سبقت (۳۸۱۱۷-۰۵۱)

۱ از معادله‌ی لگاریتمی $\log_{۳}^{(۲x^۲+۱)} - \log_{۳}^{(x+۲)} = ۱$ ، مقدار لگاریتم $(۲x-۱)$ در پایه‌ی ۸، کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲ از تساوی $\log_{x}^{۵} + ۱ = \log_{x}(x^۲+۴)$، مقدار لگاریتم x در پایه‌ی ۲ ، کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۳ از دو معادله‌ی دومجهولی $۳^{۲x+y} = ۹ \times ۳^{x-y}$ و $\log(x+۲y) = ۱ + \log y$، مقدار x کدام است؟

۱) ۱٫۲ ۲) ۱٫۴ ۳) ۱٫۵ ۴) ۱٫۶

۴ از دو معادله‌ی $۴^x + ۲^x = ۷۲$ و $\log(x+۱) + \log(۲y+x^۲) = ۲$، مقدار y کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۵ از معادله‌ی لگاریتمی $\log(۲x-۵) - \log(x-۳) = \log(x^۲-x-۶)$ ، مقدار لگاریتم $\sqrt[۳]{x+۱}$ در پایه‌ی ۴، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

۶ از دو معادله‌ی دو مجهولی $۲^{x-۷} \times ۴^{x+y} = ۱$ و $\log y = ۲\log ۳ + \log x$، مقدار y کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷ از تساوی $\log_x^{x-۶} = ۲ - \log_x^{۳x+۸}$، مقدار لگاریتم x در پایه‌ی ۴، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۸ اگر $\log_۲^{۲+\log_۳^x} = ۲$ باشد، حاصل $\log_۳^{(\log_۲(x-۱))}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۹ اگر $f(x) = ۲ - ۴\log(۲x+۲)$ باشد، $f(۴۹)$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۲ ۳) -۴ ۴) -۱

۱۰ نمودارهای دو تابع $f(x) = \log_{\frac{۱}{۳}}^{\frac{۱}{x}}$ و $g(x) = \log_۳^{(-x)}$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱) منطبق بر هم
۲) در هیچ نقطه‌ای متقاطع نیستند.
۳) $f(x)$ همواره بالاتر از $g(x)$ است.
۴) $g(x)$ همواره بالاتر از $f(x)$ است.

۱۱ وارون تابع $f(x) = (\frac{۱}{۲})^{-x}$ کدام تابع است؟

۱) $f^{-۱}(x) = \log_۲^x$ ۲) $f^{-۱}(x) = \log_{\frac{۱}{۲}}^{-x}$ ۳) $f^{-۱}(x) = \log_{\frac{۱}{۲}}^x$ ۴) $f^{-۱}(x) = ۲^{-x}$

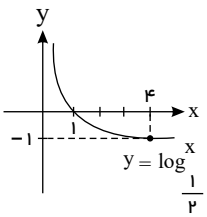
۱۲ تعداد جواب‌های معادلهٔ لگاریتمی $\log_{۳}^{(۵x^{۲}+۲x-۷)} - \log_{۳}^{(x-۱)} = ۲$ کدام است؟

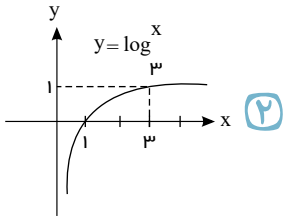
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

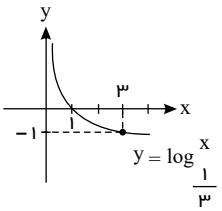
۱۳ اگر $\log ۳ = x$ و $\log ۱۷ = y$، آنگاه حاصل $\log_{۳}^{\sqrt[۳]{۵/۱}}$ برحسب x و y همواره کدام است؟

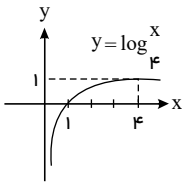
۱) $\frac{x+۲y-۱}{۳x}$ ۲) $\frac{x+۲y-۱}{۲x}$ ۳) $\frac{x+y-۱}{۳x}$ ۴) $\frac{x+y-۱}{۲x}$

۱۴ نمودار کدام تابع درست رسم نشده است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۵ اگر $\log_{۲۷}^{۳\sqrt{۳}} = \frac{x}{۳}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\log_{\sqrt{۸}}^{(۶x-۱)}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۲

۱۶ اگر $\log^{۲} ۰/۳ \simeq$ و $\log^{۳} ۰/۴۸ \simeq$، حاصل $\log_{۱/۵}^{۲/۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{۹}$ ۲) $\frac{۲۰}{۹}$ ۳) $\frac{۳۵}{۹}$ ۴) $\frac{۱۰}{۳}$

۱۷ اگر $۲^{(\log_{۲}^{(x+۲)} + \log_{۲}^{(x-۲)})} = ۳^{\frac{۱}{۲}\log^{۳x}_{\sqrt{۳}}}$ باشد، حاصل $\log_{۲}^{(x+۴)}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۸ اگر $\log x = ۲\log(x-۱) - \log ۲$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) $۱+\sqrt{۳}$ ۲) $۲+\sqrt{۳}$ ۳) $۴+\sqrt{۳}$ ۴) $۴-\sqrt{۳}$

۱۹ از معادلهٔ $\log_{۱۶}^{(x+۱۴)} + \log_{۴}^{(x+۱۴)} + \log_{۲}^{(x+۱۴)} = ۷$ ، مقدار لگاریتم $\sqrt{x}$ در مبنای ۸ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۲۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۳^{۲ax+b}$ ، $f(۲) = ۳$ و $f^{-۱}(۱) = ۴$ است، حاصل $\log_{۲۷}^{f(-۴)}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۲۱ اگر نمودار $f(x) = ۲\log_a^x$ از نقطهٔ $(۹, ۲)$ عبور کند، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۲ حاصل عبارت $A = ۲\log_{۱۰}^{\sqrt{۱۰۰۰}} - \log_{۷}^{\sqrt[۵]{۴۹}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۵}$ ۲) $\frac{۷}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

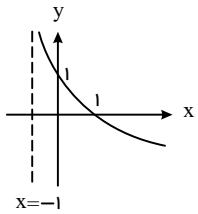
۲۳ اگر $۳^{\log_۳^۲} = \log_{۲}^{(x+۱)} + \log_{۲}^{(x-۲)}$ باشد، حاصل لگاریتم $۷x-۵$ در پایهٔ ۴ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴ اگر $\log ۲ = n$ و $\log ۳ = m$ باشد، آنگاه حاصل $\sqrt[۳]{۱۲}^{\log^{۴,۵}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۶m - ۳n - ۳}{۳m + n}$ ۲) $\frac{۶m - ۳n}{۳m + \frac{۱}{۲}n}$ ۳) $\frac{۶m - ۳n - ۳}{۳m + ۲n}$ ۴) $\frac{۶m - ۳n}{m + ۲n}$

۲۵ اگر نمودار تابع $f(x) = a - \log_b^{(x+۱)}$ به صورت زیر باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟



۱) -۱ ۲) ۲
۳) -۲ ۴) ۱

۲۶ اگر حاصل عبارت $A = ۲^{(\log^{۴}_{\sqrt{۲}} - \log^{x}_{۲})}$ برابر با یک باشد، آن‌گاه مقدار $\log^{\sqrt[۳]{x}}_{\frac{۱}{۲}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۵}$ ۲) $-\frac{۴}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۷}$

۲۷ اگر $\log(\sqrt{۲}m) - \log ۱ = ۳\log ۲ + \log(m + ۱)$ باشد، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۳ - \sqrt{۲}$ ۳) $۲ + ۲\sqrt{۲}$ ۴) ۵

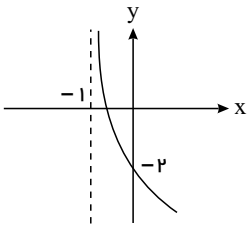
۲۸ اگر $\log^{۳}_{۱۲} = a$ باشد، حاصل $\log^{۸}_{\sqrt{۲۷}}$ کدام است؟

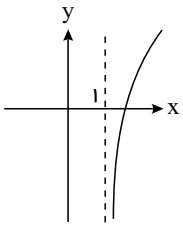
۱) $\frac{۱}{a}$ ۲) $\frac{۱ - a}{۴a}$ ۳) $\frac{۱ - a}{۲a}$ ۴) $\frac{۱ - a}{a}$

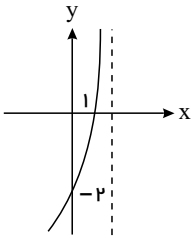
۲۹ عرض نقطهٔ برخورد دو تابع $y = \log_۵^{(x+۲)}$ و $y = ۱ - \log_۵^{(x-۲)}$ کدام است؟

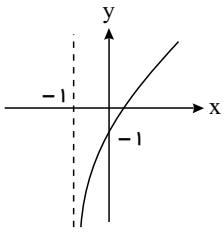
۱) دو تابع متقاطع نمی‌باشند. ۲) صفر
۳) ۱ ۴) ۵

۳۰ کدام گزینه، نمودار تابع $y = \log_{۲}^{(x+۱)} - ۱$ را نشان می‌دهد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۱ حاصل عبارت $\log_{\sqrt[۴]{۲}}^{۲\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۶

۳۲ برای رسم نمودار تابع $y = -\log_{۲}(x-۱)+۱$ به کمک انتقال $y = \log_{۲}^{x}$ ، کدام گزینه درست است؟

۱) ابتدا نمودار را یک واحد به سمت راست انتقال داده سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم و یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

۲) ابتدا نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال داده سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم و یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

۳) ابتدا نمودار را یک واحد به سمت راست انتقال داده سپس نسبت به محورxها قرینه می‌کنیم و یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

۴) ابتدا نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم سپس یک واحد به سمت راست انتقال داده و یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم: $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \ , \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \ , \ \log_b^N = x \to N = b^x$

$$\log_۳^{۲x^۲+۱} - \log_۳^{x+۲} = ۱ \to \log_۳^{\frac{۲x^۲+۱}{x+۲}} = ۱ \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{۲x^۲+۱}{x+۲} = ۳^۱$$

$$\to ۲x^۲ + ۱ = ۳x + ۶ \to ۲x^۲ - ۳x - ۵ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -۱ \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{۵}{۲} \end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده، قابل قبول هستند ولی برای محاسبه‌ی $\log_۸^{۲x-۱}$ فقط به جای x، می‌توانیم مقدار $x = \frac{۵}{۲}$ را جایگزین کنیم، زیرا $x = -۱$ جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.

$$\log_۸^{۲x-۱} \xrightarrow{x=\frac{۵}{۲}} \log_۸^{۲(\frac{۵}{۲})-۱} = \log_۸^۴ = \log_{۲^۳}^{۲^۲} = \frac{۲}{۳}$$

۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log_k^{a^n} = n\log_k^a$

$$\log_x^{x^۲+۴} = ۱ + \log_x^۵ \Rightarrow \log_x^{x^۲+۴} = \log_x^x + \log_x^۵ \Rightarrow \log_x^{x^۲+۴} = \log_x^{۵x} \Rightarrow x^۲ + ۴ = ۵x$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۵x + ۴ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x = ۱ \quad \text{غ ق ق (مبنا نمی‌تواند یک باشد)} \\ x = \frac{c}{a} = ۴ \end{cases}$$

$$\log_۲^x \xrightarrow{x=۴} \log_۲^۴ = \log_۲^{۲^۲} = ۲$$

۳ ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$

$$۳^{۲x+y} = ۹ \times ۳^{x-y} \to ۳^{۲x+y} = ۳^۲ \times ۳^{x-y} \to ۳^{۲x+y} = ۳^{۲+x-y}$$

$$\to ۲x + y = ۲ + x - y \to x + ۲y = ۲ \to x = ۲ - ۲y$$

از طرفی: $\log(x+۲y) = ۱ + \log y \to \log(x+۲y) = \log ۱۰ + \log y \to \log(x+۲y) = \log ۱۰y$

$$\to x + ۲y = ۱۰y \to x = ۸y \xrightarrow{x=۲-۲y} ۲ - ۲y = ۸y \to ۱۰y = ۲ \to y = \frac{۲}{۱۰} \xrightarrow{x=۸y} x = \frac{۱۶}{۱۰} = ۱٫۶$$

۴ ۱ ۲ **۳** ۴ ۴

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log_b^N = x \to N = b^x$

$$۴^x + ۲^x = ۷۲ \Rightarrow (۲^x)^۲ + ۲^x - ۷۲ = ۰ \xrightarrow{۲^x = A} A^۲ + A - ۷۲ = ۰ \Rightarrow (A+۹)(A-۸) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -۹ \Rightarrow ۲^x = -۹ \to \text{امکان ندارد} \\ A = ۸ \Rightarrow ۲^x = ۸ \Rightarrow x = ۳ \end{cases}$$

$$\log(x+۱) + \log(۲y + x^۲) = ۲ \xrightarrow{x=۳} \log ۴ + \log(۲y+۹) = ۲$$

$$\Rightarrow \log(۸y + ۳۶) = ۲ \xrightarrow{\text{تعریف}} ۸y + ۳۶ = ۱۰^۲ \Rightarrow ۸y = ۶۴ \Rightarrow y = ۸$$

۵ ۱ **۲** ۳ ۴

می‌دانیم: $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \ , \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a$

$$\log(x^۲ - x - ۶) - \log(x-۳) = \log(۲x-۵) \to \log\frac{x^۲ - x - ۶}{x-۳} = \log(۲x-۵)$$

$$\to \frac{(x-۳)(x+۲)}{(x-۳)} = ۲x - ۵ \to x + ۲ = ۲x - ۵ \to x = ۷$$

$$\log_۴^{\sqrt[۳]{x+۱}} = \log_۴^{\sqrt[۳]{۸}} = \log_{۲^۲}^۲ = \frac{۱}{۲}$$

۶ ۱ ۲ **۳** ۴ می‌دانیم: $\log_k^{a^n} = n\log_k^a \ , \ \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$

$۲^{x-۷} \times ۴^{x+y} = ۱ \to ۲^{x-۷} \times (۲^۲)^{x+y} = ۱ \to ۲^{x-۷+۲x+۲y} = ۱ \to ۲^{۳x+۲y-۷} = ۱ \to ۳x + ۲y - ۷ = ۰$

$\log y = ۲\log ۳ + \log x \to \log y = \log ۹ + \log x \to \log y = \log ۹x \to y = ۹x$

پس: $\begin{cases} ۳x + ۲y = ۷ \\ y = ۹x \end{cases} \to ۳x + ۱۸x = ۷ \to ۲۱x = ۷ \to x = \frac{۱}{۳} \ , \ y = ۹(\frac{۱}{۳}) = ۳$

۷ ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log_{k^n}^{a^m} = \frac{m}{n}\log_k^a \ , \ \log_b^N = x \to N = b^x$

$\log_x^{۳x+۸} = ۲ - \log_x^{x-۶} \to \log_x^{۳x+۸} + \log_x^{x-۶} = ۲$

$\to \log_x^{(۳x+۸)(x-۶)} = ۲ \xrightarrow{\text{تعریف}} (۳x + ۸)(x - ۶) = x^۲$

$\to ۳x^۲ - ۱۸x + ۸x - ۴۸ = x^۲ \to ۲x^۲ - ۱۰x - ۴۸ = ۰$

$\to x^۲ - ۵x - ۲۴ = ۰ \to (x - ۸)(x + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۸ & \text{ق ق} \\ x = -۳ & \text{غ ق ق} \end{cases}$ (جلوی لگاریتم را منفی می کند)

$\log_۴^x \xrightarrow{x=۸} \log_۴^۸ = \log_{۲^۲}^{۲^۳} = \frac{۳}{۲}$

۸ ۱ **۲** ۳ ۴ از معادلهٔ اول x را حساب می‌کنیم:

$\log_۲^{(۲+\log_۳^x)} = ۲ \Rightarrow ۲ + \log_۳^x = ۲^۲ = ۴$

$\Rightarrow \log_۳^x = ۲ \Rightarrow x = ۹$

حال در عبارت داده شده $x = ۹$ را قرار می‌دهیم:

$\log_۳^{\log_۲^{(x-۱)}} \xrightarrow{x=۹} \log_۳^{(\log_۲^{(۸)})} = \log_۳^{(۳\log_۲^۲)} = \log_۳^۳ = ۱$

۹ ۱ ۲ ۳ ۴

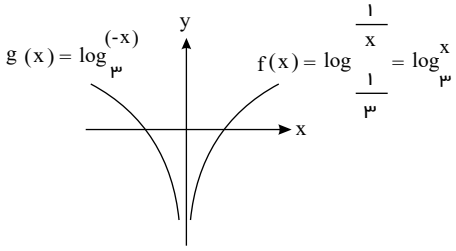
$f(x) = ۲ - ۴\log(۲x + ۲)$

$\xrightarrow{x=۴۹} f(۴۹) = ۲ - ۴\log(۲ \times ۴۹ + ۲)$

$= ۲ - ۴\log ۱۰۰ = ۲ - ۴ \times ۲ = ۲ - ۸ = -۶$

۱۰ ۱ **۲** ۳ ۴ دامنهٔ $\log_{\frac{۱}{۳}}^{\frac{۱}{x}}$ فاصلهٔ $(۰, +\infty)$ و دامنهٔ $\log_۳^{(-x)}$ به‌صورت $(-\infty, ۰)$ است. پس دامنهٔ دو تابع هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند و اساساً هیچ کدام بالای دیگری نیست.

شکل زیر را در نظر بگیرید:



این دو منحنی نسبت به محور y ها قرینهٔ هم هستند.

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا $f(x)$ را کمی ساده‌تر می‌کنیم؛ داریم:

$f(x) = (\frac{۱}{۲})^{-x} = ۲^x$

وارون تابع نمایی $f(x) = ۲^x$ را به‌صورت $f^{-۱}(x) = \log_۲^x$ نمایش می‌دهیم.

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$\log_۳^{۵x^۲+۲x-۷} - \log_۳^{x-۱} = ۲$

$\Rightarrow \log_۳^{\frac{۵x^۲+۲x-۷}{x-۱}} = ۲$

در نتیجه طبق تعریف لگاریتم داریم:

$$\frac{۵x^۲+۲x-۷}{x-۱}=۳^۲ \Rightarrow ۵x^۲+۲x-۷=۹x-۹$$

$$\Rightarrow ۵x^۲-۷x+۲=۰ \xrightarrow{a+b+x=۰} \begin{cases} x=۱ \text{ (غ ق ق)} \\ x=\frac{۲}{۵} \text{ (غ ق ق)} \end{cases}$$

هر دو مقدار x در دامنهٔ $\log_۳(x-۱)$ که برابر $(۱,+\infty)$ است، قرار ندارند، پس معادله جواب ندارد.

۱۳ ۱ ۲ **۳** ۴ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases} \log ۳ = x \\ \log ۱۷ = y \end{cases} \quad (۱)$$

پس:

$$\log_۳^{\sqrt[۳]{۵/۱}} = \frac{۱}{۳}\log_۳^{\frac{۵۱}{۱۰}} = \frac{۱}{۳}(\log_۳^{۵۱} - \log_۳^{۱۰})$$

$$= \frac{۱}{۳}(\log_۳^{۳\times ۱۷} - \log_۳^{۱۰})$$

$$= \frac{۱}{۳}(\log_۳^{۳} + \log_۳^{۱۷} - \log_۳^{۱۰})$$

$$= \frac{۱}{۳}(۱ + \frac{\log_{۱۰}^{۱۷}}{\log_{۱۰}^{۳}} - \frac{\log_{۱۰}^{۱۰}}{\log_{۱۰}^{۳}}) \overset{(۱)}{=\!=} \frac{۱}{۳}(۱ + \frac{y}{x} - \frac{۱}{x})$$

$$= \frac{۱}{۳}(\frac{x+y-۱}{x}) = \frac{x+y-۱}{۳x}$$

۱۴ **۱** ۲ ۳ ۴ با توجه به نقاط روی شکل گزینهٔ (۱) داریم:

$$\xrightarrow{x=۱} y = \log_{\frac{۱}{۲}}^{۱} = ۰$$

نقطهٔ $(۱,۰)$ روی تابع قرار دارد اما نقطهٔ $(-۱,۴)$ روی نمودار قرار ندارد؛ پس نمودار رسم شده در گزینهٔ (۱) صحیح نیست.

$$\xrightarrow{x=۴} y = \log_{\frac{۱}{۲}}^{۴} = -۲$$

تذکر: نمودار رسم شده در گزینهٔ «۱»، نمودار تابع $y = \log_{\frac{۱}{۴}}^{x}$ است.

۱۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\log_{۳\times ۳^{\frac{۱}{۲}}}^{۳^{\frac{۳}{۲}}} = \log_{۳^{\frac{۳}{۲}}}^{۳^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۱}}\log_۳^{۳} = \frac{۱}{۲} = \frac{x}{۳} \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{۸}}^{۶x-۱} \overset{x=\frac{۳}{۲}}{=\!=} \log_{۲^{\frac{۳}{۲}}}^{(۶(\frac{۳}{۲})-۱)} = \log_{۲^{\frac{۳}{۲}}}^{۸} = \log_{۲^{\frac{۳}{۲}}}^{۲^۳} = \frac{\overbrace{۳}^{۱}}{\frac{۳}{۲}}\log_۲^۲ = ۲$$

۱۶ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\log_{۱/۵}^{۲/۵} = \frac{\log^{۲/۵}}{\log^{۱/۵}} = \frac{\log^{\frac{۵}{۲}}}{\log^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\log^۵ - \log^۲}{\log^۳ - \log^۲} = \frac{۱ - \log^۲ - \log^۲}{\log^۳ - \log^۲}$$

$$= \frac{۱ - ۲\log^۲}{\log^۳ - \log^۲} \overset{\log^۲ \simeq ۰/۳ \log^۳ \simeq ۰/۴۸}{=\!=\!=\!=\!=} \frac{۱ - ۲(۰/۳)}{۰/۴۸ - ۰/۳} = \frac{۱ - ۰/۶}{۰/۴۸ - ۰/۳} = \frac{۰/۴}{۰/۱۸} = \frac{۲۰}{۹}$$

۱۷ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\log_۲^{(x+۲)} + \log_۲^{(x-۲)} = \log_۲^{(x+۲)(x-۲)} = \log_۲^{(x^۲-۴)}$$

با توجه به فرمول $a^{\log_a^x} = x$ داریم:

$$۳^{\frac{۱}{۲}\log^{۳x}}\sqrt{۳} = ۳^{\log_۳^{۳x}} = ۳x \quad (۱)$$

$$۲^{\log_{۲}^{(x^{۲}-۴)}} = (x^{۲}-۴) \quad (۲)$$

با جایگذاری (۱) و (۲) در معادله لگاریتمی سؤال داریم:

$$\Rightarrow ۳x = x^{۲} - ۴$$

$$\Rightarrow x^{۲} - ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow (x+۱)(x-۴) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \text{ (غ ق ق)} \\ x = ۴ \text{ (ق ق)} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow \log_{۲}^{(x+۴)} = \log_{۲}^{۸} = ۳$$

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\log(x-۱)^{۲} - \log ۲ = \log x \Rightarrow \log \frac{(x-۱)^{۲}}{۲} = \log x \Rightarrow \frac{(x-۱)^{۲}}{۲} = x \Rightarrow (x-۱)^{۲} = ۲x \Rightarrow x^{۲} - ۲x + ۱ = ۲x \Rightarrow x^{۲} - ۴x + ۱ = ۰$$

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac = ۱۶ - ۴ = ۱۲ \Rightarrow \begin{cases} x_{۱} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۴+\sqrt{۱۲}}{۲} = ۲ + \sqrt{۳} & \text{(ق ق)} \\ x_{۲} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۴-\sqrt{۱۲}}{۲} = ۲ - \sqrt{۳} & \text{(غ ق ق)} \end{cases}$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\log_{۲}^{(x+۱۴)} + \frac{۱}{۲}\log_{۲}^{(x+۱۴)} + \frac{۱}{۴}\log_{۲}^{(x+۱۴)} = ۷ \Rightarrow \frac{۷}{۴}\log_{۲}^{(x+۱۴)} = ۷ \Rightarrow \log_{۲}^{(x+۱۴)} = ۴ \Rightarrow x + ۱۴ = ۱۶ \Rightarrow x = ۲$$

در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow \log_{۸}^{\sqrt{x}} \xrightarrow{x=۲} \log_{۸}^{\sqrt{۲}} = \log_{۲^{۳}}^{۲^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۱}}\log_{۲}^{۲} = \frac{۱}{۶}$$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(۲) = ۳ \Rightarrow ۳۶^{۴a+b} = ۳ \Rightarrow ۴a + b = ۱ \quad (۱)$$

$$f^{-۱}(۱) = ۴ \Rightarrow f(۴) = ۱ \Rightarrow ۳^{۸a+b} = ۱ \Rightarrow ۸a + b = ۰ \quad (۲)$$

بنابر (۱) و (۲) داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴a + b = ۱ \\ ۸a + b = ۰ \end{cases}$$

از حل دستگاه دو معادله، دو مجهول به‌دست آمده مقادیر a و b را می‌یابیم.

$$-۱ \times \begin{cases} (۴a + b = ۱) \\ ۸a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۴a - b = -۱ \\ ۸a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow ۴a = -۱$$

$$\Rightarrow a = \frac{-۱}{۴}, b = ۲$$

بنابراین $f(x) = ۳^{۲(-\frac{۱}{۴})x+۲}$ و همچنین داریم:

$$\log_{۲۷}^{f(x)} = \log_{۳^{۳}}^{۳^{۲ax+b}} = \frac{۲ax+b}{۳}\log_{۳}^{۳} = \frac{۲ax+b}{۳}$$

$$\xrightarrow{x=-۴ \text{ در معادله صدق می‌کند}} \log_{۲۷}^{f(-۴)} \xrightarrow{a=\frac{-۱}{۳}, b=۲} \frac{۲(-\frac{۱}{۴})(-۴)+۲}{۳} = \frac{۲+۲}{۳} = \frac{۴}{۳}$$

۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴ چون نمودار تابع از نقطهٔ (۹, ۲) می‌گذرد، پس در معادلهٔ f(x) صدق می‌کند؛ داریم:

$$\xrightarrow{(۹,۲)} f(۹) = ۲ \Rightarrow ۲\log_{a}^{۹} = ۲ \Rightarrow \log_{a}^{۹} = ۱ \Rightarrow a = ۹$$

۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$۲\log_{۱۰}^{\sqrt{۱۰۰۰}} = \log_{۱۰}^{(\sqrt{۱۰۰۰})^{۲}} = \log_{۱۰}^{۱۰۰۰} = ۳ \quad (۱)$$

$$\log_{۷}^{\sqrt[۵]{۴۹}} = \log_{۷}^{\sqrt[۵]{۷^{۲}}} = \frac{۲}{۵}\log_{۷}^{۷} = \frac{۲}{۵} \quad (۲)$$

در نتیجه بنابر (۱) و (۲) داریم:

$$\Rightarrow A = ۳ - \frac{۲}{۵} = \frac{۱۵ - ۲}{۵} = \frac{۱۳}{۵}$$

۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\log_{۲}^{(x+۱)} + \log_{۲}^{(x-۲)} = ۳^{\log_{۳}^{۲}} \Rightarrow \log_{۲}^{(x+۱)(x-۲)} = ۲ \Rightarrow x^{۲} - x - ۲ = ۴ \Rightarrow x^{۲} - x - ۶ = ۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ & (\text{ق ق}) \\ x = -۲ & (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{۴}^{۷x-۵} \xrightarrow{x=۳} \log_{۴}^{(۲۱-۵)} = \log_{۴}^{۱۶} = ۲$$

۲۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\log^{۴,۵} \sqrt[۳]{۱۲} = \frac{\log ۴,۵}{\log \sqrt[۳]{۱۲}} = \frac{\log^{۴۵} - \log^{۱۰}}{\frac{۱}{۳}\log^{۱۲}} = \frac{\log^{۹\times۵} - ۱}{\frac{۱}{۳}\log^{۳\times۴}} = \frac{\log^{۹} + \log^{۵} - ۱}{\frac{۱}{۳}(\log^{۳} + \log^{۴})} = \frac{۲\log^{۳} + (۱ - \log^{۲}) - ۱}{\frac{۱}{۳}(\log^{۳} + ۲\log^{۲})} \quad \frac{۲\log^{۳} - \log^{۲}}{\frac{۱}{۳}(\log^{۳} + ۲\log^{۲})}$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به فرض سؤال}} \frac{۲m - n}{\frac{۱}{۳}(m + ۲n)} = \frac{۶m - ۳n}{m + ۲n}$$

۲۵ ۱ ۲ ۳ ۴ — نمودار تابع $f(x)$ از دو نقطهٔ $(۰,۱)$ و $(۱,۰)$ می‌گذرد، پس در معادلهٔ $f(x)$ صدق می‌کند؛ داریم:

$$\xrightarrow{(۰,۱)} f(۰) = a - \log_{b}^{۱} = ۱ \Rightarrow a - ۰ = ۱ \Rightarrow a = ۱$$

$$\Rightarrow f(x) = ۱ - \log_{b}^{(x+۱)} \xrightarrow{(۱,۰)} f(۱) = ۱ - \log_{b}^{۲} = ۰ \Rightarrow \log_{b}^{۲} = ۱ \Rightarrow b = ۲$$

در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow a - b \xrightarrow{a=۱\,,\,b=۲} ۱ - ۲ = -۱$$

۲۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\log_{\sqrt{۲}}^{۴} - \log_{۲}^{x} = \log_{\frac{۱}{۲^{۲}}}^{۴} - \log_{۲}^{x} = ۲\log_{۲}^{۴} - \log_{۲}^{x} = \log_{۲}^{۱۶} - \log_{۲}^{x} = \log_{۲}^{\frac{۱۶}{x}}$$

$$A = ۲^{(\log_{\sqrt{۲}}^{۴} - \log_{۲}^{x})} = ۱ \Rightarrow ۲^{\log_{۲}^{\frac{۱۶}{x}}} = ۱ \Rightarrow \frac{۱۶}{x} = ۱ \Rightarrow x = ۱۶$$

$$\log_{\frac{۱}{۲}}^{\sqrt[۳]{x}} = \log_{\frac{۱}{۲}}^{\sqrt[۳]{۱۶}} = \log_{۲^{-۱}}^{\sqrt[۳]{۲^{۴}}} = -\frac{۴}{۳}$$

۲۷ ۱ ۲ ۳ ۴ — بنابر ویژگی‌های لگاریتم، می‌دانیم $\log_{a}^{۱} = ۰$ است. لذا داریم:

$$۲\log\sqrt{۲}m - \log ۱ = ۳\log ۲ + \log(m+۱) \Rightarrow \log ۲m^{۲} = \log ۸ + \log(m+۱) \Rightarrow \log ۲m^{۲} = \log ۸(m+۱) \Rightarrow m^{۲} - ۴m - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۲ - ۲\sqrt{۲} & (\text{غ ق}) \\ m = ۲ + ۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

در نتیجه تنها مقدار ممکن برای m، $۲ + ۲\sqrt{۲}$ است.

۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴ — به شرط تعریف لگاریتم‌ها داریم:

$$\log_{b}^{a} = A \Rightarrow a = b^{A} \Rightarrow \sqrt[A]{a} = b \Rightarrow b = a^{\frac{۱}{A}} \Rightarrow \log_{a}^{b} = \frac{۱}{A}$$

$$\log_{b^{m}}^{a} = A \Rightarrow (b^{m})^{A} = a \Rightarrow (b^{A})^{m} = a \Rightarrow b^{A} = \sqrt[m]{a} = a^{\frac{۱}{m}} \Rightarrow \log_{b}^{a^{\frac{۱}{m}}} = A \Rightarrow \frac{۱}{m}\log_{b}^{a} = A \Rightarrow \log_{b^{m}}^{a} = \frac{۱}{m}\log_{b}^{a}$$

$$\log_{b}^{a} = \frac{۱}{\log_{a}^{b}} \Rightarrow \log_{۳}^{۱۲} = \frac{۱}{\log_{۱۲}^{۳}} = \frac{۱}{a}$$

$$\log_{۳}^{۳\times۴} = \frac{۱}{a} \Rightarrow \log_{۳}^{۳} + \log_{۳}^{۴} = \frac{۱}{a} \Rightarrow ۱ + ۲\log_{۳}^{۲} = \frac{۱}{a} \Rightarrow \log_{۳}^{۲} = \frac{\frac{۱}{a} - ۱}{۲} = \frac{۱ - a}{۲a}$$

$$\log_{\sqrt{۲۷}}^{۸} = \log_{\frac{۳}{۲}}^{۲^{۳}} = \frac{۳}{\frac{۳}{۲}}\log_{۳}^{۲} = ۲\log_{۳}^{۲} = ۲ \times \frac{۱ - a}{۲a} = \frac{۱ - a}{a}$$

۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\log_{۵}^{(x+۲)} = ۱ - \log_{۵}^{(x۲)} \Rightarrow \log_{۵}^{(x+۲)} + \log_{۵}^{(x-۲)} = ۱ \Rightarrow \log_{۵}^{(x+۲)(x-۲)} = ۱ \Rightarrow x^{۲} - ۴ = ۵ \Rightarrow x^{۲} = ۹ \Rightarrow x = \pm ۳$$

فقط $x = ۳$ قابل قبول است.

$$x = ۳ \Rightarrow y = \log_{۵}^{۳+۲} = \log_{۵}^{۵} = ۱$$

۳۰ ۱ ۲ ۳ **۴** راه حل اول: ابتدا دامنهٔ تابع را می‌یابیم:

$x + ۱ > ۰ \Rightarrow x > -۱$

حال نقطهٔ برخورد نمودار تابع با محور yها را به‌دست می‌آوریم، داریم:

$y = \log_{۲}^{(۰+۱)} - ۱ = \log_{۲}^{۱} - ۱ = ۰ - ۱ = -۱$

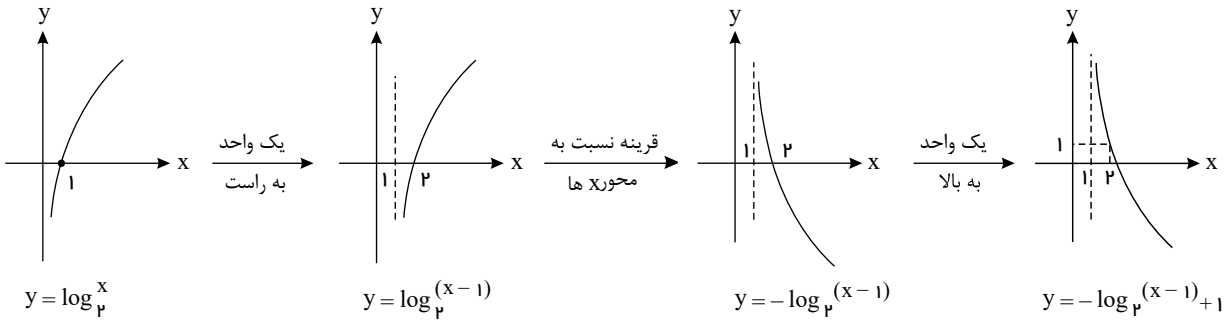
تنها نمودار گزینهٔ «۴» این دو شرط را دارد.

راه حل دوم: اگر نمودار $\log_{۲}^{x}$ را یک واحد به سمت چپ و سپس یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم نمودار تابع موردنظر به‌دست می‌آید.

۳۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\log_{\sqrt[۴]{۲}}^{\sqrt{۲}} = \log_{۲^{-\frac{۱}{۴}}}^{۲^{\frac{۱}{۲}}} = \log_{۲^{-\frac{۱}{۴}}}^{۲^{۱+\frac{۱}{۲}}} \Rightarrow \log_{۲^{-\frac{۱}{۴}}}^{۲^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۱}{۴}} \log^{۲} ۲ = ۶$$

۳۲ ۱ ۲ **۳** ۴



$y = \log_{۲}^{x}$ $\quad y = \log_{۲}^{(x-۱)}$ $\quad y = -\log_{۲}^{(x-۱)}$ $\quad y = -\log_{۲}^{(x-۱)} + ۱$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۱ ۲ ۳ **۴**	۹	۱ ۲ ۳ ۴	۱۷	۱ ۲ **۳** ۴	۲۵	**۱** ۲ ۳ ۴
۲	۱ ۲ ۳ **۴**	۱۰	۱ **۲** ۳ ۴	۱۸	۱ **۲** ۳ ۴	۲۶	۱ **۲** ۳ ۴
۳	۱ ۲ ۳ **۴**	۱۱	۱ ۲ ۳ ۴	۱۹	۱ ۲ ۳ **۴**	۲۷	۱ ۲ **۳** ۴
۴	۱ ۲ **۳** ۴	۱۲	۱ ۲ ۳ ۴	۲۰	۱ ۲ ۳ **۴**	۲۸	۱ ۲ ۳ **۴**
۵	۱ **۲** ۳ ۴	۱۳	۱ ۲ **۳** ۴	۲۱	۱ ۲ **۳** ۴	۲۹	۱ ۲ **۳** ۴
۶	۱ ۲ **۳** ۴	۱۴	۱ ۲ ۳ ۴	۲۲	**۱** ۲ ۳ ۴	۳۰	۱ ۲ ۳ **۴**
۷	۱ ۲ **۳** ۴	۱۵	۱ ۲ ۳ **۴**	۲۳	۱ **۲** ۳ ۴	۳۱	۱ ۲ ۳ **۴**
۸	۱ **۲** ۳ ۴	۱۶	۱ **۲** ۳ ۴	۲۴	۱ ۲ ۳ **۴**	۳۲	۱ ۲ **۳** ۴