



سبقت (۰۵۱-۳۸۱۱۷)

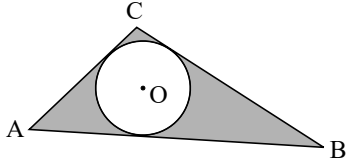
نام آزمون: یازدهم قلمچی ۲۱

تلگرام: @riazi_jazb

سایت: sebhatebartar.com

۱) از نقطه O محل تلاقی سه نیم‌ساز داخلی مثلث ABC ، عمودی به طول ۲ بر ضلع AB رسم می‌کنیم. اگر محیط مثلث ۲۴

قلم چی - ۱۳۹۸



باشد، مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟ ($\pi \approx 3$)

۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

۱۰ (۴)

۱۶ (۳)

۲) دو دایره به شعاع‌های R و $2R$ در نقطه‌ای بر هم مماسند و خط d در همین نقطه بر دو دایره مماس است. اگر دقیقاً دو نقطه

قلم چی - ۱۳۹۸

روی دایره‌ها باشد که از خط d فاصله‌شان $1 + 1.5R$ باشد، حدود R کدام است؟

$\frac{2}{5} < R < 3$ (۴)

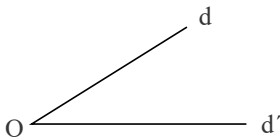
$\frac{1}{5} < R < 3$ (۳)

$\frac{2}{5} < R < 2$ (۲)

$\frac{1}{5} < R < 2$ (۱)

قلم چی - ۱۳۹۸

۳) چند نقطه (به غیر از O) در صفحه وجود دارد که از خط‌های d و d' و نقطه O به یک فاصله باشد؟



۱ (۲)

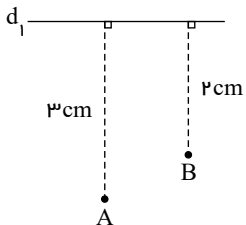
صفر (۱)

بی‌شمار (۴)

۲ (۳)

قلم چی - ۱۳۹۹

۴) چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقاط A و B به یک فاصله و از خط d_1 به فاصله 2cm باشد؟



۱ (۲)

صفر (۱)

۳ (۴)

۲ (۳)

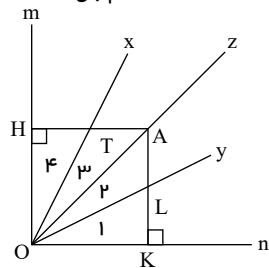


- ۵) با معلوم بودن دو ضلع $AB = 3$ و $BC = 5$ و زاویه $\hat{C} = 30^\circ$ ، چند مثلث غیرهم‌نهشت می‌توان رسم کرد؟ قلم چی - ۱۳۹۹
- ۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

- ۶) از بین شکل‌های مستطیل، لوزی، مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین، مربع و شش‌ضلعی منتظم، در چند شکل همواره نقطه تقاطع عمودمنصف‌های اضلاع و نقطه تقاطع نیم‌سازهای زاویه‌ها، بر هم منطبق است؟ قلم چی - ۱۳۹۸
- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

- ۷) هر نقطه روی نیم خط Oz از دو ضلع زاویه xOy به یک فاصله است و فاصله نقطه A روی Oz از Om و On به یک فاصله است. چند مورد زیر همواره درست است؟ (آ) $AT = TH$

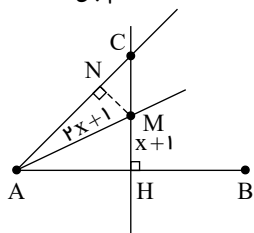
قلم چی - ۱۳۹۹



- ب) $\hat{O}_1 = \hat{O}_4$
 پ) $TH = LK$
 ت) $OK = OH$
- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

- ۸) نقاط A و B به فاصله $8cm$ از هم قرار دارند. به مرکز A و شعاع $6cm$ و مرکز B شعاع $4cm$ دو کمان رسم می‌کنیم تا دو کمان همدیگر را در نقاط X و Y قطع کنند. کدام نتیجه‌گیری در مورد چهارضلعی $AXBY$ نادرست است؟ قلم چی - ۱۳۹۹
- ۱) مثلث‌های AXB و AYB هم‌نهشتند.
 ۲) XY عمود منصف AB است.
 ۳) مثلث‌های AXY و BXY متساوی‌الساقین هستند.
 ۴) AB نیم‌ساز زاویه XAY است.

- ۹) در شکل زیر نیم‌ساز زاویه A عمودمنصف پاره‌خط AB را در نقطه M قطع کرده است. اگر $AB = 8$ و $AM = 2x + 1$ باشد، اندازه $AN + NM$ کدام است؟ قلم چی - ۱۳۹۹



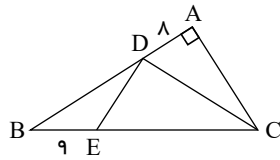
- ۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۷

۱۰) مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ مفروض است. چند نقطه روی محیط مثلث وجود دارد که فاصله‌اش از ارتفاع AH برابر ۲ و فاصله‌اش از حداقل یکی از دو رأس B و C برابر ۴ باشد؟

قلم چی - ۱۳۹۹

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

قلم چی - ۱۳۹۹

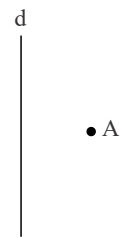


۱۱) در شکل مقابل اگر CD نیمساز و $DE = 10$ باشد، اندازه BD کدام است؟

- ۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۱۲) با استفاده از پرگار کمانی به شعاع $3\sqrt{2} \text{ cm}$ و به مرکز نقطه A که در فاصله ۳ سانتی‌متری از خط d قرار دارد، رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند. مثلث ABC و مساحت آن است.

قلم چی - ۱۳۹۸



- ۱) متساوی‌الاضلاع، $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ۲) قائم‌الزاویه، 18 cm^2
 ۳) متساوی‌الاضلاع، $\frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$ ۴) قائم‌الزاویه، 9 cm^2

۱۳) دو نقطه A و B از یکدیگر ۵ واحد فاصله دارند. از رأس A کمانی به شعاع ۳ واحد و از رأس B کمانی به شعاع ۴ واحد رسم می‌کنیم. این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه C و D قطع می‌کنند. چهارضلعی $ACBD$

قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) مستطیل است. ۲) متوازی‌الاضلاع است. ۳) لوزی است. ۴) دارای دو زاویه قائمه است.

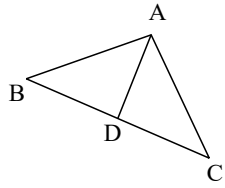
۱۴) عمودمنصف‌های دو ضلع AC و BC و میانه CM از مثلث ABC در نقطه P یکدیگر را قطع می‌کنند. در این صورت کدام نتیجه‌گیری لزوماً صحیح است؟

قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) ABC قائم‌الزاویه است. ۲) مثلث ABC متساوی‌الساقین و $AB = AC$ است.
 ۳) مثلث ABC قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. ۴) مثلث ABC متساوی‌الساقین و $CA = CB$ است.



قلم چی - ۱۳۹۸



۱۵ در شکل زیر AD نیم‌ساز زاویه A است. نسبت $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}}$ کدام است؟

۲ $\frac{DB}{BC}$

۴ $\frac{AC}{BC}$

۱ $\frac{DC}{BD}$

۳ $\frac{AC}{AC + AB}$

۱۶ در مثلث $\triangle ABC$ اندازه ضلع $BC = 6$ است. نیم‌ساز داخلی زاویه \hat{B} و عمودمنصف‌های اضلاع AB و BC در نقطه M تلاقی دارند. اندازه AB کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۹

۴ $6\sqrt{2}$

۳ ۶

۲ $3\sqrt{3}$

۱ $3\sqrt{2}$

۱۷ در مثلث $\triangle ABC$ ، ارتفاع‌های BH و CH' در نقطه P تلاقی کرده‌اند. اگر $PA = PB = PC$ باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

قلم چی - ۱۳۹۹

۲ $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین و $BC = AC \neq AB$ است.

۱ $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین و $AB = AC \neq BC$ است.

۴ $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه است.

۳ $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع است.

۱۸ عمودمنصف پاره خط AC را رسم می‌کنیم تا این پاره خط را در نقطه M قطع کند. اگر به مرکز M و به شعاع AM دایره‌ای

قلم چی - ۱۳۹۸

رسم کنیم تا عمودمنصف را در نقاط B و D قطع کند، چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟

۲ فقط متوازی‌الاضلاع

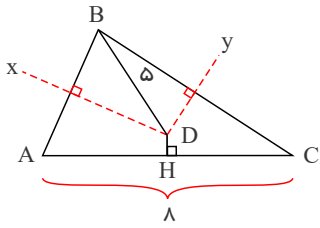
۱ فقط لوزی با زاویه‌های غیر قائمه

۴ فقط مستطیل با طول و عرض متفاوت

۳ مربع

۱۹) در شکل زیر، نقطه D درون مثلث ABC ، Dx و Dy عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و BC هستند، در این صورت اندازه ارتفاع DH در مثلث ADC کدام است؟ ($BD = 5$)

قلم چی - ۱۳۹۸



- ۱) ۳
۲) ۴
۳) $2\sqrt{2}$
۴) $\sqrt{3}$

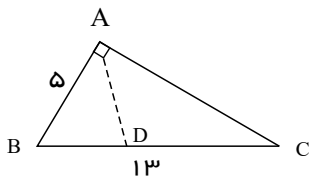
۲۰) دو دایره به مراکز O و O' ، یکدیگر را در نقاط A و B قطع کرده‌اند. چند نقطه مانند M روی پاره خط OO' وجود دارد به گونه‌ای که $MA = MB$ باشد؟

قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۱) در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، نیمساز زاویه قائمه، وتر را در نقطه D قطع می‌کند. مقدار $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}$ کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۸



- ۱) $\frac{5}{13}$
۲) $\frac{7}{13}$
۳) $\frac{7}{12}$
۴) $\frac{5}{12}$

 ($BC = 13$)

۲۲) دو دایره به مراکز O و O' با شعاع‌های متفاوت در نقاط A و B متقاطع‌اند. در این صورت چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح است؟

قلم چی - ۱۳۹۸

 الف) OO' از وسط AB می‌گذرد.

 ب) نقطه O از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است.

 پ) دو مثلث OAO' و OBO' هم‌نهشتند.

 ت) AB عمودمنصف OO' است.

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳) در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، نیمساز زاویه B ، ضلع AC را در نقطه D قطع می‌کند. اگر $AD = \frac{8}{3}$ و

قلم چی - ۱۳۹۸

$\hat{B} = 2\hat{C}$ باشد، مساحت مثلث DBC کدام است؟

۱) $\frac{64}{\sqrt{3}}$

۲) $\frac{64}{3\sqrt{3}}$

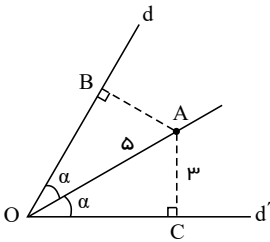
۳) $\frac{16}{3\sqrt{3}}$

۴) $\frac{128}{3\sqrt{3}}$

۲۴) در شکل زیر دایره‌ای به مرکز O رسم می‌کنیم، به طوری که از نقطه A بگذرد. فاصله نقطه B از محل برخورد دایره با خط d

قلم چی - ۱۳۹۸

چقدر است؟



۱) ۱

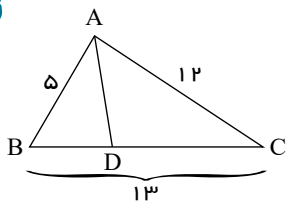
۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

قلم چی - ۱۳۹۹

۲۵) در شکل مقابل AD نیمساز زاویه A است. فاصله نقطه D تا ضلع AC چند برابر AD است؟



۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۴) $\frac{5}{12}$

۲۶) نقطه A درون متوازی‌الاضلاعی به اضلاع a و b قرار دارد. اگر نقطه A از دو ضلع بزرگ به یک فاصله و از دو ضلع کوچک به

قلم چی - ۱۳۹۹

یک فاصله باشد، مکان نقطه A کدام است؟ ($a > b$ و زوایا مخالف 90° درجه‌اند)

۱) هر نقطه از خطی موازی دو ضلع بزرگ‌تر و به فاصله $\frac{b}{2}$

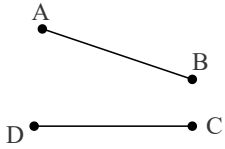
۲) هر نقطه از خطی موازی دو ضلع کوچک‌تر و به فاصله $\frac{a}{2}$

۳) محل برخورد دو قطر متوازی‌الاضلاع

۴) محل برخورد نیم‌سازهای دو زاویه مجاور

۲۷ با کدام شرط زیر با توجه به شکل پاره خط‌های AB و CD ، همواره می‌توان دایره‌ای رسم کرد که از نقاط A, B, C و D بگذرد؟

قلم چی - ۱۳۹۸



- ۱ محل برخورد عمودمنصف‌های AB و CD روی نیم‌ساز امتداد دو پاره خط AB و CD باشد.
- ۲ نیم‌ساز زوایای $\hat{A}BC$ ، $\hat{B}CD$ و $\hat{C}DA$ در یک نقطه هم‌دیگر را قطع کنند.
- ۳ عمودمنصف‌های AB و CD هم‌دیگر را در یک نقطه خارج از عمودمنصف BC قطع کنند.
- ۴ عمودمنصف‌های AB ، CD و AD در یک نقطه هم‌دیگر را قطع کنند.

۲۸ نقطه A به فاصله ۴ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. اگر بخواهیم نقاط B و C را روی خط d چنان انتخاب کنیم که مثلث ABC متساوی‌الساقین بوده و مساحت آن ۱۲ سانتی‌متر مربع باشد، باید دایره‌ای به مرکز A و شعاعی با کدام طول بزنیم تا نقاط B و C را روی خط به وجود آورد؟

قلم چی - ۱۳۹۸

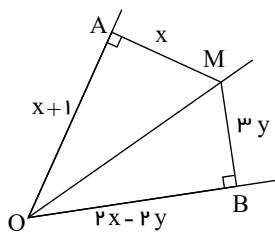
۴ $\sqrt{2}$

۳ ۵٫۵

۲ ۵

۱ ۴٫۵

قلم چی - ۱۳۹۸



۲۹ در شکل زیر نقطه M روی نیم‌ساز زاویه O قرار دارد، مقدار $x + y$ کدام است؟

۱ ۶

۲ ۵

۳ ۴

۴ ۳٫۵

۳۰ پاره خط AB به طول ۵ سانتی‌متر در صفحه‌ای مفروض است. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که فاصله آن از دو نقطه A و B برابر ۶ سانتی‌متر باشد؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۴ بی‌شمار

۳ صفر

۲ ۲

۱ ۱

قلم چی - ۱۳۹۸

۳۱ عکس کدام قضیه شرطی زیر یک قضیه شرطی درست است؟

- ۱ اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، آن‌گاه هم‌مساحت هستند.
- ۲ اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آن‌گاه دو زاویه برابر دارد.
- ۳ اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرهای آن منصف یکدیگرند.
- ۴ اگر یک چهارضلعی مربع باشد، آن‌گاه قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

۳۲ در چهارضلعی $ABCD$ ، نقطه‌ای وجود دارد که فاصله آن از همه رأس‌های چهارضلعی به یک اندازه است. این نقطه همواره قلم چی - ۱۳۹۹ است.

- ① محل برخورد قطرهای چهارضلعی
 ② محل برخورد نیمساز زاویه‌های چهارضلعی
 ③ محل برخورد عمود منصف‌های اضلاع چهارضلعی
 ④ محل برخورد پاره‌خط واصل اضلاع AB و CD و پاره‌خط واصل وسط اضلاع AD و BC

۳۳ نقطه M روی عمدمنصف پاره خط AB قرار دارد، اگر فاصله A تا M برابر $۳x + ۲$ ، فاصله B تا M برابر $۶x - ۱$ و فاصله M تا پاره‌خط AB برابر $x + ۳$ باشد، طول پاره‌خط AB کدام است؟ قلم چی - ۱۳۹۹

- ① ۳ ② ۴٫۵ ③ ۶ ④ $۳\sqrt{۲}$

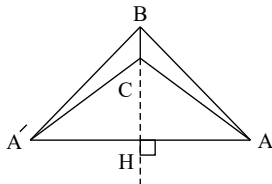
۳۴ در شکل زیر، اگر مساحت دو مثلث ABC و $A'BC$ با هم برابر باشند، چند مورد از نتایج زیر الزاماً درست است؟ قلم چی - ۱۳۹۹

الف) $AB + A'C = A'B + AC$

ب) $\hat{B}AC = \hat{B}A'C$

ج) $\hat{A}BC = \hat{A}'BC$

د) $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B}{A'C}$



- ① ۱ ② ۲
 ③ ۳ ④ ۴

۳۵ سه ضلع مثلث ABC بر دایره‌ای مماس است. مرکز این دایره همواره کدام نقطه است؟ قلم چی - ۱۳۹۹

- ① محل برخورد نیمسازهای داخلی دو زاویه A و B
 ② محل برخورد عمودمنصف‌های دو ضلع AB و AC
 ③ محل برخورد عمودمنصف ضلع BC و نیمساز داخلی زاویه A
 ④ محل برخورد میانه‌های اضلاع مثلث

۳۶) نقطه O روی عمودمنصف دو ضلع AB و AC در مثلث ABC قرار دارد. اگر $OA = x + 1$ ، $OB = y - 2$ ، $OC = y - x + 2$ و $AC = y + 1$ باشد، مساحت مثلث OAC کدام است؟
 قلم چی - ۱۳۹۹

۱۲ (۴)

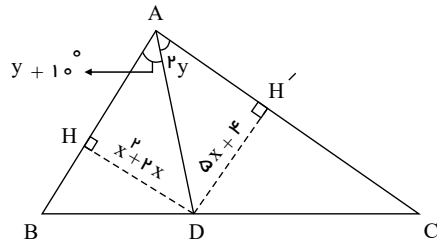
۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

۳۷) در شکل زیر، AD نیمساز زاویه A است. اندازه x چند برابر اندازه y است؟ ($DH = x^2 + 2x, DH' = 5x + 4$)
 قلم چی - ۱۳۹۹

قلم چی - ۱۳۹۹


 $\frac{3}{5}$ (۲)

 $\frac{4}{4}$ (۴)

 $\frac{2}{5}$ (۱)

 $\frac{2}{4}$ (۳)

۳۸) هر نقطه روی عمودمنصف پاره خط AB از به یک فاصله است و هر نقطه روی نیمساز زاویه xy از به یک فاصله است.
 قلم چی - ۱۳۹۹

- ۱) دو سر پاره خط - دو ضلع زاویه (۲) دو سر پاره خط - رأس زاویه (۳) وسط پاره خط - رأس زاویه (۴) وسط پاره خط - دو ضلع زاویه

۳۹) نقطه C از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است و روی AB قرار ندارد، آن گاه کدام گزینه می تواند نادرست قلم چی - ۱۳۹۹ باشد؟

- ۱) وسط پاره خط AB روی نیمساز زاویه ACB قرار دارد. (۲) وسط پاره خط AC از دو ضلع AB و BC به یک فاصله است. (۳) روی C عمود منصف AB قرار دارد. (۴) مثلث ABC متساوی الساقین است.

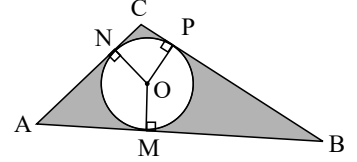
۴۰) نقطه M درون چهارضلعی $ABCD$ به گونه ای قرار دارد که فاصله M از سه رأس A, B و C یکسان است. کدام گزینه در مورد چهارضلعی $ABCD$ و نقطه M همواره درست است؟
 قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) نقطه M محل برخورد عمودمنصف های اضلاع AB و CD است. (۲) نقطه M محل برخورد عمودمنصف های اضلاع AB و BC است. (۳) نقطه M محل برخورد عمودمنصف های اضلاع AD و BC است. (۴) نقطه M محل برخورد نیمسازهای زاویه های A و C است.

پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱ هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، پس داریم:

$$OM = ON = OP = ۲$$



$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OBC} = \frac{۲ \times AB}{۲} + \frac{۲ \times AC}{۲} + \frac{۲ \times BC}{۲} = \underbrace{(AB + AC + BC)}_{\text{محیط}} = ۲۴$$

$$S_{\text{دایره}} = \pi r^2 = ۳ \times ۲^2 = ۱۲$$

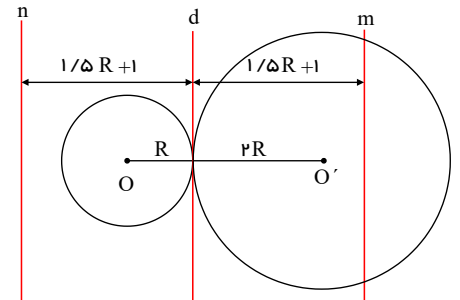
$$\text{مساحت هاشور خورده} = S_{\triangle ABC} - S_{\text{دایره}} = ۲۴ - ۱۲ = ۱۲$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲ حالت اول: دو دایره مماس خارج باشند.

دو خط m و n وجود دارند که از خط d به فاصله $۱,۵R + ۱$ هستند و فقط یکی از این دو خط باید با یک دایره دو نقطه تقاطع داشته باشد و این خط فقط دایره بزرگ‌تر را قطع می‌کند و دایره کوچک‌تر را قطع نمی‌کند و داریم:

$$\begin{cases} ۱,۵R + ۱ > ۲R \rightarrow ۱ > ۰,۵R \rightarrow ۲ > R \\ ۱,۵R + ۱ < ۴R \rightarrow ۱ < ۲,۵R \rightarrow \frac{۲}{۵} < R \end{cases}$$

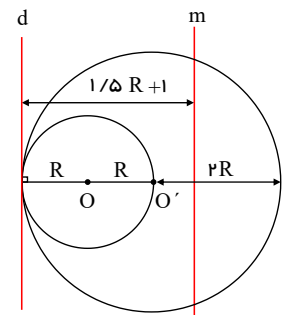
$$\rightarrow \boxed{\frac{۲}{۵} < R < ۲}$$



حالت دوم: دو دایره مماس داخل باشند.
در این حالت هم داریم:

$$\begin{cases} ۱,۵R + ۱ > ۲R \rightarrow ۱ > ۰,۵R \rightarrow ۲ > R \\ ۱,۵R + ۱ < ۴R \rightarrow ۱ < ۲,۵R \rightarrow \frac{۲}{۵} < R \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{۲}{۵} < R < ۲}$$

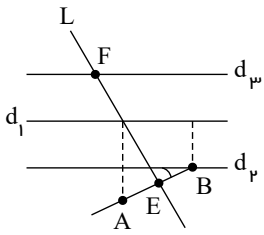


۱ ۲ ۳ ۴ ۳ تمام نقاطی که روی نیم‌ساز زاویه O قرار دارند، از دو خط d و d' به یک فاصله می‌باشند و تعداد این نقاط بی‌شمار است.

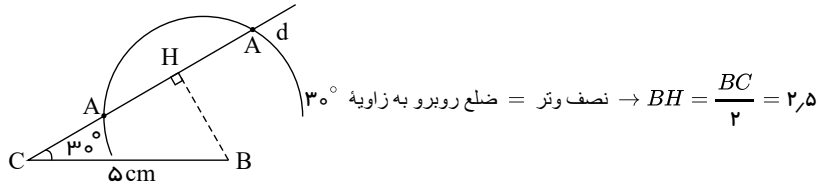
نقاطی که از نقطه O به یک فاصله باشند روی دایره به مرکز O و شعاع‌های متفاوت است. اما باید توجه کرد که طول شعاع دایره به مرکز O و نقطه C روی نیم‌ساز که دایره را قطع کرده است همواره بیش‌تر از فاصله نقطه C تا دو خط d و d' است. بنابراین هیچ نقطه‌ای مشخصات خواسته شده در سؤال را ندارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴ نقاطی که از A و B به یک فاصله هستند روی عمود منصف پاره‌خط AB (خط l) قرار دارند و نقاطی که از خط d_1 فاصله $۲cm$ باشند دو خط موازی و در دو طرف آن هستند. (خط‌های d_1 و d_2)

محل تقاطع خط l با خط‌های d_1 و d_2 جواب سؤال است که ۲ نقطه E و F می‌باشد.



۱ ۲ ۳ ۴ ۵
 نقطه قطع کند، که مکان هندسی نقطه A هستند. ابتدا ضلع $BC = 5$ را رسم می‌کنیم و پس از آن $\hat{C} = 30^\circ$ را رسم می‌کنیم. سپس دایره‌ای به شعاع $AB = 3$ و به مرکز B رسم می‌کنیم تا خط d را در 2



چون کوتاه‌ترین فاصله نقطه B از خط d ، $2,5$ است، پس دایره‌ای به شعاع 3 و مرکز B خط d را در دو نقطه قطع می‌کند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶
 فقط در چندضلعی‌های منتظم نقطه تقاطع عمودمنصف‌های اضلاع و نقطه تقاطع نیم‌سازهای زاویه‌ها بر هم منطبق است و با توجه به شکل‌های داده شده، مربع و شش‌ضلعی منتظم این خاصیت را دارند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷

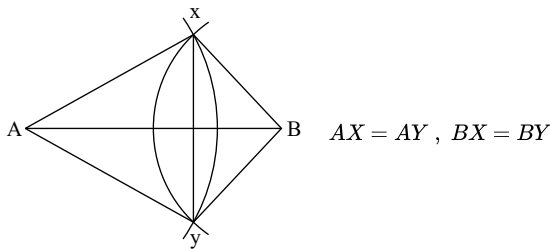
$\hat{O}_p = \hat{O}_r \rightarrow OZ$ نیمساز xOy است. → هر نقطه روی نیم خط Oz از دو ضلع زاویه xOy به یک فاصله است.

$AH = AK \rightarrow OZ$ نیمساز $m\hat{O}n$ است. → نقطه A روی Oz از Om و On به یک فاصله است.

$$\begin{cases} \hat{O}_r = \hat{O}_p \\ \hat{O}_1 + \hat{O}_r = \hat{O}_p + \hat{O}_r \end{cases} \rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_p$$

$AT \neq TH$ اما $TH = LK$, $OH = OK$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸



$$\rightarrow \triangle AYB \cong \triangle AXB$$

→ $\triangle AXY, \triangle BXY$ متساوی‌الساقین

→ XAY نیمساز AB

→ XY عمود منصف AB نیست.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$\hat{A} \text{ نیمساز } AM \rightarrow MH = MN = x + 1, AN = AH$$

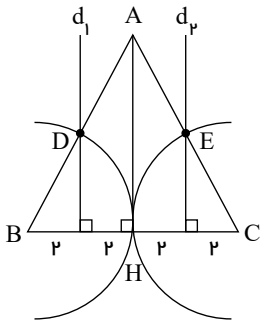
$$H \text{ روی عمودمنصف } AB \rightarrow AH = BH = 4$$

$$\triangle AHM: AM^2 = AH^2 + HM^2 \rightarrow (2x + 1)^2 = 4^2 + (x + 1)^2$$

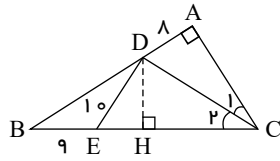
$$\rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 16 + x^2 + 2x + 1 \rightarrow 3x^2 + 2x - 16 = 0 \rightarrow (x - 2)(3x + 8) = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \rightarrow NM = x + 1 \Rightarrow NM = 3 \rightarrow AN + NM = 4 + 3 = 7 \\ x = -\frac{8}{3} \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰
 مکان هندسی نقطه‌ای که فاصله‌اش از ارتفاع AH برابر 2 است، دو خط موازی AH و به فاصله 2cm از AH است (خطوط d_1 و d_2). سپس دو دایره به شعاع 4 به مرکز B و C رسم می‌کنیم. محل تلاقی هر یک از این دو دایره با خط‌های d_1 و d_2 (که روی محیط مثلث باشد) جواب سؤال است که جواب دو نقطه D و E است.



۱۱) با رسم عمود وارد از رأس D بر ضلع EC به شکل زیر می‌رسیم: حال می‌توانیم بنویسیم؛



فاصله هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، بنابراین:

در مثلث DHE طبق فیثاغورس داریم:

$$DH = AD = 8$$

$$EH^2 + DH^2 = DE^2 \Rightarrow EH^2 = 10^2 - 8^2 \Rightarrow EH = 6$$

در نهایت با استفاده از فیثاغورس در مثلث BHD داریم:

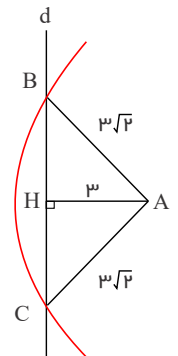
$$BD^2 = DH^2 + BH^2 \Rightarrow BD^2 = 8^2 + (BE + EH)^2 \Rightarrow BD^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow BD = 17$$

۱۲) از آن جایی که مثلث قائم‌الزاویه است؛ داریم:

$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \rightarrow 3^2 + BH^2 = (3\sqrt{2})^2 \rightarrow$$

$$BH^2 = 9 \rightarrow \boxed{BH = 3} \rightarrow \boxed{BC = 6}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{3 \times 6}{2} \Rightarrow \boxed{S_{\triangle ABC} = 9 \text{ cm}^2}$$



اگر قضیه فیثاغورث در مثلث ABC برقرار باشد، نتیجه می‌گیریم که این مثلث قائم‌الزاویه است؛ داریم:

$$AB^2 + AC^2 \stackrel{?}{=} BC^2 \rightarrow (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 \stackrel{?}{=} (6)^2$$

$$\rightarrow 18 + 18 = 36 \rightarrow \text{مثلث قائم‌الزاویه است. } \triangle ABC$$

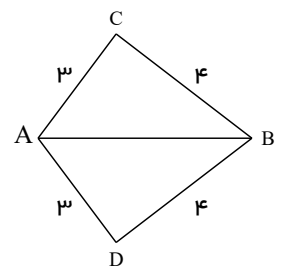
۱۳) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\triangle ABC : AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$5^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow \hat{C} = 90^\circ$$

$$\triangle ABD : AB^2 = AD^2 + BD^2$$

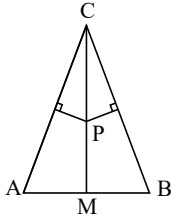
$$5^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow \hat{D} = 90^\circ$$



چهارضلعی $ACBD$ دارای دو زاویه قائمه است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

سه عمودمنصف در هر مثلث، هم‌رس هستند. یعنی در شکل مقابل میانه CM علاوه بر میانه بودن، باید عمودمنصف ضلع AB هم باشد. یعنی میانه، ارتفاع و عمودمنصف ضلع AB با هم یکی هستند. پس $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است و داریم: $AC = BC$.



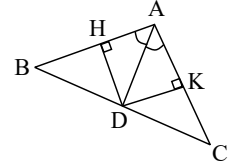
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

$DH = DK$ است بنابرین نقطه D از دو ضلع زاویه \hat{A} به یک فاصله است یعنی: $DH = DK$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AC \times DK, S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} AB \times DH$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times DK + \frac{1}{2} AB \times DH \stackrel{DH=DK}{=} \frac{DH(AC + AB)}{2}$$

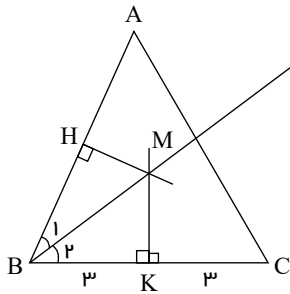
$$\rightarrow \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AC \times DK}{\frac{1}{2} DH (AC + AB)} = \frac{AC}{AC + AB}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

BC عمودمنصف $= MK \rightarrow BK = KC = ۳$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} \text{ نیمساز} = BM \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \\ \hat{H} = \hat{K} = ۹۰^\circ \\ BM = BM \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر یک زاویه}} \triangle BMH = \triangle BMK$$



$$\rightarrow BH = BK = ۳$$

AB منصف $= HM \rightarrow AH = BH = ۳ \rightarrow AB = ۶$

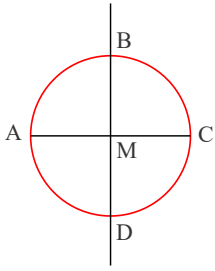
$PA = PB = PC$ بنابرین نقطه P محل تلاقی عمودمنصف ضلع‌های مثلث ABC است. و چون نقطه P محل تلاقی BH و CH' هم می‌باشد، بنابراین

BH و CH' هم عمودمنصف ضلع‌های AC و AB هستند و هم ارتفاع، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \text{عمودمنصف} = BH &\Rightarrow BA = BC \\ \text{عمودمنصف} = CH' &\Rightarrow CA = BC \end{aligned} \Rightarrow AB = AC = BC$$

بنابرین $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع است.

دایره به مرکز M و شعاع AM را رسم می‌کنیم و مشاهده می‌شود که نقاط A, B, C, D محل‌های تلاقی دو قطر عمود بر هم با دایره هستند پس $ABCD$ مربع است.

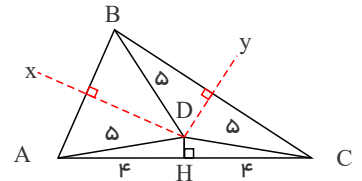


چون 3 عمودمنصف در یک مثلث هم‌رس هستند پس نقطه D روی عمودمنصف AC هم قرار دارد و ضمناً $BD = AD = CD = 5$

$$AH = \frac{AC}{2} = 4$$

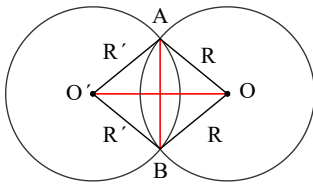
$$\rightarrow \triangle ADH : AD^2 = AH^2 + DH^2$$

$$\rightarrow 5^2 = 4^2 + DH^2 \rightarrow DH^2 = 9 \rightarrow \boxed{DH = 3}$$



نقطه O روی عمودمنصف AB است. $OA = OB = R \rightarrow$

نقطه O' روی عمودمنصف AB است. $O'A = O'B = R' \rightarrow$



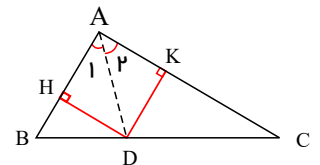
پس خط گذرنده از نقاط O و O' عمودمنصف پاره‌خط AB است و هر نقطه واقع بر پاره‌خط OO' از نقاط A و B به یک فاصله هستند. بنابراین بی‌شمار نقطه M داریم که از نقاط A و B به یک

$$\hat{A} = 90^\circ \rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \rightarrow 5^2 + AC^2 = 13^2$$

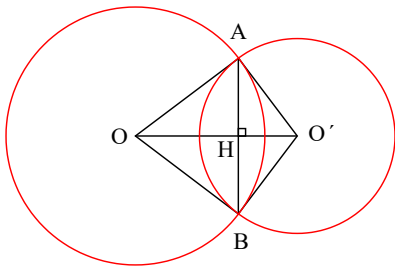
$$\rightarrow AC^2 = 169 - 25 = 144 \rightarrow \boxed{AC = 12}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \rightarrow DH = DK$$

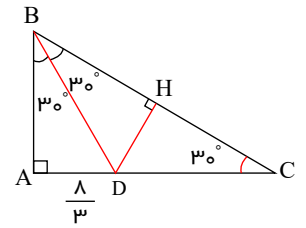
$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AB \times DH}{\frac{1}{2}AC \times DK} = \frac{AB}{AC} \times \frac{DH}{DK} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$$



OO' عمود منصف AB است پس الف، ب و پ صحیح می‌باشند و ت نادرست است.



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳



$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \\ \hat{B} = 2\hat{C} \end{cases} \rightarrow \hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 30^\circ$$

$BD \rightarrow AD = DH = \frac{1}{3}$ نیمساز زاویه B است.

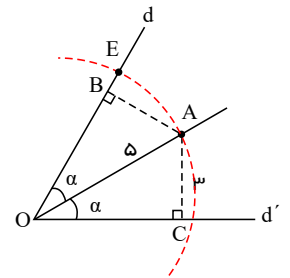
$$\begin{aligned} \triangle BDH : \tan 30^\circ = \frac{DH}{BH} &\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{1}{3}}{BH} \rightarrow BH = \frac{1}{\sqrt{3}}, BC = 2BH \rightarrow BC = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \rightarrow S_{\triangle BCD} &= \frac{1}{2} DH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

نقطه A روی نیمساز $\triangle BOC$ قرار دارد. پس داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴

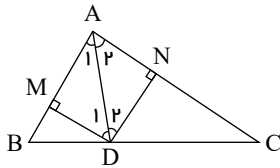
$$AC = AB = 3, OB = OC$$

$$OB^2 + AB^2 = OA^2 \rightarrow OB^2 + 3^2 = 5^2 \rightarrow OB = 4$$

$$\rightarrow BE = OE - OB = 5 - 4 \rightarrow BE = 1$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵



$$\begin{aligned} \triangle ABC : AB^2 + AC^2 &= BC^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ \\ 5^2 + 12^2 &= 13^2 \end{aligned}$$

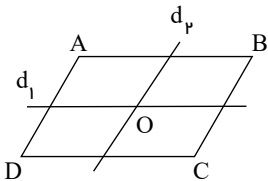
$$\hat{A} = 90^\circ \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 45^\circ, \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 45^\circ$$

$AMDN : DM = DN, \hat{A} = \hat{M} = \hat{D} = \hat{N} = 90^\circ \rightarrow AMDN = \text{مربع}$

$$AD = \sqrt{2} DN \rightarrow \frac{DN}{AD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مکان هندسی نقطای که از دو ضلع بزرگ (CD, AB) به یک فاصله است، خط d_1 است که موازی آنهاست و در فاصله یکسان از هر دو قرار دارد و مکان ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶

هندسی نقطای که از دو ضلع کوچک (BC, AD) به یک فاصله است، خط d_2 است که موازی آنهاست و در فاصله یکسان از هر دو قرار دارد و جواب سؤال نقطه O محل تلاقی خطوط d_1 و d_2 است که محل تلاقی قطرهای هم می باشد.



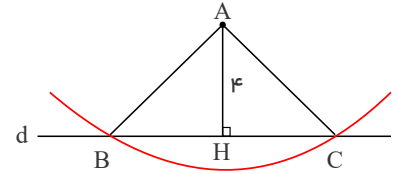
شرط اینکه دایره به مرکز O از نقطه های A, B, C, D بگذرد این است که $OA = OB = OC = OD = R$ یعنی نقطه O روی عمودمنصف پاره خط ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷

CD, AB و همینطور AD و BC باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AH \times BC}{2} \rightarrow 12 = \frac{4 \times BC}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{BC = 6} \rightarrow BH = \frac{BC}{2} \rightarrow \boxed{BH = 3}$$



باید دایره به مرکز A و با شعاع ۵ رسم کنیم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

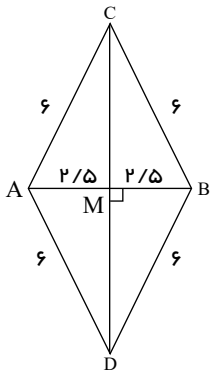
$$\left. \begin{array}{l} \hat{AOM} = \hat{BOM} \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ OM = \text{مشترک} \end{array} \right\} \triangle OAM \cong \triangle OBM \rightarrow \begin{cases} MA = MB \\ OA = OB \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x + 1 = 2x - 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + 2y = -1 \end{cases} +$$

$$-y = -1 \rightarrow \boxed{y = 1}, \boxed{x = 3} \rightarrow \boxed{x + y = 4}$$

نقاطی که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشند، روی عمودمنصف AB قرار دارند و مطابق شکل دو نقطه C و D داریم که فاصله آن از دو نقطه A و B، ۶ سانتی متر است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

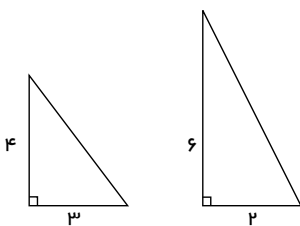


اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد، آن گاه قطرهای آن منصف یکدیگرند و برعکس (قضیه شرطی).

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱

تشریح گزینه‌های دیگر:

گزینه ۱: دو مثلث قائم‌الزاویه زیر هم مساحت هستند اما هم‌نهیستند:



گزینه ۲: اگر مثلث دو زاویه برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین است، اما همواره متساوی‌الاضلاع نیست.

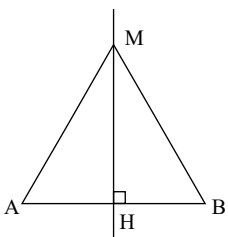
گزینه ۴: اگر چهارضلعی قطرهایش عمودمنصف یکدیگر باشند، لوزی است اما همواره مربع نیست.

نقطه‌ای که از همه رأس‌های چهارضلعی به یک فاصله است محل برخورد عمود منصف‌های اضلاع چهارضلعی است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳

$$\text{نقطه } M \text{ روی عمود منصف } AB \text{ است.} \rightarrow AM = BM \rightarrow 3x + 2 = 6x - 1 \rightarrow 3 = 3x \rightarrow x = 1$$



$$\rightarrow AM = BM = 5, MH = x + 3^{x=1} = 4$$



$$\rightarrow AH^2 + MH^2 = AM^2 \rightarrow AH^2 + 4^2 = 5^2 \rightarrow AH = 3, AB = 2AH \rightarrow AB = 6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۴

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'BC} \rightarrow \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{BC \cdot A'H}{2} \rightarrow AH = A'H$$

پس BH عمود منصف AA' است و نقطه B و C دو نقطه از عمود منصف هستند و از دو سر پاره خط AA' فاصله یکسانی دارند، بنابراین:

$$\begin{cases} AB = A'B \rightarrow \hat{BAH} = \hat{BA'H} \\ \text{و} \\ AC = A'C = \hat{CAH} = \hat{CA'H} \end{cases} \rightarrow \hat{BAC} = \hat{BA'C}, AB + A'C = A'B + AC, \frac{AB}{AC} = \frac{A'B}{A'C}$$

$$AB = A'B, AC = A'C, BC = \text{مشترک} \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'BC \rightarrow \hat{ABC} = \hat{A'BC}$$

چون سه ضلع مثلث ABC بر دایره مماس هستند پس مرکز دایره از هر سه ضلع به یک فاصله است و بنابراین محل برخورد نیمسازهای داخلی هر سه زاویه A و B و C یا هر دو زاویه دلخواه از مثلث ABC است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵

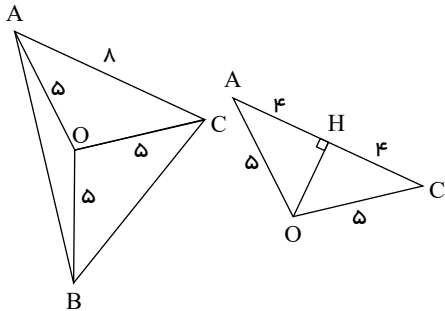
نقطه O روی عمودمنصف اضلاع AB و AC و همچنین BC قرار دارد. بنابراین نقطه O از سه رأس مثلث به یک فاصله است یعنی:

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۶

$$OA = OB = OC$$

$$\rightarrow \begin{cases} OA = OB \\ OB = OC \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 1 = y - 2 \\ y - 2 = y - x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} OA = OB = OC = 5 \\ AC = 8 \end{cases}$$

و در $\triangle OAC$ داریم:



$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \rightarrow 5^2 = OH^2 + 3^2 \rightarrow OH = 4$$

$$\rightarrow S_{\triangle OAC} = \frac{AC \times OH}{2} = \frac{8 \times 4}{2} \Rightarrow S_{\triangle OAC} = 16$$

AD نیمساز زاویه A است و از دو ضلع زاویه به یک فاصله است: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۷

$$\begin{cases} \hat{DAH} = \hat{DAH'} \\ DH = DH' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y + 10 = 2y \rightarrow y = 10 \\ x^2 + 2x = 5x + 4 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow x = -1 \text{ غیر قابل قبول, } x = 4 \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

هر نقطه روی عمودمنصف پاره خط AB از دو سر پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه روی نیمساز زاویه xy از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۸

نقطه C از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است پس باید روی عمودمنصف پاره خط AB باشد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۹

از طرفی چون $AC = BC$ پس مثلث ABC متساوی الساقین است. نیمساز زاویه رأس (C) و عمودمنصف بر هم منطبق اند.

پس تنها گزینه ۲، می تواند نادرست باشد.

نقطه M از A و B به یک فاصله است \leftarrow نقطه M روی عمودمنصف AB قرار دارد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۰

نقطه M از B و C به یک فاصله است \leftarrow نقطه M روی عمودمنصف BC قرار دارد.

بنابراین نقطه M محل برخورد عمودمنصف های AB و BC است.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴

۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴

۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴