



مهدی شاکریان

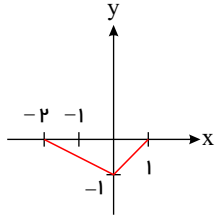
نام آزمون: یازدهم فصل ۳ درس ۳

تلفن پنج رقمی: ۰۵۱-۳۸۱۱۷

تلگرام: riazi_jazb

اعمال جبری روی توابع

قلم چی - ۱۳۹۹



۱ اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه تابع $y = \frac{f(-1-x)+1}{f(x)}$ کدام است؟

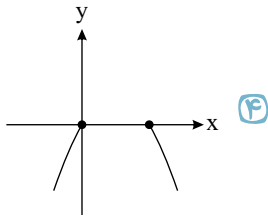
① $[-2, 1)$

② $(-2, 1]$

③ $[-2, 1]$

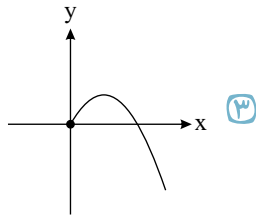
④ $(-2, 1)$

قلم چی - ۱۳۹۹

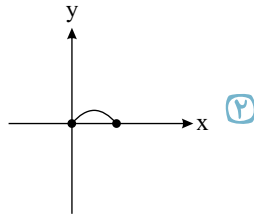


④

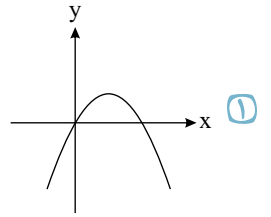
۲ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{x} - x$ باشد، نمودار تابع $(f \times g)(x)$ کدام است؟



③

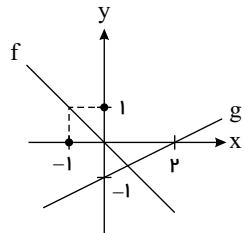


②

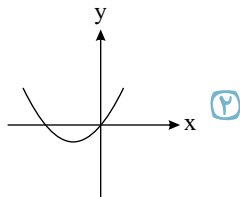


①

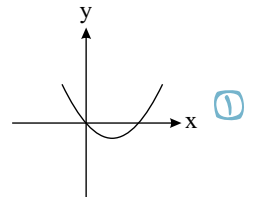
قلم چی - ۱۳۹۹



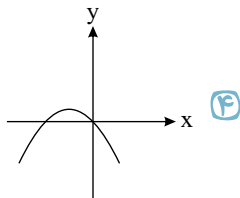
۳ اگر نمودارهای توابع f و g به صورت مقابل باشند، نمودار تابع $f \times g^{-1}$ شبیه کدام است؟



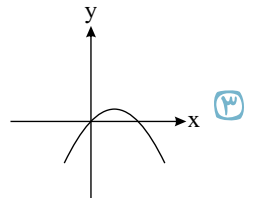
②



①

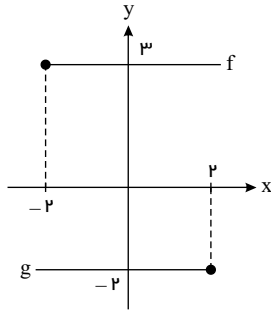
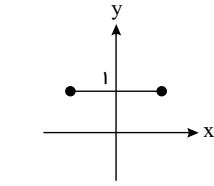


④

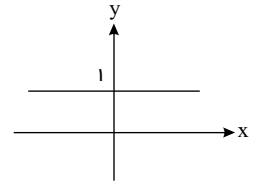


③

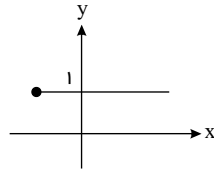
قلم چی - ۱۳۹۹


 ۴ نمودارهای توابع ثابت f و g به صورت مقابل می باشند. نمودار تابع $f + g$ کدام است؟


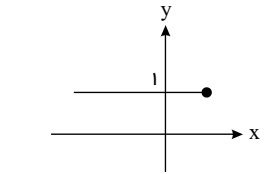
۲



۱



۴



۳

 ۵ توابع $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g = \{(2, -1), (4, 4), (-1, 5), (7, 3)\}$ مفروض اند، بیشترین مقدار تابع $2f + 3g$ کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۹

۱۳ ۴

۱۵ ۳

۱۴ ۲

۱۰ ۱

قلم چی - ۱۳۹۹

 ۶ اگر $f(x) = \sqrt{x+a}$ ، $g(x) = \sqrt{b-x}$ و $f+g = \{(-1, c)\}$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۲ ۴

-۲ ۳

-۳ ۲

صفر ۱

قلم چی - ۱۳۹۹

 ۷ برای دو تابع خطی f و g داریم: $(f+g)(x) = 2x-1$ و $(g-f)(x) = 8x-3$. حاصل $(f \cdot g)(1)$ کدام است؟

-۱۵ ۴

-۶ ۳

۶ ۲

۱۵ ۱

 ۸ اگر $f = \{(3a, c-2), (-3, 2), (2, 2)\}$ ، $g = \{(1, -1), (2, 6a+b), (6, -3)\}$ و $f-2g = \{(6, 1), (2, -14)\}$ باشند، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۹

-۳ ۴

-۵ ۳

-۷ ۲

-۲ ۱

 ۹ اگر $f(x) = \sqrt{1-2x} + \sqrt{x+4}$ و $g(x) = \sqrt{x+4} - \sqrt{1-2x}$ باشند، برد تابع $f \cdot g$ شامل چند عدد صحیح است؟

قلم چی - ۱۳۹۹

۱۴ ۴

۱۳ ۳

۱۲ ۲

۱۱ ۱

 ۱۰ اگر $f(x) = \sqrt{x+a} - c$ و $g(x) = \sqrt{b-x} + d$ باشند و $D_{\frac{f}{g}} = [-1, 4] - \{0\}$ و $(f+g)(3) = 5$ باشد، حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۹

۲ ۴

-۱ ۳

۱ ۲

صفر ۱

 ۱۱ اگر $f(x) = \begin{cases} x+2 & , x \geq 0 \\ x-2 & , x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 2x-1 & , x > 2 \\ 3-x & , x \leq 2 \end{cases}$ باشد، حاصل $A = \frac{(f+3g)(2)}{(g-f)(-1)}$ کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۹

۱ ۴

۹ ۳

 $\frac{7}{2}$ ۲

۱۴ ۱



قلم چی - ۱۳۹۹

۱۲) اگر $f(x) = x[x]$ و $g(x) = 3[x]$ باشند، برد تابع $\frac{f}{g}$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- ① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۱۳) اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = \{(-1, 0), (-\frac{1}{2}, 1), (0, 2), (1, 1)\}$ باشد، مقدار کدام گزینه در برد تابع $(2g + f)(x)$ وجود ندارد؟

قلم چی - ۱۳۹۹

- ① ۵ ② ۳ ③ صفر ④ ۲

۱۴) اگر $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$ و $g(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x-2}}$ باشد، دامنه تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ به صورت $(a, b) \cup (b, +\infty)$ است. ab کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۹

- ① -۲ ② ۶ ③ ۵ ④ ۱

۱۵) اگر $f = \{(0, 3), (-1, 4), (2, 1), (1, 2)\}$ و $f^{-1} + g^{-1} = \{(3, 5), (1, 2)\}$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{2g(5) - 3g(0)}{f^{-1}(3) + g(5)}$ کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۹

- ① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

قلم چی - ۱۳۹۹

۱۶) اگر $f = \{(a, 1), (1, b), (4, -1)\}$ و $f + f^{-1} = \{(1, 7), (4, 0)\}$ باشند، حاصل ab کدام است؟

- ① ۷ ② -۴ ③ ۱۲ ④ -۳

قلم چی - ۱۳۹۹

۱۷) اگر $f = \{(2, 3), (-2, 1), (-1, 2), (3, -2)\}$ باشد، آنگاه مجموع اعضای برد تابع $y = \frac{f}{f^{-1}}$ کدام است؟

- ① -۱ ② $\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{11}{3}$ ④ $\frac{13}{3}$

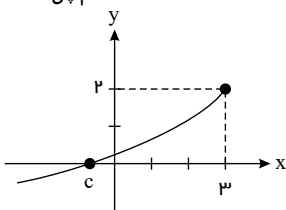
قلم چی - ۱۳۹۹

۱۸) توابع $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ و $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$ مفروض‌اند، برد تابع $f - g$ کدام است؟

- ① $\mathbb{R} - \{0\}$ ② $\mathbb{R} - \{2\}$ ③ $\mathbb{R} - \{-1\}$ ④ \mathbb{R}

رسم توابع به کمک انتقال

قلم چی - ۱۳۹۹



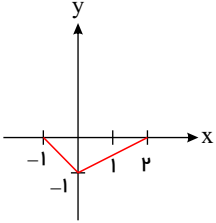
۱۹) اگر شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = a - \sqrt{b-x}$ باشد، مقدار abc کدام است؟

- ① ۶ ② ۴ ③ -۴ ④ -۶

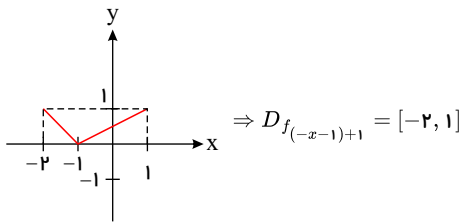
پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

ابتدا نمودار $f(-x)$ را رسم می‌کنیم:



اکنون نمودار $f(-x-1)+1$ را با یک واحد انتقال به سمت چپ و سپس یک واحد انتقال به سمت بالا رسم می‌کنیم:



دامنه هر تابع کسری عبارتست از اشتراک دامنه‌های تابع صورت و تابع مخرج، منهای ریشه‌های تابع مخرج.

$$D_y = ([-2, 1] \cap [-2, 1] - \{-2, 1\}) \rightarrow D_y = (-2, 1)$$

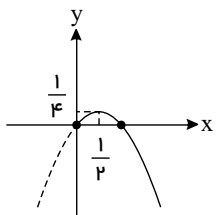
۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$D_f = [0, +\infty), \quad D_g = [0, +\infty)$$

$$\rightarrow D_{f \times g} = D_f \cap D_g = [0, +\infty) \Rightarrow \text{فقط گزینه ۳ جواب سوال است}$$

$$(f \times g)(x) = (x + \sqrt{x})(\sqrt{x} - x) = x - x^2$$

تابع $y = x - x^2$ به صورت یک سهمی با $[0, +\infty)$ و رأس سهمی $x = \frac{1}{2}$ است و نمودار آن به صورت زیر می‌باشد:



۱ ۲ ۳ ۴ ۳

$$(-1, 1) \in f, \quad (0, 0) \in f \Rightarrow f(x) = -x$$

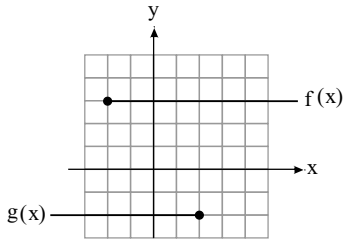
$$\left. \begin{array}{l} (2, 0) \in g \Rightarrow (0, 2) \in g^{-1} \\ (0, -1) \in g \Rightarrow (-1, 0) \in g^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{2-0}{0-(-1)} = 2 \rightarrow g^{-1}(x) = 2x + b$$

نقطه $(-1, 0)$ در معادله g^{-1} صدق می‌کند.

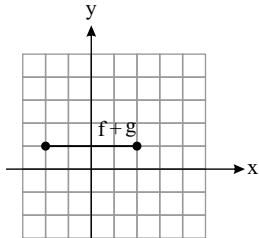
$$\rightarrow 0 = 2(-1) + b \rightarrow b = 2 \rightarrow g^{-1}(x) = 2x + 2$$

$$\Rightarrow (f \times g^{-1})(x) = f(x) \times g^{-1}(x) = -x(2x + 2) \Rightarrow (f \times g^{-1})(x) = -2x^2 - 2x$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است. \Rightarrow سهمی دارای Max است و $x = -\frac{1}{2}$ رأس سهمی



در نتیجه $f + g$ برابر است با: $\Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-2, 3]$



$$D_g = \{-1, 2, 4, 7\}, D_f = [3, +\infty)$$

$$\Rightarrow D_{2f+3g} = D_f \cap D_g = \{4, 7\}$$

$$f(7) = 2, f(4) = 1$$

$$2f = \{(4, 2), (7, 4)\}$$

$$3g = \{(4, 12), (7, 9)\}$$

$$\Rightarrow 2f + 3g = \{(4, 14), (7, 13)\}$$

به ازای $x \in D_f \cap D_g$ داریم:

چون $D_{2f+3g} = D_f \cap D_g$ پس، به ازای $x \in D_f \cap D_g$ داریم:

بنابراین بیشترین مقدار $2f + 3g$ برابر ۱۴ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶ ابتدا دامنه تابع $f(x)$ و $g(x)$ را بدست می آوریم:

$$x + a \geq 0 \rightarrow x \geq -a \rightarrow D_f = [-a, +\infty)$$

$$b - x \geq 0 \rightarrow b \geq x \rightarrow D_g = (-\infty, b]$$

$$D_{f+g} = \{-1\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{-1\} \Rightarrow -a = b = -1$$

$$\rightarrow a = 1, b = -1 \rightarrow f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = \sqrt{-1-x}$$

$$f(-1) = 0, g(-1) = 0 \rightarrow (f+g)(-1) = 0 \rightarrow c = 0$$

$$\rightarrow a + b + c = 1 - 1 + 0 \rightarrow a + b + c = 0$$

$$\begin{cases} (f+g)(x) = 2x-1 \\ (g-f)(x) = 8x-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g(x) + \cancel{f(x)} = 2x-1 \\ g(x) - \cancel{f(x)} = 8x-3 \end{cases} +$$

$$2g(x) = 10x-4 \rightarrow g(x) = 5x-2 \quad (1)$$

$$\rightarrow 5x-2 + f(x) = 2x-1 \rightarrow f(x) = -3x+1 \quad (2)$$

$$f(1) = -2, g(1) = 3$$

$$\rightarrow (f \cdot g)(1) = f(1) \cdot g(1) = -2 \times 3 \rightarrow (f \cdot g)(1) = -6$$

$$f = \{(3a, c-2), (-3, 2), (2, 2)\}$$

بنابر رابطه (۱) و (۲) داریم:

در نتیجه:



$$g = \{(1, -1), (2, 6a + b), (6, -3)\}$$

$$f - 2g = \{(6, 1), (2, -14)\}$$

چون $f - 2g$ دارای دو زوج مرتب است، پس باید $\{6, 2\}$ دامنه مشترک دو تابع باشد، در این حالت داریم:

$$3a = 6 \Rightarrow a = 2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow f(6) - 2g(6) = 1$$

$$\Rightarrow c - 2 + 6 = 1 \Rightarrow c = -3 \quad (2)$$

$$f(2) - 2g(2) = -14$$

$$\Rightarrow 2 - 2(6a + b) = -14$$

$$\Rightarrow 2 - 24 - 2b = -14$$

$$\Rightarrow 2b = -8 \Rightarrow b = -4 \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1),(2),(3)} a + b + c = -5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$D_f : \begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -4 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$D_g : \begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -4 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

دامنه $f \cdot g$ را حساب می‌کنیم:

$$D_{fg} = D_f \cap D_g = [-4, \frac{1}{2}] \cap [-4, \frac{1}{2}] = [-4, \frac{1}{2}]$$

ضابطه $f \cdot g$ بنابر اتحاد مزدوج را به دست می‌آوریم:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x + 4) - (1 - 2x) = 3x + 3$$

حال از روی دامنه، برد $f \cdot g$ را حساب می‌کنیم:

$$-4 \leq x \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 3} -12 \leq 3x \leq \frac{3}{2} \xrightarrow{+3} -9 \leq 3x + 3 \leq 4,5$$

پس برد $f \cdot g$ ، بازه $[-9, 4,5]$ است که شامل ۱۴ عدد صحیح است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰ می‌دانیم که: $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$ ، بنابراین داریم:

$$D_f : \begin{cases} x + a \geq 0 \\ b - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -a \\ x \leq b \end{cases} \Rightarrow D_f \cap D_g = [-1, 4] = [-a, b] \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

از طرفی $x = 0$ در دامنه تابع $\frac{f}{g}$ قرار ندارد، پس مخرج کسر یعنی $g(x)$ به ازای $x = 0$ برابر صفر می‌شود.

$$g(0) = 0 \Rightarrow \sqrt{b - 0} + d = 0 \Rightarrow \sqrt{4} + d = 0 \Rightarrow 2 + d = 0 \Rightarrow d = -2$$

حال داریم:

$$f(x) = \sqrt{x + 1} - c, \quad g(x) = \sqrt{4 - x} - 2$$

$$f(3) + g(3) = 5 \Rightarrow (2 - c) + (-1) = 5$$

$$\Rightarrow 1 - c = 5 \Rightarrow c = -4$$

$$\Rightarrow a + b + c + d = 1 + 4 - 4 - 2 = -1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱ $f(-1)$ از ضابطه دوم f و $g(-1)$ نیز از ضابطه دوم g به دست می‌آید.

$$(g - f)(-1) = g(-1) - f(-1) = 4 - (-3) = 7$$

$f(2)$ از ضابطه اول f و $g(2)$ از ضابطه دوم g به دست می‌آید:



$$\Rightarrow (f + 3g)(2) = f(2) + 3g(2) = 4 + 3(1) = 7 \Rightarrow A = \frac{7}{7} = 1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}$$

دامنه $\frac{f}{g}$ برابر است با:

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = 0\}$$

$$= \mathbb{R} - \{x | 3[x] = 0\} \xrightarrow{[x]=0 \Rightarrow x \in [0,1]} D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - [0, 1)$$

در نتیجه:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{x}{3}; x \in \mathbb{R} - [0, 1)$$

با توجه به ضابطه تابع و دامنه آن، می‌توان نتیجه گرفت که برد تابع $\mathbb{R} - [0, \frac{1}{3})$ است که تنها شامل صفر نیست.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\}, D_g = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1\}$$

دامنه $2g + f$ برابر است با:

$$D_{2g+f} = D_g \cap D_f = D_g$$

داریم:

$$\begin{cases} 2g(x) = \{(-1, 0), (-\frac{1}{2}, 2), (0, 4), (1, 2)\} \\ D_g \text{ دامنه } f(x) = \{(-1, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (0, 1), (1, 0)\} \end{cases}$$

$$\rightarrow (2g + f)(x) = \{(-1, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{4 + \sqrt{3}}{2}), (0, 5), (1, 2)\}$$

برد تابع برابر $\{0, \frac{4 + \sqrt{3}}{2}, 5, 2\}$ است که ۳ در آن مشاهده نمی‌شود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$\text{می‌دانیم: } D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \Rightarrow D_f : x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$\Rightarrow \text{دامنه } f : D_f = (2, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x-2}} \Rightarrow D_g : x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$\Rightarrow \text{دامنه } g : D_g = (2, +\infty)$$

بنابراین دامنه $\frac{f}{g}$ برابر است با:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = (2, +\infty) - \{x | \frac{x-3}{\sqrt{x-2}} = 0\}$$

$$= (2, +\infty) - \{3\} = (2, 3) \cup (3, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow ab = 2 \times 3 = 6$$

برای به‌دست آوردن وارون f کفایت مؤلفه‌های هر زوج مرتب را جابه‌جا کنیم، داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵



$$f^{-1} = \{(3, 0), (4, -1), (1, 2), (2, 1)\}$$

$$\begin{cases} (f^{-1} + g^{-1})(3) = 5 \Rightarrow f^{-1}(3) + g^{-1}(3) = 5 \\ \xrightarrow{f^{-1}(3)=0} g^{-1}(3) = 5 \Rightarrow g(5) = 3 \\ (f^{-1} + g^{-1})(1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(1) + g^{-1}(1) = 2 \\ \xrightarrow{f^{-1}(1)=2} 2 + g^{-1}(1) = 2 \Rightarrow g^{-1}(1) = 0 \Rightarrow g(0) = 1 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\frac{2g(5) - 3g(0)}{f^{-1}(3) + g(5)} = \frac{2 \times 3 - 3 \times 1}{0 + 3} = \frac{6 - 3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

با توجه به f^{-1} , f بدست می‌آوریم؛ داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶**

$$f^{-1} = \{(1, a), (b, 1), (-1, 4)\}$$

$$D_f \cap D_{f^{-1}} = \{1, b\}$$

$$\Rightarrow f + f^{-1} = \{(1, a+b), (b, 0)\} \quad (1)$$

از طرفی بنا بر فرض سؤال داریم:

$$f + f^{-1} = \{(1, 7), (4, 0)\} \quad (2)$$

در نتیجه از (1) و (2) داریم:

$$\rightarrow b = 4, \quad a + b = 7 \rightarrow a = 3 \rightarrow ab = 12$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

$$f = \{(2, 3), (-2, 1), (-1, 2), (3, -2)\}$$

$$f^{-1} = \{(3, 2), (1, -2), (2, -1), (-2, 3)\}$$

$$y = \frac{f}{f^{-1}} = \left\{ \left(2, \frac{3}{-1}\right), \left(-2, \frac{1}{3}\right), \left(3, \frac{-2}{2}\right) \right\} = \left\{ (2, -3), \left(-2, \frac{1}{3}\right), (3, -1) \right\}$$

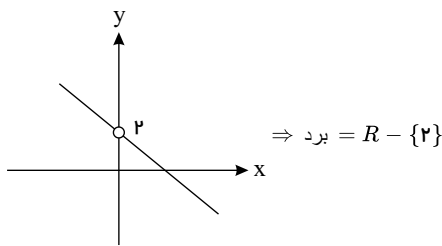
$$\Rightarrow \text{مجموع اعضای برد} = -3 + \frac{1}{3} - 1 = -4 + \frac{1}{3} = \frac{-11}{3}$$

دامنه توابع f و g برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است. پس دامنه $f - g$ که از اشتراک دامنه توابع f و g حاصل می‌شود نیز $\mathbb{R} - \{0\}$ است. **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸**

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{2x + 1}{x} - \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{2x + 1 - x^2 - 1}{x}$$

$$\Rightarrow (f - g)(x) = \frac{2x - x^2}{x} = \frac{x(2 - x)}{x} = 2 - x \Rightarrow (f - g)(x) = 2 - x, \quad (x \neq 0)$$

نمودار تابع را رسم و برد را تعیین می‌کنیم:



با توجه به این که دامنه تابع f برابر است با **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹**

$$b - x \geq 0 \Rightarrow x \leq b$$

از نمودار نتیجه می‌شود $b = 3$. از طرفی چون $f(3) = 2$ داریم:

$$f(3) = 2 \Rightarrow a - \sqrt{3 - 3} = 2 \Rightarrow a = 2$$

حال در تابع $f(x) = 2 - \sqrt{3 - x}$ چون $f(c) = 0$ پس:

$$2 - \sqrt{3 - x} = 0 \Rightarrow 2 = \sqrt{3 - c} \Rightarrow c = -1 \Rightarrow abc = -6$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴