نام آزمون: یازدهم فصل ۱ درس ۲

تلفن پنج رقمی: ۰۵۱-۳۸۱۱۷

تلگرام : riazi_jazb

مهدی شاکریان

معادله ی درجه ی دوم

۱ حاصل‌ضرب جواب‌های مثبت معادلهٔ $(x^۲-x)^۲-۲۶(x^۲-x)+۱۲۰=۰$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۱۵ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۲ به ازای کدام مقادیر a، معادله‌ی $x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x=۴$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است؟ خارج از کشور- ۱۳۹۴

۱) $(-\infty,-۴)-\{-۵\}$ ۲) $(-\infty,-۴)$ ۳) $(۴,+\infty)$ ۴) $(۴,+\infty)-\{۵\}$

۳ به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$، برابر ۶ می باشد؟ سراسری- ۱۳۹۳

۱) $-\frac{۹}{۵}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۹}{۵}, ۱$ ۴) $-۱, \frac{۹}{۵}$

۴ معادلهٔ $x+\frac{a}{x+۳}=۴$ دارای دو ریشهٔ α و β است که در رابطهٔ $\alpha=۲\beta+۷$ صدق می‌کنند، مقدار a کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) -۶ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) -۴

۵ اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-bx+c=۰$ برابر $۱\pm\sqrt{۳}$ باشند، آن‌گاه حاصل $b^۲-c^۲$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۴ ۴) ۸

۶ اگر جواب معادلهٔ $(m-۱)x^۲-(۲m+۱)x+m=۵$ شیب‌های دو خط عمود بر هم باشند، مجموع مربعات جواب‌های این معادله کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $\frac{۵۱}{۴}$ ۲) $\frac{۵۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵۵}{۴}$ ۴) $\frac{۵۷}{۴}$

۷ ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $۲x^۲-۳x-۱=۰$، یک واحد کمتر است؟ سراسری- ۱۳۹۴

۱) $x^۲-۳x+۱=۰$ ۲) $x^۲+۳x+۱=۰$ ۳) $x^۲-۵x+۲=۰$ ۴) $x^۲+۵x+۲=۰$

۸ اگر حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $(m-۱)x^۲+۶x+۴=m$ برابر ۲ باشد، آن‌گاه مجموع مربعات این ریشه‌ها، کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

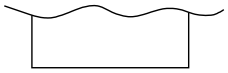
۱) ۲۴ ۲) ۶ ۳) ۳۲ ۴) ۱۶

تابع درجه ی دوم

۹ به‌ازای کدام مجموعه مقادیر m، سهمی $y=(-m+۱)x^۲+۲(m-۳)x-۱$ همواره پایین محور x ها قرار دارد؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $۲<m<۵$ ۲) $-۲<m<۵$ ۳) $m<۵$ ۴) $-۲<m$

۱۰ می‌خواهیم با ۴۴۰ متر تور سیمی در ساحل دریا محوطهٔ مستطیل شکلی را حصار بکشیم. در این صورت بیشترین مساحت محوطهٔ تور کشیده شده کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹



۱) ۲۴۰۰۰ ۲) ۴۲۰۰۰
۳) ۱۲۱۰۰ ۴) ۲۴۲۰۰

۱۱ نمودار کدام سهمی زیر از نقاط $(-۱,۲)$ و $(۱,۰)$ گذشته و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -۱ قطع می‌کند؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $y=۲x^۲-x-۱$ ۲) $y=-۲x^۲+۳x-۱$ ۳) $y=x^۲-۲x+۱$ ۴) $y=x^۲-۲x$

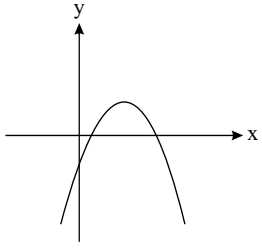
۱۲ سهمی $y=f(x)$، محور x ها را در نقاطی به طول -۱ و ۵ قطع می‌کند و خط $y=۱۸$ بر آن مماس است. مقدار $f(۷)$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۳۲ ۲) -۳۲ ۳) ۱۶ ۴) -۱۶

۱۳ نقطهٔ $S\left(\frac{۳}{۴},-\frac{۱}{۸}\right)$ رأس یک سهمی است. اگر معادلهٔ خط گذرنده از رأس و یکی از صفرهای این سهمی $۲x+۴y=۱$ باشد، عرض نقطهٔ برخورد سهمی با محور y ها کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) -۳ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۴ شکل روبه‌رو، نمودار سهمی $y=ax^۲+bx+c$ است. کدام گزینه درست است؟ قلم چی- ۱۳۹۹



۱) $ac<۰\ ,\ ab>۰$
۲) $ac<۰\ ,\ ab<۰$
۳) $ac>۰\ ,\ ab>۰$
۴) $ac>۰\ ,\ ab<۰$

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$x^۲ - x = t \to t^۲ - ۲۶t + ۱۲۰ = ۰ \to (t-۶)(t-۲۰) = ۰$

$$\begin{cases} t-۶=۰ \to x^۲-x-۶=۰ \to (x-۳)(x+۲)=۰ \to \begin{cases} x=۳ \\ x=-۲ \end{cases} \\ t-۲۰=۰ \to x^۲-x-۲۰=۰ \to (x-۵)(x+۴)=۰ \to \begin{cases} x=۵ \\ x=-۴ \end{cases} \end{cases}$$

حاصلضرب جواب‌های مثبت $= ۳ \times ۵ = ۱۵$

۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$x^۳ + (a-۱)x^۲ + (۴-a)x - ۴ = ۰$

چون جمع ضرایب این معادله صفر است پس حتماً یک ریشه‌ی معادله $x = ۱$ **است و معادله بر** $x - ۱$ **بخش‌پذیر است.**

$$\begin{array}{r|l} x^۳ + (a-۱)x^۲ + (۴-a)x - ۴ & x-۱ \\ \hline -x^۳ + x^۲ & x^۲ + ax + ۴ \\ \hline ax^۲ + (۴-a)x - ۴ & \\ -ax^۲ + ax & \\ \hline ۴x - ۴ & \\ -۴x + ۴ & \\ \hline \text{صفر} & \end{array}$$

بنابراین عبارت درجه‌ی سوم به صورت $(x-۱)(x^۲+ax+۴)=۰$ **تجزیه می‌شود یک ریشه‌ی این معادله** $x = ۱$ **است پس معادله‌ی درجه‌ی دوم در پرانتز دوم باید دارای ۲ ریشه‌ی متمایز مثبت باشد (چون سوال گفته معادله دارای ۳ ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد)**

$\Delta > ۰ \to b^۲ - ۴ac > ۰ \to a^۲ - ۱۶ > ۰ \to a^۲ > ۱۶ \to a > ۴$ یا $a < -۴ \quad (I)$

$S > ۰ \to -\frac{b}{a} > ۰ \to -a > ۰ \to a < ۰ \quad (II)$

$P > ۰ \to \frac{c}{a} > ۰ \to ۴ > ۰$ همواره برقرار است (III)

از اشتراک I, II, III **به جواب** $a < -۴$ **می‌رسیم.**

توجه نمایید که به‌ازای $a = -۵$ **معادله دارای دو ریشه خواهد بود.**

۳ ۱ ۲ ۳ ۴ **اگر** x' **و** x'' **ریشه های معادله باشند داریم:**

$x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{m+۳}{m}$, $x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{۵}{m}$

فرض مسأله: $x'^۲ + x''^۲ = ۶ \Rightarrow (x'+x'')^۲ - ۲x'x'' = ۶ \Rightarrow (\frac{m+۳}{m})^۲ - \frac{۱۰}{m} - ۶ = ۰$

$$\Rightarrow \frac{m^۲+۶m+۹}{m^۲} - \frac{۱۰}{m} - ۶ = ۰ \xrightarrow{\times m^۲} m^۲ + ۶m + ۹ - ۱۰m - ۶m^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow ۵m^۲ + ۴m - ۹ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} m = ۱ \xrightarrow{\text{معادله}} x^۲ - ۴x + ۵ = ۰ : \quad \Delta = ۱۶ - ۲۰ < ۰ \text{ غ ق ق} \\ m = -\frac{۹}{۵} \to \text{با توجه به گزینه ها } \Delta > ۰ \text{ است و نیازی به چک کردن گزینه ها نیست} \end{cases}$$

۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$x + \frac{a}{x+۳} = ۴ \xrightarrow[x \neq -۳]{\times(x+۳)} x(x+۳) + a = ۴(x+۳)$$

$$x^۲ + ۳x + a = ۴x + ۱۲ \Rightarrow x^۲ - x + (a - ۱۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = ۱ \\ \alpha\beta = a - ۱۲ \end{cases}$$

$\alpha = 2\beta + 7 \xrightarrow{+\beta} \alpha + \beta = 3\beta + 7 \Rightarrow 1 = 3\beta + 7$

$\Rightarrow 3\beta = -6 \Rightarrow \beta = -2 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند.}} -2 + \frac{a}{-2+3} = 4 \Rightarrow -2 + a = 4 \Rightarrow a = 6$

۵ ۱ ۲ ۳ **۴** ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم را α و β در نظر می‌گیریم؛ داریم:

$\alpha = \sqrt{3} + 1 \ , \beta = \sqrt{3} - 1$

مجموع ریشه‌ها : $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \to \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1 = -\frac{-b}{1} \to b = 2\sqrt{3}$

ضرب ریشه‌ها : $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \to (\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = \frac{c}{1} \to 3 - 1 = c \to c = 2$

$\to b^2 - c^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2^2 = 12 - 4 \to b^2 - c^2 = 8$

۶ ۱ ۲ ۳ **۴** ۱ اگر جواب‌های معادله $(m-1)x^2 - (2m+1)x + m - 5 = 0$ را β, α در نظر می‌گیریم که شیب‌های دو خط عمود برهم هستند داریم:

$\alpha\beta = -1 \ , \ \alpha\beta = \frac{c}{a} \to -1 = \frac{m-5}{m-1} \to -m + 1 = m - 5 \to 1 + 5 = m + m \to m = 3 \to 2x^2 - 7x - 2 = 0$

در نتیجه:

مجموع مربعات ریشه‌ها : $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (\frac{-(-7)}{2})^2 - 2(\frac{-2}{2}) = \frac{49}{4} + 2 \Rightarrow S^2 - 2P = \frac{57}{4}$

۷ ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد باید جای a و c را عوض کنیم و برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد باید x را به $x + k$ تبدیل کنیم.

$2x^2 - 3x - 1 = 0 \xrightarrow[\text{جای } a,c \text{ عوض}]{\text{معکوس}} -x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow[x \to x+1]{\text{یک واحد کمتر}} -(x+1)^2 - 3(x+1) + 2 = 0$

$\to -x^2 - 2x - 1 - 3x - 3 + 2 = 0 \to x^2 + 5x + 2 = 0$

۸ ۱ ۲ **۳** ۴

$(m-1)x^2 + 6x + 4 - m = 0 \to$ حاصل ضرب ریشه‌ها $P = \frac{4-m}{m-1} = 2$

$\to 4 - m = 2m - 2 \to 6 = 3m \to \boxed{m = 2}$

$\to x^2 + 6x + 2 = 0 \to$ ریشه‌ها $= \alpha, \beta \to \begin{cases} \text{ضرب ریشه‌ها} : S = -6 \\ \text{جمع ریشه‌ها} : P = 2 \end{cases}$

مجموع مربعات ریشه‌ها $= \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-6)^2 - 2(2) = 36 - 4 \to \boxed{\alpha^2 + \beta^2 = 32}$

۹ ۱ **۲** ۳ ۴ سهمی همواره پایین محور x ها قرار دارد یعنی: $a < 0 \ , \ \Delta < 0$

$\Delta < 0 \to \Delta = (2(m-3))^2 - 4(-m+1)(-1) = 4(m^2 - 6m + 9) + 4(-m+1)$

$\to \Delta = 4m^2 - 28m + 40 < 0 \to 4(m^2 - 7m + 10) < 0 \to m^2 - 7m + 10 < 0 \to (m-2)(m-5) < 0$

m	$-\infty$	2		5	$+\infty$
$m^2 - 7m + 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

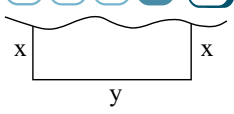
$\to 2 < m < 5$

ج

$a < 0 \to -m + 1 < 0 \to 1 < m$

$\left.\begin{matrix} 2 < m < 5 \\ 1 < m \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 2 < m < 5$

۱۰ ۱ ۲ ۳ **۴**



$2x + y = 440 \to y = 440 - 2x$

مساحت $= xy = x(440 - 2x) = -2x^2 + 440x$

طول رأس سهمی $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-440}{2(-2)} \Rightarrow x_s = 110$

$\to$ مساحت حداکثر $S_{\max} = -2(110)^2 + 440 \times 110 = 24200$

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ **۱**

نمودار سهمی را به‌صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$(-1, 2) \in f \to a(-1)^2 + b(-1) + c = 2 \to a - b + c = 2$

$(۱,۰) \in f \rightarrow a(۱)^۲ + b(۱) + c = ۰ \rightarrow a + b + c = ۰$

$(۰,۱) \in f \rightarrow a(۰)^۲ + b(۰) + c = -۱ \rightarrow c = -۱$

در نتیجه:

$$\rightarrow \begin{cases} a - b - ۱ = ۲ \\ a + b - ۱ = ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - b = ۳ \\ a + b = ۱ \end{cases} + \Rightarrow ۲a = ۴ \rightarrow a = ۲ \ , \ b = -۱$$

$\rightarrow f(x) = y = ۲x^۲ - x - ۱$

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴ راه حل اول:

معادله سهمی را به‌صورت $y = f(x) = ax^۲ + bx + c$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$(-۱,۰) \in f \rightarrow a(-۱)^۲ + b(-۱) + c = ۰ \rightarrow a - b + c = ۰$

$(۵,۰) \in f \rightarrow a(۵)^۲ + b(۵) + c = ۰ \rightarrow ۲۵a + ۵b + c = ۰$

رأس سهمی: $x_s = \dfrac{-۱ + ۵}{۲} = ۲ \rightarrow x_s = ۲ \ , y_s = ۱۸ \rightarrow S(۲,۱۸)$

$(۲,۱۸) \in f \rightarrow a(۲)^۲ + b(۲) + c = ۱۸ \rightarrow ۴a + ۲b + c = ۱۸$

$$\begin{cases} a - b + c = ۰ \rightarrow c = b - a \\ ۲۵a + ۵b + c = ۰ \\ ۴a + ۲b + c = ۱۸ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۲۵a + ۵b + b - a = ۰ \\ ۴a + ۲b + b - a = ۱۸ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۲۴a + ۶b = ۰ \\ ۳a + ۳b = ۱۸ \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} ۴a + b = ۰ \\ -a - b = -۶ \end{cases} + \Rightarrow ۳a = -۶ \rightarrow a = -۲ \ , \ b = ۸ \ , \ c = ۱۰$$

در نتیجه:

$\rightarrow f(x) = -۲x^۲ + ۸x + ۱۰$

$f(۷) = -۲(۷)^۲ + ۸(۷) + ۱۰ = -۹۸ + ۵۶ + ۱۰ \rightarrow f(۷) = -۳۲$

راه حل دوم:

سهمی محور x ها را در -۱ و ۵ قطع می‌کند، پس ضابطهٔ آن به‌صورت روبه‌رو است:

$f(x) = a(x + ۱)(x - ۵)$

چون خط $y = ۱۸$ بر سهمی مماس است، عرض رأس سهمی ۱۸ است. از طرفی طول رأس سهمی، میانگین ریشه‌های سهمی است.

$x_S = \dfrac{-۱ + ۵}{۲} = ۲ \Rightarrow f(۲) = ۱۸ \Rightarrow -۹a = ۱۸$

$\Rightarrow a = -۲ \Rightarrow f(x) = -۲(x + ۱)(x - ۵)$

$\Rightarrow f(۷) = -۲(۸)(۲) = -۳۲$

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴ ضابطهٔ سهمی موردنظر به‌صورت زیر خواهد بود:

$y = a(x - \dfrac{۳}{۴})^۲ - \dfrac{۱}{۸}$

صفرهای سهمی نقطه‌های به عرض صفر روی محور x ها می‌باشند که خط $۲x + ۴y = ۱$ از یکی از این نقاط می‌گذرد. برای پیدا کردن مختصات آن نقطه، کافی است در معادله $y = ۰$ را قرار دهیم که در این صورت به نقطهٔ $(\dfrac{۱}{۲}, ۰)$ می‌رسیم. این نقطه در ضابطهٔ سهمی صدق می‌کند و داریم:

$a(\dfrac{۱}{۲} - \dfrac{۳}{۴})^۲ - \dfrac{۱}{۸} = ۰ \Rightarrow \dfrac{a}{۱۶} - \dfrac{۱}{۸} = ۰ \Rightarrow a = ۲$

$\Rightarrow$ ضابطهٔ سهمی: $y = ۲(x - \dfrac{۳}{۴})^۲ - \dfrac{۱}{۸} = ۲x^۲ - ۳x + ۱$

عرض از مبدأ این سهمی ۱ است.

۱۴ ۱ ۲ ۳ **۴** دهانه سهمی رو به پایین است یعنی: $a < 0$

سهمی محور yها را در نقطه‌ای پایین مبدأ مختصات قطع می‌کند، یعنی: $c < 0$

رأس سهمی در ناحیهٔ اول محورهای مختصات است، یعنی: $\frac{-b}{2a} > 0$ و چون $a < 0$ پس: $b > 0$

داریم: $ab < 0$, $ac > 0$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴	۱۳	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴	۱۴	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۱۱	۱	۲	۳	۴					
۴	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۲	۱	۲	۳	۴					