



مهدی شاکریان

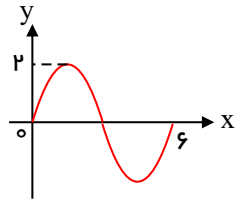
نام آزمون: یازدهم فصل ۴ درس ۳

تلفن پنج رقمی: ۰۵۱-۳۸۱۱۷

تلگرام: riazi_jazb

رسم توابع مثلثاتی و دوره ی تناوب

خارج از کشور - ۱۳۹۳



۱ شکل روبه رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟

۲ $\frac{5}{3}$

۱ $\frac{4}{3}$

۴ $\frac{8}{3}$

۳ $\frac{7}{3}$

۲ اگر $a, b > 0$ باشند و حداکثر مقدار تابع $y = a \cos\left(\frac{7\pi}{4} + x\right) + b \sin x + 1$ به اندازه ۶ واحد از حداقل مقدار این تابع بیش تر باشد،

قلم چی - ۱۳۹۹

$b + a$ کدام است؟

۴ ۶

۳ ۴

۲ ۳

۱ ۲

قلم چی - ۱۳۹۹

۳ از ویژگی‌های زیر برای تابع $y = \sin x$ چند مورد نادرست است؟

الف دامنه آن اعداد حقیقی و برد آن بازه $[-1, 1]$ است.

ب مقدار تابع در مضارب صحیح π برابر صفر است.

پ حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است و در نقاط به طول $\frac{\pi}{2}(4k+1)$ رخ می‌دهد. ($k \in \mathbb{Z}$)

ت حداقل مقدار تابع برابر -1 است و در نقاط به طول $\frac{\pi}{2}(4k-1)$ رخ می‌دهد. ($k \in \mathbb{Z}$)

ث نمودار تابع‌های $y = \sin(-x)$ و $y = \sin x$ برهم منطبق‌اند.

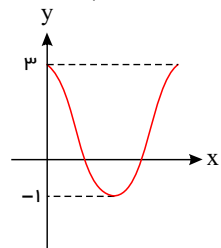
۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

قلم چی - ۱۳۹۹



۴ شکل زیر بخشی از نمودار تابع $f(x) = a + b \cos x$ را نمایش می‌دهد، مقدار $f\left(\frac{20\pi}{3}\right)$ کدام است؟

۲ صفر

۱ $-\frac{1}{2}$

۴ $\frac{3}{2}$

۳ $\frac{1}{2}$

۵) نمودار تابع $f(x)$ را $\frac{\pi}{4}$ واحد به چپ منتقل کرده و سپس یک واحد به بالا می‌آوریم و به $y = 1 + \sin x$ می‌رسیم، حاصل $f(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟

قلم‌چی - ۱۳۹۹

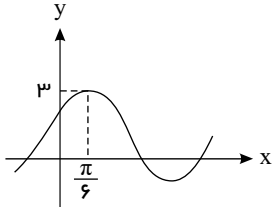
$\frac{1}{2}$ (۴)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

قلم‌چی - ۱۳۹۹



۶) اگر بخشی از نمودار تابع $y = a \sin(bx) + 1$ به صورت روبه‌رو باشد، مقدار ab کدام است؟

3 (۱)

6 (۲)

-3 (۳)

-6 (۴)

قلم‌چی - ۱۳۹۹

۷) اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع $y = \frac{3 - 2 \cos x}{5}$ کدام است؟

$0,2$ (۴)

$0,6$ (۳)

$0,4$ (۲)

$0,8$ (۱)

قلم‌چی - ۱۳۹۹

۸) نمودار کدام دو تابع بر هم منطبق است؟

$y = -\sin x$, $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ (۲)

$y = -\cos x$, $y = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$ (۱)

$y = -\sin x$, $y = \cos(4\pi - x)$ (۴)

$y = -\cos x$, $y = \sin(\frac{3\pi}{2} - x)$ (۳)

قلم‌چی - ۱۳۹۹

۹) نمودار تابع $y = \cos(x - \frac{3\pi}{2})$ بر نمودار کدام تابع زیر منطبق است؟

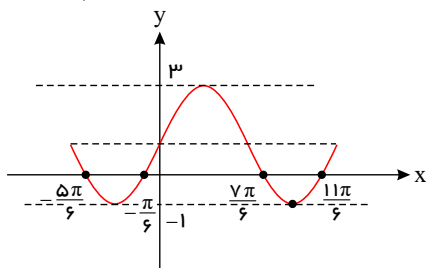
$h(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ (۴)

$k(x) = \sin(2\pi - x)$ (۳)

$g(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ (۲)

$f(x) = \cos(2\pi - x)$ (۱)

قلم‌چی - ۱۳۹۹



۱۰) شکل زیر بخشی از نمودار چند تابع زیر می‌تواند باشد؟ (الف)

$y = 2 \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 1$ (ب)

$y = 2 \sin x + 1$ (پ)

$y = 2 \cos(\frac{\pi}{2} + x) + 1$ (ت)

1 (۲)

صفر (۱)

3 (۴)

2 (۳)

قلم‌چی - ۱۳۹۹

۱۱) به ترتیب حداکثر و حداقل مقدار تابع $y = -2 \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1$ کدام است؟

1 و 3 (۴)

-2 و 1 (۳)

-1 و 3 (۲)

-1 و 2 (۱)



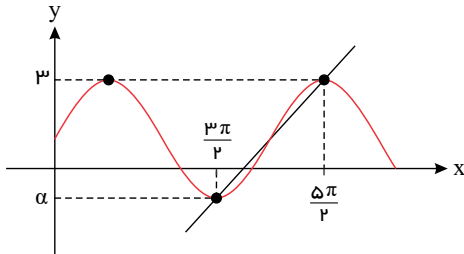
قلم چی - ۱۳۹۹

۱۲) کدام نقطه زیر روی نمودار تابع $y = 2 \sin x + 1$ قرار ندارد؟

- ① $(0, 1)$ ② $(\frac{\pi}{2}, 3)$ ③ $(-\frac{3\pi}{2}, -3)$ ④ $(-\pi, 1)$

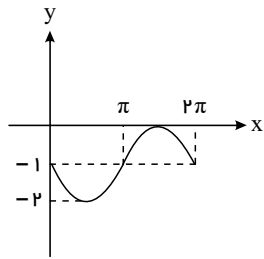
۱۳) در شکل زیر نمودار تابع $f(x) = a \sin x + b$ توسط خطی با شیب $m = \frac{4}{\pi}$ در دو نقطه قطع شده است. دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۹



- ① $(-1, 1)$
 ② $(1, -2)$
 ③ $(2, 1)$
 ④ $(-1, 2)$

قلم چی - ۱۳۹۹

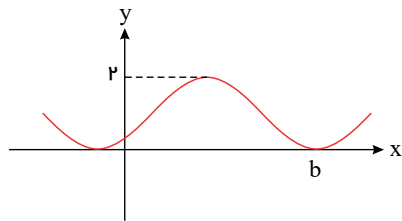


۱۴) نمودار روبه‌رو مربوط به کدام یک از توابع در فاصله $[0, 2\pi]$ است؟

- ① $y = -\cos(\pi - x)$
 ② $y = -\sin(\pi + x) - 1$
 ③ $y = \sin(\frac{\pi}{2} - x) - 1$
 ④ $y = -\sin(\pi - x) - 1$

قلم چی - ۱۳۹۹

۱۵) اگر بخشی از نمودار تابع $f(x) = a - \sin(x + \frac{3\pi}{4})$ به صورت زیر باشد، کدام $\frac{a}{b}$ است؟



- ① $\frac{3\pi}{4}$
 ② $\frac{3\pi}{2}$
 ③ $\frac{4}{7\pi}$
 ④ $\frac{4\pi}{7}$



پاسخنامه تشریحی

دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ می‌باشد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$y = a \sin(b\pi x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

باتوجه به شکل داده شده a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند و چون همه گزینه‌ها مثبت می‌باشند پس $b = \frac{1}{3}$ قابل قبول است. بیشترین مقدار این تابع از روی شکل ۲ می‌باشد و بیشترین

مقدار $y = a \sin(b\pi x)$ زمانی رخ می‌دهد که سینوس برابر ۱ باشد

$$\text{بنابراین } a = 2 \text{ است پس } a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

ابتدا تابع y را ساده‌تر می‌کنیم؛ داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$y = a \cos\left(\frac{7\pi}{3} + x\right) + b \sin x + 1 = a \cos\left(\underbrace{3\pi + \frac{\pi}{3}}_{\text{ناحیه چهارم}} + x\right) + b \sin x + 1$$

$$\Rightarrow y = a \sin x + b \sin x + 1 \Rightarrow y = (a + b) \sin x + 1$$

$$\text{حداکثر } \sin x = 1 \rightarrow \text{حداکثر تابع} = (a + b)(1) + 1 = a + b + 1$$

$$\text{حداقل } \sin x = -1 \rightarrow \text{حداقل تابع} = (a + b)(-1) + 1 = -a - b + 1$$

$$\text{حداکثر تابع} - \text{حداقل تابع} = 6 \rightarrow (a + b + 1) - (-a - b + 1) = 6$$

در نتیجه:

$$\rightarrow a + b + 1 + a + b - 1 = 6 \rightarrow 2a + 2b = 6 \rightarrow a + b = 3$$

بنا به مفاهیم کتاب درسی تنها موردی که نادرست است مورد (ث) می‌باشد، زیرا $\sin(-x) = -\sin x$ است و نمودار تابع $y = \sin x$ و $y = -\sin x$ برهم منطبق نیستند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

مقدار ماکزیمم تابع مطابق شکل به ازای $\cos x = 1$ (در $x = 0$) برابر ۳ و مقدار مینیمم آن به ازای $\cos x = -1$ ($x = \pi$) برابر -۱ است. بنابراین داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 2$$

در نتیجه $f(x)$ برابر است با:

$$f(x) = a + b \cos x \xrightarrow{a=1, b=2} f(x) = 1 + 2 \cos x$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 + 2 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 1 + 2 \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 + 2 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

بنابر فرض سؤال داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 1 + \sin x \Rightarrow \underbrace{f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_t = \sin x \quad (1)$$

در معادله (۱) $x + \frac{\pi}{2} = t$ قرار می‌دهیم:

$$x + \frac{\pi}{2} = t \Rightarrow x = t - \frac{\pi}{2}$$

در نتیجه:

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\cos t \Rightarrow f(t) = -\cos t \quad (2)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \stackrel{(2)}{=} -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

اگر a را مثبت فرض کنیم، بیشترین مقدار تابع وقتی رخ می‌دهد که $\sin(bx) = 1$ باشد، پس داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵



$$a(1) + 1 = 3 \Rightarrow a = 2$$

از طرفی اگر $\sin(bx) = 1$ باشد، پس در $x = \frac{\pi}{6}$ برای اولین بار به ازای $(x > 1)$ ، $\sin(\frac{b\pi}{6}) = 1$ است.

پس $\frac{b\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ، بنابراین $b = 3$ در نتیجه $ab = 6$ است.

تذکر: اگر a منفی فرض شود، $a = -2$ و $b = -3$ خواهد شد و باز هم $ab = 6$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷

می‌دانیم: $-1 \leq \cos x \leq +1$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\times(-2)} 2 &\geq -2 \cos x \geq -2 \xrightarrow{+3} 5 \geq 3 - 2 \cos x \geq 1 \xrightarrow{\div 5} 1 \geq \frac{3 - 2 \cos x}{5} \geq \frac{1}{5} \Rightarrow |\max - \min| = |1 - \frac{1}{5}| = \frac{4}{5} = 0.8 \end{aligned}$$

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

گزینه ۱: $y = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$, $y = -\cos x$

گزینه ۲: $y = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $y = -\sin x$

گزینه ۳: $y = \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$, $y = -\cos x$

گزینه ۴: $y = \cos(4\pi - x) = \cos x$, $y = -\sin x$

بنابراین گزینه ۳، درست است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$y = \cos(x - \frac{3\pi}{2}) = \cos(-(\frac{3\pi}{2} - x)) \stackrel{\cos(-\alpha) = \cos \alpha}{=} \cos(\frac{3\pi}{2} - x) \stackrel{\substack{\text{ربع سوم} \\ \text{منفی}}}{=} -\sin x$$

گزینه ۱: $f(x) = \cos(2\pi - x) \stackrel{\substack{\text{ربع چهارم} \\ \text{مثبت}}}{=} \cos x$

گزینه ۲: $g(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \stackrel{\substack{\text{ربع اول} \\ \text{مثبت}}}{=} \sin x$

گزینه ۳: $h(x) = \sin(2\pi - x) \stackrel{\substack{\text{ربع چهارم} \\ \text{منفی}}}{=} -\sin x \rightarrow$ منطبق بر تابع صورت سوال

گزینه ۴: $h(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \stackrel{\substack{\text{ربع اول} \\ \text{مثبت}}}{=} \cos x$

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به شکل تابع داده شده اگر هر مقدار تابع $y = \sin x$ را در ۲ ضرب کرده و سپس با یک جمع کنیم به شکل تابع داده شده یعنی $y = 2 \sin x + 1$

مورد (پ) می‌رسیم، هر تابعی که ضابطه آن با این تابع برابر باشد نیز می‌تواند نموداری مطابق نمودار داده شده داشته باشد.

مورد الف:

$$y = -2(\sin(x - \pi) - \frac{1}{2}) = -2(-\sin(\pi - x) - \frac{1}{2}) \Rightarrow y = 2 \sin x + 1$$

مورد ب:

$$y = 2 \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 1 = 2 \cos(\frac{\pi}{2} - x) + 1 \Rightarrow y = 2 \sin x + 1$$

مورد ت:

$$y = 2 \cos(\frac{\pi}{2} + x) + 1 = -2 \sin x + 1$$

بنابراین بخشی از ۳ نمودار (الف)، (ب) و (پ) می‌تواند باشد.

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ حداکثر مقدار تابع سینوس برابر ۱ و حداقل مقدار آن برابر -۱ است. بنابراین:

$$y \text{ حداکثر مقدار} = (-2) \times (-1) + 1 = 3$$

$$y \text{ حداقل مقدار} = (-2) \times (1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



$$x=0 \rightarrow y = 2 \sin(0) + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1 \quad \checkmark$$

$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 \quad \checkmark$$

$$x = -\frac{3\pi}{2} \rightarrow y = 2 \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$x = -\pi \rightarrow y = 2 \sin(-\pi) + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1 \quad \checkmark$$

خط از دو نقطه به مختصات $(\frac{3\pi}{2}, \alpha)$ و $(\frac{5\pi}{2}, 3)$ عبور کرده است و نمودار f را قطع کرده است، همچنین شیب خط برابر با $\frac{4}{\pi}$ است. بنابراین داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۳)

$$\left. \begin{aligned} \text{شیب خط} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - \alpha}{\frac{5\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}} = \frac{3 - \alpha}{\pi} \\ \text{شیب خط در صورت سؤال} = \frac{4}{\pi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3 - \alpha}{\pi} = \frac{4}{\pi} \Rightarrow 3 - \alpha = 4 \Rightarrow \alpha = -1$$

بنابراین دو نقطه $(\frac{3\pi}{2}, -1)$ و $(\frac{5\pi}{2}, 3)$ باید در ضابطه f صدق کند:

$$f(x) = a \sin x + b \begin{cases} \left(\frac{3\pi}{2}, -1 \right) \\ \rightarrow -1 = a \sin \frac{3\pi}{2} + b \\ \left(\frac{5\pi}{2}, 3 \right) \\ \rightarrow 3 = a \sin \frac{5\pi}{2} + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = -1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow (a, b) = (2, 1)$$

اگر نمودار تابع $y = \sin x$ را نسبت به محور x قرینه کنیم و یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار صورت سؤال به دست می‌آید. لذا نمودار داده شده (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴)

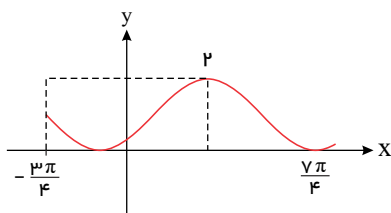
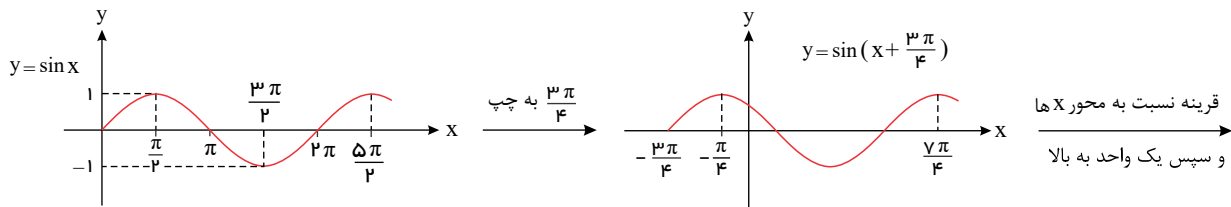
می‌تواند مربوط به تابع $y = -\sin x - 1$ باشد، پس هر تابعی که بتوان آن را به این صورت نوشت درست است. بررسی گزینه‌ها:

- «۱» گزینه: $y = -\cos(\pi - x) = +\cos x$
- «۲» گزینه: $y = -\sin(\pi + x) - 1 = \sin x - 1$
- «۳» گزینه: $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 = \cos x - 1$
- «۴» گزینه: $y = -\sin(\pi - x) - 1 = -\sin x - 1$

بیشترین مقدار تابع برابر ۲ است، پس داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۵)

$$\begin{aligned} y = -\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \text{ماکزیم تابع} &= |-1| = 1 \\ \Rightarrow y = a - \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \text{ماکزیم تابع} &= a + 1 \\ \Rightarrow a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) &= 1 - \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

حال نمودار f را رسم می‌کنیم:



پس $b = \frac{7\pi}{4}$ و در نتیجه:



$$\frac{a}{b} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴

۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴

۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴