



۱) فرض کنیم $f(x) = 3^x$ و $g(x) = (\frac{1}{16})^x$ و $h(x) = 10^x$ ، مقادیر زیر را بدست آورید.

الف) $f(3)$

ب) $g(-1)$

پ) $h(-2)$

۲) کدام گزاره صحیح است؟

الف - نقطه $(\frac{1}{5}, \sqrt{5})$ روی نمودار تابع $y = 5^x$ قرار دارد.

ب - محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 10^x$ با محور y ها، نقطه $(0, 10)$ است.

پ - دامنه توابع با ضابطه‌های $y = 2^x$ و $y = x^2$ مساوی‌اند.

ت - محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 6^x$ با محور x ها، نقطه $(6, 0)$ است.

۳) کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ قرار دارند؟

الف) $(1, 0)$

ب) $(3, 1)$

پ) $(0, 1)$

ت) $(\sqrt{3}, \frac{1}{3})$

ث) $(1, 3)$

ج) $(-1, \frac{1}{3})$

۴) کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف) $y = 2x^2 - 3x + 1$

ب) $y = x^3$

پ) $y = (0, 1)^x$

ت) $y = (\frac{3}{2})^x$

ث) $y - 3x = 2$

ج) $y = \sqrt{x-1}$

۵) معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف)

$$2^{3n-2} = \frac{1}{32^2}$$

ب)

$$9^{3y-3} = 27^{y+1}$$

پ)

$$4^{3x+2} = \frac{1}{64^3}$$

ت

$$9^x = 3^{x^2 - 4x}$$

ث

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{25}{9}$$

۶ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

 الف) اگر $y = \log_a x$ ، آنگاه $a^x = y$

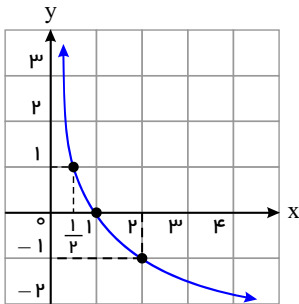
 ب) نمودار تابع با ضابطه $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$) از نقطه $(1, 0)$ عبور می‌کند.

پ) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمیشود.

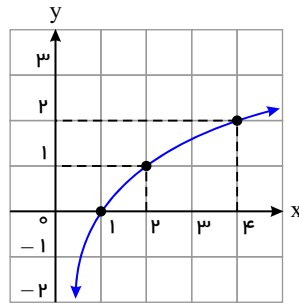
 ۷ الف- اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(2, 2)$ عبور کند، مقدار a را بدست آورید.

 ب- اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(\frac{1}{5}, -4)$ عبور کند، مقدار a چند است؟

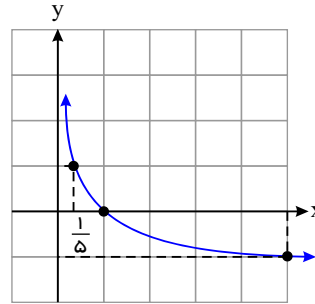
۸ نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطه مربوط به هر کدام را بنویسید.



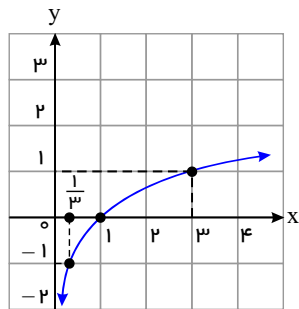
(۱)



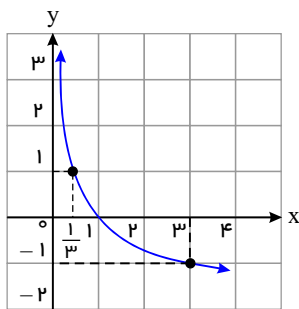
(۲)



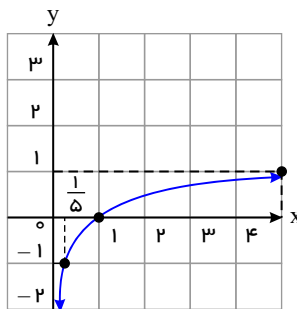
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

 ۹ اگر $f(x) = 3 - 2 \log_4 \left(\frac{x}{2} - 5\right)$ ، مقدار $f(42)$ را بدست آورید.

۱۰ حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\log_7 \sqrt[5]{49}$

ب) $\log_3 27^{\frac{1}{7}}$

پ) $-\log_5 125$

ت) $3 \log_{10} \sqrt{1000}$

۱۱ تساوی‌های زیر را ثابت کنید.



الف

$$\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$$

ب

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

پ

$$a^{\log_a b} = b$$

ت

$$\log_b a \times \log_a b = 1$$

۱۲) اگر $\log 2 = 0,3$ و $\log 3 = 0,48$ باشد، مقادیر تقریبی اعداد زیر را بدست آورید.

الف

$$\log 12$$

ب

$$\log 0,75$$

پ

$$\log \sqrt{5}$$

ت

$$\log \frac{25}{18}$$

ث

$$\log \sqrt[3]{6}$$

ج

$$\log \frac{\sqrt{27}}{\sqrt[4]{5}}$$

۱۳) معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف

$$\log_3(p^2 - 2) = \log_3 p$$

ب

$$\log_5(x+1) + \log_5(x-1) = 1$$

پ

$$3 \log_4 a - \log_4 5 = \log_4 25$$

ت

$$\log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 21) = -2$$

۱۴) معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف

$$\log_{\delta} x = 3$$

ب

$$\log_r(2x + 1) = 3$$

پ

$$\log_r(x + 1) + \log_r(x + 4) = 2$$

ت

$$\log_3 243 = 2x + 1$$

ث

$$\log_3(x - 1) = 4$$

ج

$$\log(2x) - \log(x - 3) = 1$$

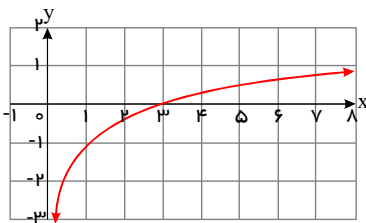
چ

$$2 \log_6(x - 1) = 3$$

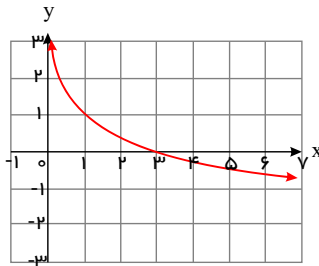
۱۵) کدامیک از ضابطه‌ها به کدامیک از نمودارها تعلق دارند.

۱) $y = \log_3(x - 1)$ ۲) $y = 3^x + 1$ ۳) $y = 1 - 3^x$

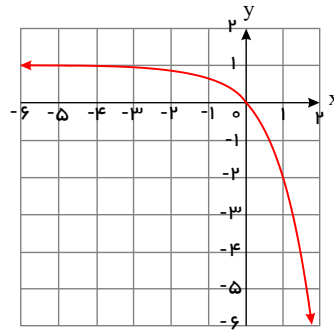
۴) $y = \log_3 x - 1$ ۵) $y = 1 - \log_3 x$ ۶) $y = 3^{(x-2)}$



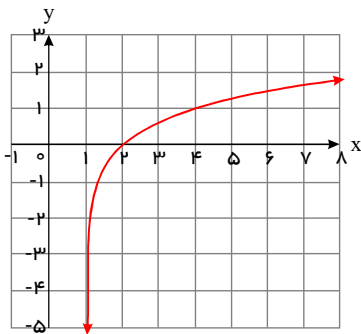
(الف)



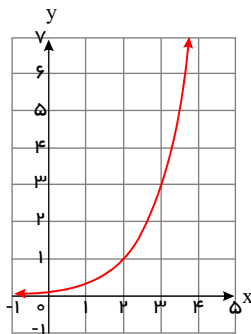
(ب)



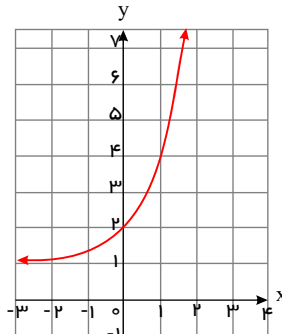
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)



۱۶) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = -2^x + 1$

ب) $y = -\log_2(x - 1)$

۱۷) نمودار تابع با ضابطه $y = 4^x - 1$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

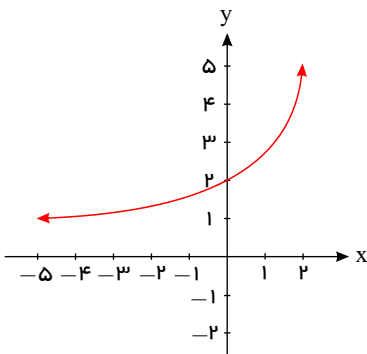
۱۸) نمودار تابع با ضابطه $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ را رسم کنید.

۱۹) فرض می‌کنیم $g(x) = 4^x + 2$.

الف) $g(-1)$ را بدست آورید.

ب) اگر $g(x) = 66$ باشد، مقدار x چقدر است؟

۲۰) در دستگاه مختصات روبرو نمودار تابع با ضابطه $y = a + 2^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را بدست آورید.



پاسخنامه تشریحی

۱

الف) $f(3) = 3^3 = 27$

ب) $g(-1) = \left(\frac{1}{16}\right)^{(-1)} = 16$

پ) $h(-2) = 10^{-2} = \frac{1}{100}$

۲) الف - گزاره صحیح است زیرا $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

 ب - گزاره صحیح نیست زیرا $10^0 = 1$ و محل تقاطع نمودار با محور y ها نقطه $(0, 1)$ است.

 پ - گزاره صحیح است زیرا دامنه هر دو تابع \mathbb{R} یا اعداد حقیقی است.

 ت - گزاره صحیح نیست زیرا تابع نمایی با محور x ها محل تقاطع ندارد.

۳

 الف) نقطه $(1, 0)$ روی نمودار قرار ندارد $\rightarrow 0 \neq 3^1$

 ب) نقطه $(3, 1)$ روی نمودار قرار ندارد $\rightarrow 1 \neq 3^3$

 پ) نقطه $(0, 1)$ روی نمودار قرار دارد $1 = 3^0$

 ت) نقطه $(\sqrt{3}, \frac{1}{3})$ روی نمودار قرار ندارد $\frac{1}{3} \neq 3\sqrt{3}$

 ث) نقطه $(1, 3)$ روی نمودار قرار دارد $3 = 3^1$

 ج) نقطه $(-1, \frac{1}{3})$ روی نمودار قرار دارد $\frac{1}{3} = 3^{-1}$

۴

 الف) تابع نمایی نیست $y = 2x^2 - 3x + 1$

 ب) تابع نمایی نیست $y = x^3$

 پ) تابع نمایی است $y = (0, 1)^x$

 ت) تابع نمایی است $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

 ث) تابع نمایی نیست $y - 3x = 2$

 ج) تابع نمایی نیست $y = \sqrt{x-1}$

۵

الف)

$$3^{3n-2} = \frac{1}{32^2} \rightarrow 3^{3n-2} = \frac{1}{(2^5)^2} \rightarrow 3^{3n-2} = \frac{1}{2^{10}}$$

$$\rightarrow 3^{3n-2} = 2^{-10} \rightarrow 3n - 2 = -10 \rightarrow 3n = -8 \rightarrow n = -\frac{8}{3}$$

ب)

$$9^{3y-3} = 27^{y+1} \rightarrow (3^2)^{3y-3} = (3^3)^{y+1} \rightarrow 3^{6y-6} = 3^{3y+3}$$

$$\rightarrow 6y - 6 = 3y + 3 \rightarrow 6y - 3y = 3 + 6 \rightarrow 3y = 9 \rightarrow y = 3$$

پ)

$$4^{3x+2} = \frac{1}{64^3} \rightarrow 4^{3x+2} = \frac{1}{(4^3)^3} \rightarrow 4^{3x+2} = \frac{1}{4^9}$$

$$\rightarrow 4^{3x+2} = 4^{-9} \rightarrow 3x + 2 = -9 \rightarrow 3x = -11 \rightarrow x = -\frac{11}{3}$$

ت)

$$9^x = 3^{x^2-4x} \rightarrow (3^2)^x = 3^{x^2-4x} \rightarrow 3^{2x} = 3^{x^2-4x}$$

$$\rightarrow 2x = x^2 - 4x \rightarrow x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x-6) = 0 \rightarrow x = 0, x = 6$$

ث)

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{25}{9} \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \rightarrow x+1 = -2 \rightarrow x = -3$$



الف) $f(2) = 2 \rightarrow 2 = \log_a 2 \rightarrow a^2 = 2 \rightarrow a = \sqrt{2}$ ، $a = -\sqrt{2}$ غ

ب) $f(\frac{1}{2}) = -4 \rightarrow -4 = \log_a \frac{1}{2} \rightarrow a^{-4} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{a^4} = \frac{1}{2}$

$\rightarrow a^4 = 2 \rightarrow a = \sqrt[4]{2}$ ، $a = -\sqrt[4]{2}$ غ

۱) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

۲) $y = \log_r x$

۳) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$

۴) $y = \log_r x$

۵) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

۶) $y = \log_{\delta} x$

$f(42) = 3 - 2 \log_r (\frac{42}{2} - 5) = 3 - 2 \log_r (21 - 5) = 3 - 2 \log_r 16$

$= 3 - 2 \log_r 4^2 = 3 - 2 \times 2 \log_r 4 = 3 - 4 = -1$

الف) $\log \sqrt[5]{49} = \log 7^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \log 7 = \frac{2}{5}$

ب) $\log_r 27^{\frac{1}{2}} = \log_r 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_r 3 = \frac{3}{2}$

پ) $-\log_{\delta} 125 = -\log_{\delta} 5^3 = -3 \log_{\delta} 5 = -3$

ت) $3 \log_{10} \sqrt{1000} = 3 \log_{10} 10^{\frac{3}{2}} = 3 \times \frac{3}{2} \log_{10} 10 = \frac{9}{2}$

الف

$\log_c a = x \rightarrow a = c^x$ ، $\log_c b = y \rightarrow b = c^y$ ، $\log_c d = z \rightarrow d = c^z$

$\rightarrow abd = c^x c^y c^z \rightarrow abd = c^{x+y+z} \rightarrow \log_c abd = x + y + z$

$\rightarrow \log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$

ب

$\log_c a = x \rightarrow a = c^x$ ، $\log_c b = y \rightarrow b = c^y$

$\log_b a = \log_{c^y} c^x = \frac{x}{y} \log_c c = \frac{x}{y} \rightarrow \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

پ

$\log_a b = x \rightarrow b = a^x \rightarrow b = a^{\log_a b}$

ت

$\log_b a = x \rightarrow a = b^x \rightarrow \log_a b = \log_{b^x} b = \frac{1}{x} \log_b b = \frac{1}{x}$

$\rightarrow \log_b a \times \log_a b = x \cdot \frac{1}{x} = 1$

الف

$\log 12 = \log(2^2 \times 3) = \log 2^2 + \log 3 = 2 \log 2 + \log 3 = 2(0,3) + 0,48 = 1,08$

ب

$\log_{0,75} = \log \frac{75}{100} = \log \frac{3}{4} = \log 3 - \log 4 = \log 3 - \log 2^2$

$= \log 3 - 2 \log 2 = 0,48 - 2(0,3) = -0,12$

پ

$\log \sqrt{5} = \log 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 5 = \frac{1}{2} \log(\frac{10}{2}) = \frac{1}{2} (\log 10 - \log 2) = \frac{1}{2} (1 - 0,3) = 0,35$

ت



$$\log \frac{25}{18} = \log \frac{5^2}{3^2 \times 2} = \log 5^2 - \log 3^2 - \log 2 = 2 \log 5 - 2 \log 3 - \log 2$$

$$= 2(0,7) - 2(0,48) - 0,3 = 0,14$$

ث

$$\log \sqrt[3]{6} = \log 6^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 6 = \frac{1}{3} \log(2 \times 3) = \frac{1}{3}(\log 2 + \log 3)$$

$$= \frac{1}{3}(0,3 + 0,48) = 0,26$$

ج

$$\log \frac{\sqrt{27}}{\sqrt[3]{5}} = \log \frac{3^{\frac{3}{2}}}{5^{\frac{1}{3}}} = \log 3^{\frac{3}{2}} - \log 5^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \log 3 - \frac{1}{3} \log 5$$

$$= \frac{3}{2}(0,48) - \frac{1}{3}(0,7) = 0,545$$

الف

$$\log_p(p^x - 2) = \log_p p \rightarrow p^x - 2 = p \rightarrow p^x - p - 2 = 0$$

$$\rightarrow (p - 2)(p + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} p - 2 = 0 \rightarrow p = 2 \\ p + 1 = 0 \rightarrow p = -1 \text{ غ} \end{cases}$$

ب

$$\log_5(x + 1) + \log_5(x - 1) = 1$$

$$\rightarrow \log_5((x + 1)(x - 1)) = \log_5 5 \rightarrow \log_5(x^2 - 1) = \log_5 5$$

$$\rightarrow x^2 - 1 = 5 \rightarrow x^2 = 6 \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ x = -\sqrt{6} \text{ غ} \end{cases}$$

پ

$$3 \log_f a - \log_f 5 = \log_f 25$$

$$\rightarrow \log_f a^3 = \log_f 25 + \log_f 5 \rightarrow \log_f a^3 = \log_f(25 \times 5)$$

$$\rightarrow a^3 = 125 \rightarrow a^3 = 5^3 \rightarrow a = 5$$

ت

$$\log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 21) = -2 \rightarrow x^2 - 21 = \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} \rightarrow x^2 - 21 = 10^2$$

$$\rightarrow x^2 - 21 = 100 \rightarrow x^2 = 121 \rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = -11 \end{cases}$$

الف

$$\log_5 x = 3 \rightarrow x = 5^3 \rightarrow x = 125$$

ب

$$\log_2(2x + 1) = 3 \rightarrow 2x + 1 = 2^3 \rightarrow 2x + 1 = 8 \rightarrow 2x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{2}$$

پ

$$\log_2(x + 1) + \log_2(x + 4) = 2 \rightarrow \log_2((x + 1)(x + 4)) = 2$$

$$\rightarrow \log_2(x^2 + 5x + 4) = 2 \rightarrow x^2 + 5x + 4 = 2^2 \rightarrow x^2 + 5x + 4 = 4$$

$$\rightarrow x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(x + 5) = 0 \rightarrow x = 0, \quad x = -5 \text{ غ ق}$$

ت

$$\log_3 243 = 2x + 1 \rightarrow \log_3 3^5 = 2x + 1 \rightarrow 5 \log_3 3 = 2x + 1$$

$$\rightarrow 5 = 2x + 1 \rightarrow 4 = 2x \rightarrow x = 2$$

ث

$$\log_3(x - 1) = 4 \rightarrow x - 1 = 3^4 \rightarrow x - 1 = 81 \rightarrow x = 82$$

۱۳

۱۴



ج

$$\log(2x) - \log(x - 3) = 1 \rightarrow \log \frac{2x}{x - 3} = 1 \rightarrow \log \frac{2x}{x - 3} = \log 10$$

$$\rightarrow \frac{2x}{x - 3} = 10 \rightarrow 2x = 10x - 30 \rightarrow 30 = 8x \rightarrow x = \frac{30}{8} \rightarrow x = \frac{15}{4}$$

ج

$$2 \log_4(x - 1) = 3 \rightarrow \log_4(x - 1) = \frac{3}{2} \rightarrow x - 1 = 4^{\frac{3}{2}}$$

$$\rightarrow x - 1 = (2^2)^{\frac{3}{2}} \rightarrow x - 1 = 2^3 \rightarrow x - 1 = 8 \rightarrow x = 9$$

الف) $y = \log_3 x - 1$

پ) $y = 1 - 3^x$

ث) $y = 3^{(x-2)}$

الف) $y = -2^x + 1$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	-3

ب) $y = -\log_4(x - 1)$ $x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$

x	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	5
y	2	1	0	-1	-2

$y = 3^x - 1$ $x \in [-2, 2]$

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{2}{3}$	0	3	15

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$

x	-2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	2	1	0	-1	-2	

الف) $g(-1) = 4^{-1} + 2 = \frac{1}{4} + 2 \rightarrow g(-1) = \frac{9}{4}$

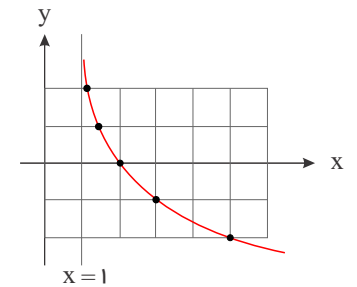
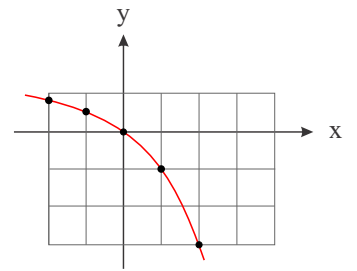
15

ب) $y = 1 - \log_3 x$

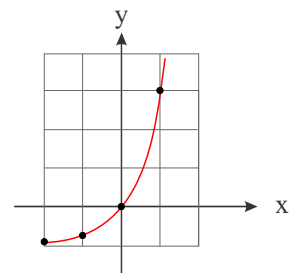
ت) $y = \log_3(x - 1)$

ج) $y = 3^x + 1$

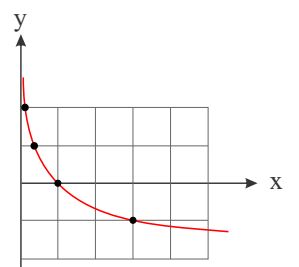
16



17



18



19



$$\text{ب) } g(x) = 66 \rightarrow 4^x + 2 = 66 \rightarrow 4^x = 64 \rightarrow 4^x = 4^3 \rightarrow x = 3$$

$$\begin{cases} (0, 2) \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow 2 = a + 2^{-b} \rightarrow 2 = a + \frac{1}{2^b} \\ (1, 3) \rightarrow f(1) = 3 \rightarrow 3 = a + 2^{1-b} \rightarrow 3 = a + \frac{2}{2^b} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2 = -a - \frac{1}{2^b} + \\ 3 = a + \frac{2}{2^b} \end{cases}$$

$$1 = \frac{1}{2^b} \rightarrow 2^b = 1 \rightarrow \boxed{b = 0} \rightarrow 2 = a + \frac{1}{2^0} \rightarrow 2 = a + 1 \rightarrow \boxed{a = 1}$$