightarrow a^{۲}(x^{۲}-۱)=۱ \xrightarrow{x=-\sqrt{۵}} ۴a^{۲}=۱ \Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۲} \xrightarrow{a<۰} a=\frac{-۱}{۲}$$

با جایگذاری a و b در تابع داریم:

$$f(x)=\log(\frac{-۱}{۲}(x-۱)) \Rightarrow f(-۱۹)=\log ۱۰=۱$$

۸ ۱ ۲ ۳ ۴ تابع از نقاط $(۰,-۱)$ و $(۰,۱)$ می‌گذرد. پس:

$$(۰,۱) \Rightarrow ۱=۲^{b}-۲a \quad (*)$$

$$(-۱,۰) \Rightarrow ۰=۲^{-۱+b}-۲a \Rightarrow ۲a=۲^{-۱+b} \overset{(*)}{\longrightarrow} ۱=۲^{b}-۲^{-۱+b} \Rightarrow ۲^{b}(۱-۲^{-۱})=۱ \Rightarrow ۲^{b}\times\frac{۱}{۲}=۱ \Rightarrow ۲^{b}=۲ \Rightarrow b=۱$$

$$۲a=۲^{-۱+b} \xrightarrow{b=۱} ۲a=۲^{۰}=۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a+b=\frac{۳}{۲}$$

۹ ۱ ۲ ۳ ۴ نمودار داده شده، نمودار تابع $y=\log x$ است که ابتدا نسبت به محور yها قرینه شده و سپس به اندازهٔ ۲ واحد به سمت راست منتقل شده است، بنابراین $b=۲$ است. همچنین نمودار تابع f محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کرده بنابراین $f(۱)=۰$ است. پس:

$$f(۱)=۰ \Rightarrow a+\log(۲-۱)=۰ \Rightarrow a+\log ۱=۰ \Rightarrow a=۰$$

$$\log_{\sqrt{b}}^{(\sqrt{۲a}+b)}=\log_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{۲\times۰+۲}}=\log_{۲^{\frac{۱}{۲}}}^{۲}=۲\log_{۲}^{۲}=۲$$

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴ چون نمودار تابع‌نمایی دارای برد $(-۲,+\infty)$ می‌باشد، پس $b=-۲$ می‌باشد.

$$y=۳\times۲^{x+a}-۲ \xrightarrow{(۰,۱۰)} ۱۰=۳\times۲^{a}-۲ \to ۳\times۲^{a}=۱۲$$

$$۲^{a}=۴ \Rightarrow a=۲ \Rightarrow a+b=۰$$

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ انرژی یکی از زلزله‌ها را $E_۲$ (بزرگ‌تر) و دیگری را $E_۱$ (کوچک‌تر) در نظر می‌گیریم:

$$\begin{matrix} \log E_۱=۱۱/۸+۱/۵M_۱ \\ \log E_۲=۱۱/۸+۱/۵M_۲ \end{matrix} \xrightarrow{-} \log E_۲-\log E_۱$$

$= ۱٫۵(M_۲ - M_۱) \to \log \frac{E_۲}{E_۱} = ۱٫۵(\frac{۷}{۶}) = \frac{۳}{۲} \times \frac{۷}{۶} = \frac{۷}{۴}$

از آنجایی که $\frac{E_۱}{E_۲} = a$ است؛ داریم:

$\Rightarrow \log_{۱۰}^{a} = \frac{۷}{۴} \Rightarrow a = ۱۰^{\frac{۷}{۴}} = \sqrt[۴]{۱۰^{۷}} = \sqrt[۴]{۱۰^{۴} \times ۱۰^{۳}} = ۱۰\sqrt[۴]{۱۰۰۰}$

۱۲ ۴ ۳ ۲ **۱**

$\log E = ۱۱٫۸ + ۱٫۵M \xrightarrow{M=۵} \log E = ۱۱٫۸ + ۷٫۵ = ۱۹٫۳ \to E = ۱۰^{۱۹٫۳}$

با فرض $\log^{۲} = ۰٫۳$، داریم: $۱۰^{۰٫۳} = ۲$

پس:

$E = ۱۰^{۱۹٫۳} = ۱۰^{۱۹} \times \underbrace{۱۰^{۰٫۳}}_{۲} = ۲ \times ۱۰^{۱۹}$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱ ۱ ۲ ۳ ۴	۴ ۱ ۲ ۳ ۴	۷ ۱ ۲ ۳ ۴	۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴
۲ ۱ ۲ ۳ ۴	۵ ۱ ۲ ۳ ۴	۸ ۱ ۲ ۳ ۴	۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴
۳ ۱ ۲ ۳ ۴	۶ ۱ ۲ ۳ ۴	۹ ۱ ۲ ۳ ۴	۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴