نام آزمون: یازدهم فصل ۳ درس ۲

تلفن پنج رقمی : ۳۸۱۱۷-۰۵۱

تلگرام : riazi _ jazb

مهدی شاکریان

تابع یک به یک

۱ به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر a، تابع $f(x) = -x^۲ - ax + ۱$ در فاصلهٔ $[-۲, ۱]$ یک‌به‌یک است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $(-۴, ۲)$ ۲) $\mathbb{R} - (-۴, ۲)$ ۳) $(-۲, ۴)$ ۴) $\mathbb{R} - (-۲, ۴)$

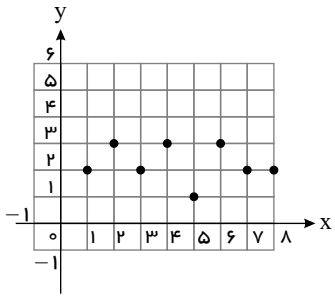
۲ اگر $f(x) = ۲|۳ - x| - ۱$ باشد، تابع f را با محدود کردن دامنه‌اش در کدام بازهٔ زیر نمی‌توان به یک تابع یک به یک تبدیل کرد؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $(-۱, ۴)$ ۲) $(۳, ۱۰)$ ۳) $(۰, ۳)$ ۴) $(-۴, ۰)$

۳ اگر تابع $f = \{(۱, ۵), (۳, ۷), (a + ۲, ۷), (۲a, a + ۳)\}$ یک‌به‌یک باشد، a کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

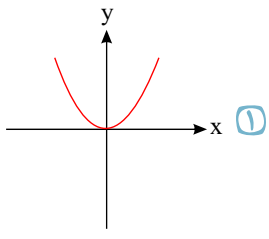
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۶

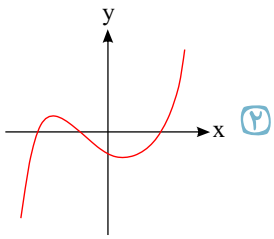
۴ با حذف حداقل چند نقطه از نمودار تابع مقابل می‌توان آن را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کرد؟ قلم چی- ۱۳۹۹

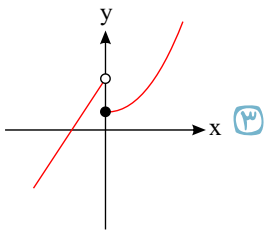


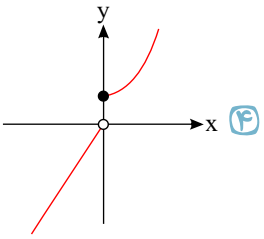
۱) ۶
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۳

۵ کدام‌یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۶ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ - ۱ & , \quad x \geq ۰ \\ ۳x + a & , \quad x < ۰ \end{cases}$ یک به یک باشد، حدود a کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $a < ۱$ ۲) $a < \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۳) $a \leq \frac{۱}{۳}$ ۴) $a \leq -۱$

تابع وارون

۷ تابع $f(x)=|۲x-۳|+۱$ با دامنهٔ $[-۱,۱]$ مفروض است. وارون تابع f کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

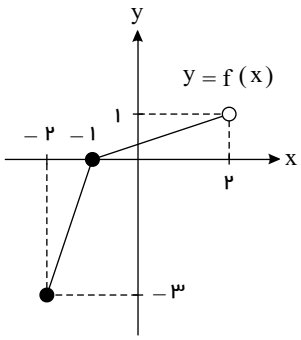
۱) $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x+۲;D_{f^{-۱}}=[-۱,۱]$

۲) $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x+۲;D_{f^{-۱}}=[۲,۶]$

۳) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}x+۱;D_{f^{-۱}}=[-۱,۱]$

۴) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}x+۱;D_{f^{-۱}}=[-۴,۰]$

۸ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است، اگر تابع $g(x)=(f+f^{-۱})(x)$ باشد، حاصل $g(-۱)$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹



۱) $-\frac{۵}{۳}$

۲) $-\frac{۴}{۳}$

۳) -۶

۴) $-\frac{۲}{۳}$

۹ اگر توابع f و g وارون‌پذیر باشند و داشته باشیم: $f(۳x-۱)=۲g(x+۲)-۱$ و $g^{-۱}(۲)=۴$، آنگاه مقدار $f^{-۱}(۳)$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) -۱ ۴) ۱

۱۰ اگر $f=\{(-۲,۱),(-۱,۰),(۰,۲),(۱,-۲)\}$ و $g=\{(-۱,۲),(۰,-۲),(۱,۰),(۲,-۱)\}$ باشد، مجموع اعضای برد تابع $(\frac{g^{-۱}}{f^{-۱}})^{-۱}$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۱

۱۱ اگر $f=\{(۲,۶),(۱,-۲),(a^۲+a,۶),(a,۲)\}$ تابعی وارون‌پذیر باشد، برد تابع $f+f^{-۱}$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $\{۱,۴\}$ ۲) $\{۳,۸\}$ ۳) $\{۳,۴\}$ ۴) $\{۰,-۱\}$

۱۲ تابع خطی f مفروض است. اگر نمودار f محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ و نمودار $f^{-۱}$ را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند، حاصل $f^{-۱}(-۳)$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) -۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۳ اگر f تابعی خطی و $f(x)=f^{-۱}(x)+۴$ باشد، مقدار $f(۴)$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

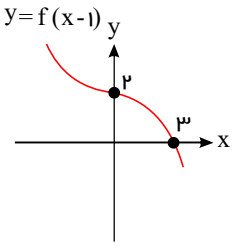
۱۴ نمودار تابع خطی f و وارون f از نقطهٔ $(-۲,۴)$ عبور می‌کنند، تابع $f^{-۱}$ محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۵ اگر تابع خطی $f(x)=ax+۳$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{۳}{۴}$ قطع کند، ضابطهٔ تابع وارون f کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۴}x-\frac{۳}{۴}$ ۲) $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۴}x+\frac{۳}{۴}$ ۳) $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۳}x-۳$ ۴) $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۳}{۴}$

۱۶ اگر شکل مقابل نمودار $y=f(x-۱)$ باشد، حاصل: $f(۲)+f^{-۱}(۲)$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹



۱) صفر ۲) -۱
۳) ۱ ۴) ۵

۱۷ در تابع خطی f، اگر $f(۲x+۱)=۴x-۷$ باشد، آنگاه $f^{-۱}(۱۱)$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۸ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

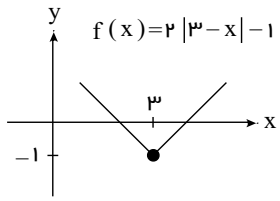
پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ **۴** تابع $f(x)=-x^{۲}-ax+۱$ یک سهمی با طول رأس سهمی $x=-\frac{a}{۲}$ است و برای این که تابع در فاصله $[-۲,۱]$ یک‌به‌یک باشد باید $-\frac{a}{۲}\notin[-۲,۱]$

پس داریم:

$$-۲<-\frac{a}{۲}<۱ \xrightarrow{\times(-۲)} ۴>a>-۲ \rightarrow a\in\mathbb{R}-(-۲,۴)$$

۲ ۱ ۲ ۳ ۴ **۱** با توجه به نمودار تابع $f(x)=۲|۳-x|-۱$ متوجه می‌شویم این تابع در هر بازه‌ای که $x=۳$ (ریشه داخل قدرمطلق) درون آن (به غیر از ابتدا و انتهای بازه) باشد یک‌به‌یک نیست. بنابراین گزینهٔ (۱) جواب است.



۳ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases}(۳,۷)\in f\\(a+۲,۷)\in f\end{cases} \xrightarrow{f\text{ یک‌به‌یک}} a+۲=۳\Rightarrow a=۱\Rightarrow f=\{(۱,۵),(۳,۷),(۲,۴)\}$$

۴ ۱ ۲ **۳** ۴ $y=۱\leftarrow$ یک نقطه

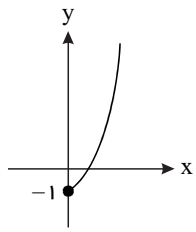
$y=۲\leftarrow$ چهار نقطه که برای یک‌به‌یک بودن حداقل باید ۳ نقطه حذف شوند.

$y=۳\leftarrow$ سه نقطه که برای یک‌به‌یک بودن حداقل باید ۲ نقطه حذف شوند.

برای تبدیل شدن به تابع یک‌به‌یک، حداقل ۵ نقطه باید حذف شوند.

۵ ۱ ۲ **۳** ۴ می دانیم تابعی یک‌به‌یک است که هر خط افقی (موازی محور x ها) نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. بنابراین نمودار گزینهٔ «۳» مربوط به یک تابع یک‌به‌یک است.

۶ ۱ ۲ ۳ **۴** با توجه به نمودار $y_۱=۲x^{۲}-۱$ به ازای $x\geq ۰$ به دست می‌آوریم $y_۱\geq -۱$ برای یک به یک بودن تابع f باید هر خط موازی محور xها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، پس ضابطهٔ دوم $y_۲=۳x+a$ باید به ازای $x<۰$ زیرمجموعه‌ای از محدودهٔ $(-\infty\ ,\ -۱]$ به دست آید. پس: $a\leq -۱$



۷ ۱ **۲** ۳ ۴

$$x\in[-۱,۱]\rightarrow ۲x-۳<۰\rightarrow f(x)=-۲x+۳+۱$$

$$\rightarrow f(x)=-۲x+۴\ ,\ D_f=[-۱,۱]\ ,\ R_f=[۲,۶]$$

$$\rightarrow y=-۲x+۴\rightarrow ۲x=-y+۴\rightarrow x=-\frac{۱}{۲}y+۲\xrightarrow[\text{عوض می‌شود}]{y,x\text{ جای}} f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x+۲$$

در نتیجه داریم:

$$f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x+۲\ ,\ D_{f^{-۱}}=[۲,۶]$$

دامنهٔ تابع معکوس $(f^{-۱})$ = بُرد تابع f

۸ ۱ **۲** ۳ ۴ ابتدا تابع f را به‌صورت یک تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}۳x+۳ & ;\ -۲\leq x<-۱\\ \frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۳} & ;\ -۱\leq x<۲\end{cases}$$

حال برای وارون تابع f داریم:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x-1 & ;\ -3\le x<0\\ 3x-1 & ;\ 0\le x<1\end{cases}$$

دقت کنید که بازه‌های دامنهٔ تابع f^{-1} را از روی برد تابع f به‌دست آورده‌ایم. حال داریم:

$$D_g=D_f\cap D_{f^{-1}}=D_f\cap R_f=[-2,2)\cap[-3,1)=[-2,1)$$

$$g(-1)=f(-1)+f^{-1}(-1)=0+\left(-\frac{1}{3}-1\right)=-\frac{4}{3}$$

۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$g^{-1}(2)=4\to g(4)=2\ ,\ \ x+2=4\Rightarrow x=2$$

$$\xrightarrow{x=2} f(5)=2g(4)-1\to f(5)=2(2)-1\to f(5)=3\to f^{-1}(3)=5$$

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴ مطابق فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases}f=\{(-2,1),(-1,0),(0,2),(1,-2)\}\\ g=\{(-1,2),(0,2),(1,0),(2,-1)\}\end{cases}$$

f^{-1} و g^{-1} برابر است با:

$$\begin{cases}f^{-1}=\{(-2,1),(0,-1),(1,-2),(2,0)\}\\ g^{-1}=\{(-2,0),(-1,2),(0,1),(2,-1)\}\end{cases}$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow\frac{g^{-1}}{f^{-1}}=\{(-2,0),(0,-1)\}$$

پس:

$$\Rightarrow\left(\frac{g^{-1}}{f^{-1}}\right)^{-1}=\{(-1,0),(0,-2)\}$$

برد این تابع مجموعهٔ $\{0,-2\}$ و مجموع اعضای آن برابر -2 است.

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ تابع f باید یک‌به‌یک باشد، پس:

$$\left.\begin{matrix}(2,6)\in f\\ (a^2+aa,6)\in f\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{چون تابع یک به یک است}}a^2+a=2\Rightarrow a^2+a-2=0\Rightarrow\begin{cases}a=1 & \text{(تابع یک‌به‌یک نمی‌شود.)}\\ a=-2 & \text{ق ق}\end{cases}$$

با جایگذاری $a=-2$، f به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$f=\{(2,6),(1,-2),(-2,2)\}$$

پس f^{-1} برابر است با:

$$f^{-1}=\{(6,2),(-2,1),(2,-2)\}$$

حال $f+f^{-1}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$D_{f+f^{-1}}=D_f\cap D_{f^{-1}}=\{-2,2\}$$

در نتیجه داریم:

$$f+f^{-1}=\{(-2,2+1),(2,6+(-2))\}=\{(-2,3),(2,4)\}\ \Rightarrow\ \text{برد}=\{3,4\}$$

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴ تابع f از نقطهٔ $(2,0)$ می‌گذرد و نمودار f^{-1} را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. از طرفی نمودارهای f^{-1} و f در نقطه‌ای روی خط $y=x$ یکدیگر را قطع می‌کنند، پس داریم:

$$\begin{cases}(0,2)\in f^{-1}\\ (3,3)\in f^{-1}\end{cases}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3-2}{3-0}x+2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+2\Rightarrow f^{-1}(-3)=-1+2=1$$

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴ ضابطهٔ f را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم.

وارون تابع f را حساب می‌کنیم:

$$y=ax+b\Rightarrow x=\frac{y-b}{a}\xrightarrow[y,x]{\text{عوض کردن}}y=\frac{x-b}{a}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$$

پس:

$$f(x)=f^{-1}(x)+4\Rightarrow ax+b=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}+4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{a} \rightarrow a=\pm 1 \\ b=\frac{b}{a}+4 \end{cases}$$

اگر $a=-1$ باشد، معادلهٔ دوم جواب ندارد پس باید a برابر با ۱ باشد:

$$b=\frac{-b}{a}+4 \xrightarrow{a=1} b=-b+4 \rightarrow b=2$$

ضابطهٔ f به شکل $f(x)=x+2$ درآمد و داریم:

$$f(4)=4+2=6$$

۱۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$(-2,4)\in f \rightarrow \begin{matrix}(4,-2)\in f^{-1}\\ (-2,4)\in f^{-1}\end{matrix}$$

چون تابع f خطی است، پس وارون f (f^{-1}) هم تابع خطی به‌صورت $f^{-1}(x)=ax+b$ است و داریم:

$$\begin{matrix} f^{-1}(4)=-2 \rightarrow 4a+b=-2 \\ f^{-1}(-2)=4 \rightarrow -2a+b=4 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 4a+b=-2 \\ 2a-b=-4 \end{cases}$$

$$6a=-6 \rightarrow a=-1 \ , \ b=2$$

$$\rightarrow f^{-1}(x)=-x+2 \xrightarrow[y=0]{\text{تقاطع با محور } x \text{ ها}} 0=-x+2 \rightarrow x=2$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ **۴** نقطه‌ای به طول $\frac{3}{4}$ روی محور x ها نقطهٔ $(\frac{3}{4},0)$ است، بنابراین:

$$0=a\times\frac{3}{4}+3 \Rightarrow \frac{3}{4}a=-3 \Rightarrow a=-4$$

در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$$

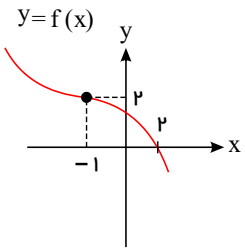
$$\Rightarrow f(x)=y=-4x+3 \Rightarrow -4x=y-3 \Rightarrow x=\frac{y-3}{-4} \xrightarrow{\text{عوض کردن جای } x \text{ و } y} y=\frac{x-3}{-4}$$

۱۶ ۱ **۲** ۳ ۴ ابتدا به کمک انتقال تابع $y=f(x-1)$ به‌اندازهٔ یک واحد در راستای افقی به سمت چپ، نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم:

واضح است که:

$$f(2)=0$$

$$f(-1)=2 \Rightarrow f^{-1}(2)=-1$$



$$\Rightarrow f(2)+f^{-1}(2)=0+(-1)=-1$$

۱۷ ۱ ۲ ۳ **۴** توابع خطی به فرم $f(x)=ax+b$ می‌باشند، پس داریم:

$$f(2x+1)=4x-7 \Rightarrow a(2x+1)+b=4x-7$$

$$\Rightarrow 2ax+a+b=4x-7 \Rightarrow \begin{cases} 2a=4 \Rightarrow a=2 \\ a+b=-7 \xrightarrow{a=2} b=-9 \end{cases}$$

$$f(x)=2x-9 \Rightarrow f^{-1}(11)=k \Rightarrow f(k)=11 \Rightarrow 2k-9=11 \Rightarrow k=10 \Rightarrow f^{-1}(11)=10$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۱ ۲ ۳ **۴**	۶	۱ ۲ ۳ **۴**	۱۱	۱ ۲ **۳** ۴	۱۶	۱ **۲** ۳ ۴
۲	**۱** ۲ ۳ ۴	۷	۱ **۲** ۳ ۴	۱۲	۱ **۲** ۳ ۴	۱۷	۱ ۲ ۳ **۴**
۳	**۱** ۲ ۳ ۴	۸	۱ **۲** ۳ ۴	۱۳	۱ ۲ **۳** ۴		
۴	۱ **۲** ۳ ۴	۹	۱ **۲** ۳ ۴	۱۴	**۴** ۱ ۲ ۳		
۵	۱ ۲ ۳ **۴**	۱۰	۱ **۲** ۳ ۴	۱۵	۱ **۲** ۳ ۴		