



مهدی شاکریان

نام آزمون: یازدهم فصل ۱ درس ۱

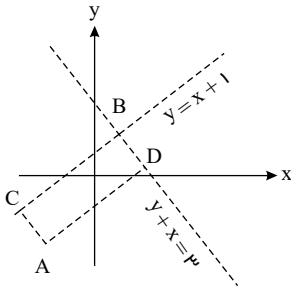
تلفن پنج رقمی: ۰۵۱-۳۸۱۱۷

تلگرام: riazi_jazb

مفاهیم مربوط به نقطه

۱) معادله دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع برابر $BC: y - x = 1$ و $BD: y + x = 3$ است. اگر نقطه $A(-1, -2)$ یک رأس این متوازی‌الاضلاع باشد، طول قطر CD کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹



- ① $\sqrt{5}$
 ② $2\sqrt{5}$
 ③ ۴
 ④ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

۲) مرکز دایره به مختصات $O(\alpha, \beta)$ روی خط $y - 2x = 0$ قرار دارد و این دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد. اگر مساحت دایره 20π باشد. حاصل $\alpha + 2\beta$ کدام می‌تواند باشد؟

قلم چی- ۱۳۹۹

- ① ۸ ② ۶ ③ ۱۰ ④ -۶

۳) نقاط $A(2, k)$ ، $B(-1, -1)$ و $C(4, 1)$ رئوس یک مثلث هستند. اگر طول میانه BM برابر با ۵ باشد، عرض نقطه A کدام می‌تواند باشد؟

قلم چی- ۱۳۹۹

- ① -۵ ② -۷ ③ -۹ ④ -۱۱

۴) نقطه $A(7, 6 - \sqrt{5})$ و نقطه A' دو سر قطر یک مربع هستند. اگر نقطه $(9, 6)$ وسط AA' باشد، مساحت این مربع کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

- ① ۳۶ ② ۱۸ ③ ۹ ④ ۱۴

۵) دو خط به معادله‌های $2y + x = 4$ و $3y + 1 = 2x$ قطرهای یک دایره‌اند. اگر نقطه $(-1, 4)$ روی این دایره قرار داشته باشد، محیط آن کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

- ① 18π ② $3\sqrt{2}\pi$ ③ $6\sqrt{2}\pi$ ④ $12\sqrt{2}\pi$

۶) در دایره‌ای با شعاع‌های برابر که مختصات مراکز آن‌ها $(2, -1)$ و $(0, 3)$ است، در یک نقطه برهم مماس‌اند. شعاع هریک از دایره‌ها کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

- ① $\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{10}$



قلم چی- ۱۳۹۹

۷ سه نقطه $A(4, -2)$ ، $B(-1, k)$ و $C(3, 1)$ روی یک خط قرار دارند. طول پاره خط AB کدام است؟

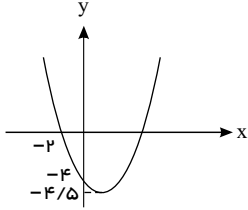
$\sqrt{236}$ (۴)

$\sqrt{130}$ (۳)

$5\sqrt{5}$ (۲)

$5\sqrt{10}$ (۱)

قلم چی- ۱۳۹۹



۸ شکل زیر، نمودار سهمی $y = f(x)$ است. قدرمطلق اختلاف ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ کدام است؟

۵ (۲)

۲ (۱)

۸ (۴)

۶ (۳)

قلم چی- ۱۳۹۹

۹ خط $4x + 2y - 8 = 0$ محورهای مختصات را دو نقطه A و B قطع می‌کند. فاصله مبدأ مختصات تا وسط پاره خط AB کدام است؟

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۲ (۱)

۱۰ دو خط به معادله‌های $y + x = 3$ و $3y + 1 = 2x$ قطرهای یک دایره‌اند. اگر نقطه $(-1, 0)$ روی این دایره قرار داشته باشد

مساحت این دایره چند π است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

۱۲ (۴)

۸ (۳)

۱۰ (۲)

۲۰ (۱)

قلم چی- ۱۳۹۹

۱۱ اگر نقطه $A'(k, -3k + 1)$ قرینه نقطه $A(5, m - 1)$ نسبت به مبدأ مختصات باشد، آنگاه مقدار $m - k$ کدام است؟

-۲۰ (۴)

۲۰ (۳)

-۱۰ (۲)

۱۰ (۱)

خارج از کشور- ۱۳۹۲

۱۲ مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2, 5)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ کدام است؟

۷٫۵ (۴)

۷ (۳)

۶٫۵ (۲)

۶ (۱)

۱۳ اگر $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ، $B(-4, -1)$ و $C(-3, -3)$ ، سه رأس مستطیل $ABCD$ باشند، رأس D مستطیل روی کدام یک از خطوط زیر واقع

قلم چی- ۱۳۹۹

است؟

$y = 2x - \frac{3}{2}$ (۴)

$y = x + \frac{3}{2}$ (۳)

$6y = 4x - 11$ (۲)

$3y = 4x + 8$ (۱)

بررسی اوضاع نسبی دو خط

۱۴ نقطه‌ی $A(7, 6)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $3y + 4x = 8$ و $2y - 3x = 11$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

سراسری- ۱۳۹۰

(۱, ۵) (۴)

(۳, ۵) (۳)

(۳, ۴) (۲)

(۴, ۳) (۱)



۱۵) از برخورد خطوط $y + 2x = 1$ ، $2y - x = 2$ و $y + 4 = 3x$ با یکدیگر مثلثی پدید می‌آید. مساحت این مثلث کدام است؟ قلم‌چی-۱۳۹۹

۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

۳) ۱

۲) $\frac{5}{2}$

۱) ۵

۱۶) مجموع شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر ۲ است. مقدار مثبت شیب این خطوط کدام است؟ قلم‌چی-۱۳۹۹

۴) $2 + \sqrt{3}$

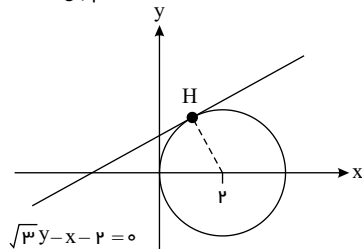
۳) $\sqrt{2} - 1$

۲) ۱

۱) $\sqrt{2} + 1$

نوشتن معادله ی خط

۱۷) خطی به معادله $\sqrt{3}y - x - 2 = 0$ در نقطه H بر دایره‌ای به مرکز $O(2, 0)$ مطابق شکل مماس شده است. حاصل ضرب طول و عرض نقطه H کدام است؟ قلم‌چی-۱۳۹۹



۱) $\sqrt{3}$

۲) $2\sqrt{3}$

۳) $3\sqrt{3}$

۴) $4\sqrt{3}$

۱۸) مختصات دو سر پاره‌خط AB به صورت $A(3, 8)$ و $B(-1, 6)$ است. نقطه C روی عمود منصف AB قرار دارد و طول آن ۲ واحد از عرض آن کمتر است. عرض نقطه C کدام است؟ قلم‌چی-۱۳۹۹

۴) ۱۴

۳) ۵

۲) $\frac{14}{3}$

۱) $\frac{13}{3}$

۱۹) از نقطه A با مختصات $\begin{cases} a \\ 2a + 1 \end{cases}$ خطی موازی خط $y = 2x + 5$ رسم می‌کنیم تا به نقطه B با مختصات $\begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$ برسیم. رابطه بین α و β کدام است؟ قلم‌چی-۱۳۹۹

۴) $\beta = \frac{\alpha + 1}{2}$

۳) $\beta = \frac{\alpha - 1}{2}$

۲) $\alpha = \frac{\beta + 1}{2}$

۱) $\alpha = \frac{\beta - 1}{2}$

۲۰) کدام خط زیر بر خط $3x + 2y = 4$ عمود است و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند؟ قلم‌چی-۱۳۹۹

۴) $3y + 2x = 2$

۳) $3y + 2x = -4$

۲) $3y - 2x = 4$

۱) $3y - 2x = -4$

۲۱) نقاط $A \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$ و $B \begin{cases} -2 \\ 2 \end{cases}$ ، $C \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$ رئوس مثلث ABC هستند. خط شامل میانه BN ، محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟ قلم‌چی-۱۳۹۹

۴) $\frac{3}{2}$

۳) $\frac{4}{3}$

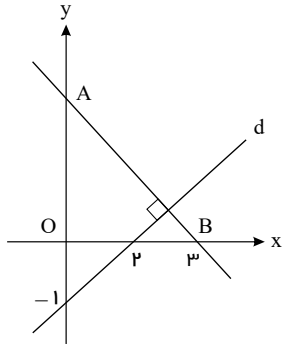
۲) $\frac{2}{3}$

۱) $\frac{2}{4}$

۲۲ در شکل روبه‌رو، مساحت مثلث OAB کدام است؟

- ۱) ۱۸
۲) ۹
۳) ۱٫۵
۴) ۴

قلم چی- ۱۳۹۹



فاصله‌ها

۲۳ دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $۲y + x = ۶$ و $۲x - y = ۷$ و یک رأس آن نقطه‌ی $A(۸, ۵)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

خارج از کشور- ۱۳۹۰

- ۱) ۷٫۲ ۲) ۹٫۶ ۳) ۱۱٫۴ ۴) ۱۲٫۸

۲۴ نقطه‌ی $A(۳, -۱)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $۲y - x = ۵$ است. مساحت این مربع، کدام است؟

خارج از کشور- ۱۳۹۳

- ۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

۲۵ دو خط $L_1: ۲x + y = ۱$ و $L_2: x - ۲y = ۰$ بر دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, -۲\alpha)$ مماسند، فاصله‌ی مرکز دایره تا نقطه‌ی تقاطع این دو خط کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

- ۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{\frac{۵}{۲}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۲}{۵}}$ ۴) $\sqrt{۵}$

۲۶ نقطه‌ی B ، قرینه‌ی نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} a \\ ۴ \end{bmatrix}$ نسبت به نقطه‌ی $O = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$ است و فاصله‌ی نقطه‌ی B از خط $x + ۲y = ۳$ برابر $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ است. مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

- ۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۲۲ ۴) -۱۰

۲۷ خط $۳x = ۴y$ بر دایره‌ای به شعاع ۲ واحد که مرکز آن روی خط $x + ۲y = ۰$ قرار دارد، مماس است. اگر مختصات مرکز دایره $O(a, b)$ باشد، حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

- ۱) ۶ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۵



۲۸ در یک لوزی قطر بزرگ دو برابر قطر کوچک است. اگر معادله قطر کوچک $3x - 4y + 1 = 0$ و یک رأس لوزی $(-1, 2)$ باشد، محیط لوزی کدام است؟
قلم چی- ۱۳۹۹

- ① $4\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ ۴ ④ ۲

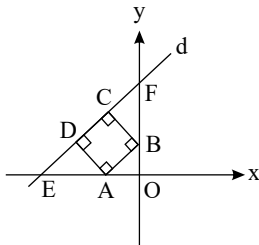
۲۹ خط $3x = 4y$ بر دایره‌ای به شعاع ۲ واحد که مرکز آن روی خط $x + 2y = 0$ قرار دارد، مماس است. اگر مختصات مرکز دایره $O(a, b)$ باشد، حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟
قلم چی- ۱۳۹۹

- ① ۶ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ ۵

۳۰ خط $3x - 4y = k$ بر دایره به مرکز $(2, -1)$ مماس است. اگر مساحت دایره 9π باشد، مجموع مقادیر k کدام است؟
قلم چی- ۱۳۹۹

- ① ۲۲ ② ۲۴ ③ ۲۸ ④ ۳۰

۳۱ در شکل مقابل $ABCD$ مربع است. اگر $A(-1, 0)$ و $B(0, 1)$ باشد، کدام نقطه زیر روی خط d (گذرنده از C و D) قرار دارد؟
قلم چی- ۱۳۹۹



- ① $(-2, -3)$
② $(-2, -11)$
③ $(-2, 1)$
④ $(-2, 5)$

۳۲ خط $3x - 4y = k$ بر دایره‌ای به مرکز $O(2, -1)$ و شعاع ۳ مماس است. مجموع مقادیر k کدام است؟
قلم چی- ۱۳۹۹

- ① ۲۰ ② ۳۰ ③ -20 ④ -30

۳۳ اگر دو ضلع مستطیلی بر دو خط به معادلات $4y = 3x - 2$ و $4x + 3y = 6$ قرار داشته باشند و مختصات رأسی از این مستطیل که روی این دو ضلع قرار ندارد، برابر $(3, 3)$ باشد، مساحت این مستطیل کدام است؟
قلم چی- ۱۳۹۹

- ① $\frac{3}{2}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ ۳ ④ $\frac{3}{5}$

۳۴ اگر فاصله نقطه $A(2, -3)$ از خط $12x + 5y = 15$ برابر $7a + 1$ باشد، مقدار a کدام است؟
قلم چی- ۱۳۹۹

- ① $\frac{49}{13}$ ② $\frac{1}{13}$ ③ $-\frac{49}{13}$ ④ $-\frac{1}{13}$

۳۵ دو ضلع یک مستطیل بر دو خط $y - 2x = 3$ و $4x + 8y - 4 = 0$ واقع‌اند. اگر نقطه A یکی از رئوس این مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟
قلم چی- ۱۳۹۹

- ① ۱۰ ② ۵ ③ ۱۵ ④ $7,5$

قلم چی - ۱۳۹۹

 ۳۶ قرینه نقطه $A(1, -2)$ نسبت به خط $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$ را B می‌نامیم. طول پاره خط AB کدام است؟

- ۱۰ ① ۸ ② ۶ ③ ۴ ④

سراسری - ۱۳۹۲

 ۳۷ دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

- ۹ ① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{25}{8}$ ③ $\frac{25}{4}$ ④

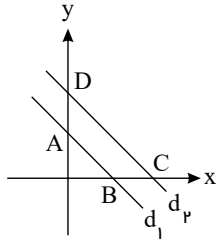
 ۳۸ دو ضلع مقابل متوازی الاضلاع $ABCD$ روی دو خط $4x + ky = 2$ و $8x + 6y = 6$ قرار دارند. اگر نقاط A و B محل‌های برخورد خط

قلم چی - ۱۳۹۹

 $8x + 6y = 6$ با محورهای مختصات باشند، مساحت این متوازی الاضلاع کدام است؟

- ۲ ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{13}{10}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④

قلم چی - ۱۳۹۹

 ۳۹ در شکل زیر $d_1: x + y = 2$ و $d_2: x + y = 4$ است. در ذوزنقه $ABCD$ مجموع دو قاعده چند برابر ارتفاع آن است؟


- ۶ ① ۳ ② $6\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④

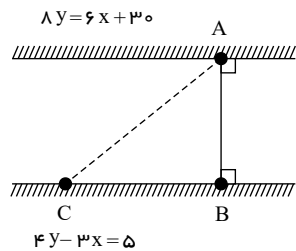
 ۴۰ دو ضلع مربعی روی دو خط $3x + 4y - k = 0$ و $6x + 8y = 50$ قرار دارند. اگر محیط مربع برابر $\frac{8k}{5}$ باشد، مقدار k^2 کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۹

- ۲۵ ① $\frac{625}{9}$ ② ۶۲۵ ③ ۲۵ ④

 ۴۱ شخصی می‌خواهد از نقطه A بالای رودخانه‌ای به نقطه B در پایین رودخانه برود. جریان آب رودخانه، وی را به نقطه C در ۴ کیلومتری نقطه B

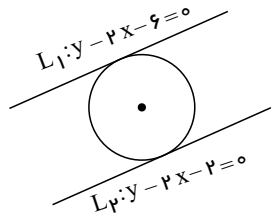
قلم چی - ۱۳۹۹

 هدایت می‌کند. نقطه C چقدر از A فاصله دارد؟ (x و y بر حسب کیلومتر است.)


- $\sqrt{5}$ ① $2\sqrt{5}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ ۲۰ ④



قلم چی- ۱۳۹۹



۴۲) دایره‌ای مطابق شکل، بر دو خط L_1 و L_2 مماس است. مساحت دایره کدام است؟

۴π (۲)

$\frac{2\pi}{5}$ (۴)

$\frac{4\pi}{5}$ (۱)

۵π (۳)

کاربرد رسم شکل در مسائل هندسه ی مختصاتی

۴۳) معادله‌ی سه ضلع یک مثلث $x + y = 1$ ، $y = 2x$ ، و $x = 1$ است. معادله‌ی خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

$y + x = \frac{1}{3}$ (۴)

$y + x = \frac{2}{3}$ (۳)

$x = \frac{2}{3}$ (۲)

$y = \frac{2}{3}$ (۱)

پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

پس متوازی‌الاضلاع یک مستطیل است و طول دو قطر با هم برابر است:

۱ ۲ ۳ ۴ ۲ مرکز دایره روی خط قرار دارد پس داریم:

و دایره از نقطه می‌گذرد پس طول برابر شعاع دایره است.

مساحت

۱ ۲ ۳ ۴ ۳ ابتدا مختصات نقطه وسط پاره‌خط را به دست می‌آوریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۴ نقطه وسط قطر است، پس داریم:

اکنون طول پاره‌خط که قطر مربع است را به دست می‌آوریم:

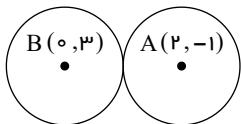
مساحت مربع

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ دو خط به معادله‌های و قطرهای یک دایره‌اند پس محل برخورد آنها مرکز دایره است و داریم:

پس نقطه مرکز دایره است و فاصله این نقطه تا نقطه شعاع دایره است:

محیط دایره

۱ ۲ ۳ ۴ ۶



با توجه به شکل، کافی است فاصله دو مرکز دایره را حساب کنیم و آن را نصف کنیم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۷ چون سه نقطه روی یک خط قرار دارند، داریم:

$$m_{AB} = m_{AC} \rightarrow \frac{-2-k}{4-(-1)} = \frac{-2-1}{4-3} \rightarrow -\frac{k+2}{5} = -\frac{3}{1} \rightarrow k+2=15 \rightarrow \boxed{k=13} \rightarrow B(-1, 13)$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(4+1)^2 + (-2-13)^2} = \sqrt{25 + 225} = \sqrt{250} \rightarrow AB = \sqrt{25 \times 10} \rightarrow \boxed{AB = 5\sqrt{10}}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸ اعداد -2 و β که محل برخورد سهمی با محور x هاست، ریشه‌های معادله درجه دوم می‌باشند، پس:



نقطه $(0, -4)$ در سهمی صدق می‌کند. $y = a(x + 2)(x - \beta)$ معادله سهمی $\rightarrow -4 = 2a(-\beta) \Rightarrow a = \frac{2}{\beta}$

نقطه رأس در سهمی صدق می‌کند. $x = \frac{\beta + (-2)}{2}$ طول رأس سهمی $\rightarrow \frac{\beta - 2}{2}$ نقطه رأس $\rightarrow \frac{\beta - 2}{2}$ $frac{\beta - 2}{2} - 2 = -4, 5$

$$\Rightarrow -4,5 = \frac{2}{\beta} \left(\frac{\beta - 2}{2} + 2 \right) \left(\frac{\beta - 2}{2} - \beta \right)$$

$$\Rightarrow -4,5 = \frac{2}{\beta} \left(\frac{\beta + 2}{2} \right) \left(\frac{-\beta - 2}{2} \right) \Rightarrow -9\beta = -\beta^2 - 4\beta - 4$$

$$\Rightarrow \beta^2 - 5\beta + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \Rightarrow \text{غ ق ق} & (x \text{ به دست می‌آید.}) \\ \beta = 4 \Rightarrow \text{ریشه‌ها} & : x = -2, x = 4 \\ \Rightarrow \text{اختلاف ریشه‌ها} & : 4 - (-2) = 6 \end{cases}$$

1 2 3 4 9

محل تقاطع با محور x ها $4x + 2y - 8 = 0 \xrightarrow{y=0} 4x - 8 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow A \left| \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right.$

محل تقاطع با محور y ها $4x + 2y - 8 = 0 \xrightarrow{x=0} 0 + 2y - 8 = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow B \left| \begin{matrix} 0 \\ 4 \end{matrix} \right.$

نقطه M وسط پاره AB $\rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 0}{2} = 1 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2 \end{cases} \rightarrow M \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right.$

فاصله مبدأ مختصات تا نقطه M $OM = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

مرکز دایره محل تلاقی قطرهای دایره است و داریم: 1 2 3 4 10

$$\begin{cases} y + x = 3 \\ 3y - 2x = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y + 2x = 6 \\ 3y - 2x = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 5y = 5 \rightarrow y = 1, x = 2 \end{matrix}$$

$O(2, 1)$ مرکز دایره است.

فاصله $O(2, 1)$ مرکز دایره تا نقطه $A(-1, 0)$ برابر شعاع دایره است:

$$R = OA = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$\rightarrow S = \pi R^2 \xrightarrow{R=\sqrt{10}} S = 10\pi$$

چون نقطه قرینه نقطه نسبت به مبدأ مختصات است، پس مبدأ مختصات یعنی نقطه وسط پاره خط است و داریم: 1 2 3 4 11

هرگاه مختصات سه رأس یک مثلث را داشته باشیم می‌توانیم مساحت مثلث را از این رابطه حساب کنیم. 1 2 3 4 12

$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$= \frac{1}{2} |2(0 - 2) + 3(2 - 5) + 0(5 - 0)| = \frac{1}{2} |-4 - 9 + 0| = \frac{13}{2} = 6,5$$

در مستطیل قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، بنابراین داریم: 1 2 3 4 13

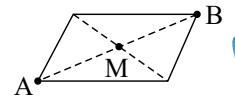
اکنون گزینه‌ها را چک می‌کنیم:



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

مختصات نقطه‌ی A در هیچ‌یک از معادلات دو خط صدق نمی‌کند پس نقطه A روی این دو خط قرار ندارد و چون این دو خط موازی نیستند کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطه‌ی B بدست آید.

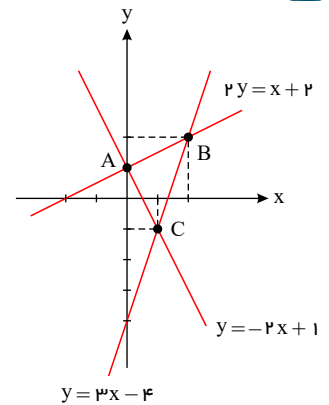
$$\begin{cases} 3y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \rightarrow -17x = 17 \Rightarrow x = -1, y = 4 \Rightarrow B \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \end{vmatrix}$$



می‌دانیم نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB قرار دارد یعنی:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7 - 1}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5$$

سه خط را در یک محور مختصات رسم می‌کنیم و داریم:



شیب دو خط عمود بر هم را و در نظر می‌گیریم و داریم:

در نتیجه:

پاره‌خط (شعاع) بر خط عمود است و داریم:

نقطه محل برخورد و خط است و داریم:

مختصات نقطه وسط پاره‌خط را بدست می‌آوریم:

طول نقطه دو واحد از عرض آن کمتر است پس داریم:

شیب خط برابر است، بنابراین خطی که موازی این خط رسم می‌شود شیبی برابر خواهد داشت و داریم:

پس شیب خط عمود بر خط بالا است که از نقطه می گذرد:

ابتدا مختصات نقطه N (وسط پاره خط AC) را به دست می آوریم و سپس معادله خط BN را می نویسیم:

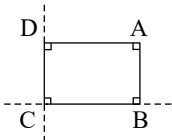
$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3, y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1 - 3}{2} = -1 \Rightarrow N \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$m_{BN} = \frac{y_B - y_N}{x_B - x_N} = \frac{2 - (-1)}{-2 - 3} = -\frac{3}{5}$$

$$\rightarrow \text{معادله خط } BN: y - y_B = m_{BN}(x - x_B) \rightarrow y - 2 = -\frac{3}{5}(x + 2)$$

$$\text{محل تقاطع با محور } x \xrightarrow{y=0} 0 - 2 = -\frac{3}{5}(x + 2) \rightarrow 10 = 3x + 6 \rightarrow 3x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$2y + x = 6 \rightarrow m = -\frac{1}{2}, 2x - y = 7 \rightarrow m' = 2$$



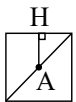
چون شیبها عکس و قرینه ی هم هستند این دو خط بر هم عمودند و نقطه ی A در معادله ی هیچ کدام از این دو خط صدق نمی کند پس می توان شکل را در این گونه در نظر گرفت.

برای یافتن طول و عرض مستطیل کافی است نقطه ی A را از این دو خط بدست آوریم.

$$\left. \begin{array}{l} A \begin{vmatrix} 8 \\ 5 \end{vmatrix}, x + 2y - 6 = 0 \rightarrow AD = \frac{|8 + 10 - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \\ A \begin{vmatrix} 8 \\ 5 \end{vmatrix}, 2x - y - 7 = 0 \rightarrow AB = \frac{|16 - 5 - 7|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = AD \times AB = \frac{48}{5} = 9.6$$

توجه کنید فاصله ی نقطه ی $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ از خط به معادله ی $ax + by + c = 0$ از رابطه ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می آید.

فاصله ی وسط یک قطر مربع از یکی از اضلاع آن برابر نصف ضلع مربع است.



$$A \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}, x - 2y + 5 = 0 \rightarrow AH = \text{نصف ضلع مربع} = \frac{|3 + 2 + 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \rightarrow \text{ضلع مربع} = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

$$\text{مساحت مربع} = (\text{ضلع مربع})^2 = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80$$

توجه کنید فاصله ی نقطه ی $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ از خط به معادله ی $ax + by + c = 0$ از رابطه ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می آید.

چون دو خط بر دایره مماس هستند فاصله هر دو از مرکز دایره یکسان است:

$$O \begin{vmatrix} \alpha \\ -2\alpha \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} L_1: 2x + y - 1 = 0 \rightarrow d = \frac{|2\alpha - 2\alpha - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ L_2: x - 2y = 0 \rightarrow d = \frac{|\alpha - 2(-2\alpha)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5|\alpha|}{\sqrt{5}} \end{array} \right\} \Rightarrow |5\alpha| = 1 \rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{5}$$

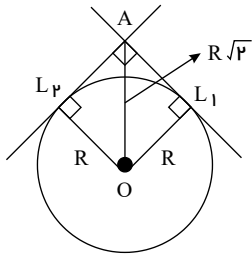
در نتیجه دو مقدار برای O داریم:

$$\rightarrow O \begin{cases} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{cases}, O \begin{cases} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{cases}$$

محل تقاطع دو خط $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2y \rightarrow 2(2y) + y = 1 \rightarrow 5y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{5}, x = \frac{2}{5}$

$$\rightarrow A \begin{cases} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} OA = \sqrt{\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \sqrt{\frac{2}{5}} \\ OA = \sqrt{\left(\frac{2}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$$

با توجه به شیب دو خط L_1 و L_2 می‌توان گفت این دو خط بر یکدیگر عمودند. با وصل کردن نقطه O (مرکز دایره) به نقاط تماس دایره با دو خط L_1 و L_2 مربعی به قطر $R\sqrt{2}$ تشکیل می‌شود که همان فاصله مرکز دایره تا نقطه تقاطع دو خط L_1 و L_2 است. پس کافی است، شعاع دایره را بدست آوریم.



برای این کار فاصله مرکز دایره تا دو خط L_1 و L_2 را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\frac{|\alpha + 4\alpha|}{\sqrt{5}} = \frac{|2\alpha - 2\alpha - 1|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{5} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$OA = R\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

نقطه وسط پاره خط است و داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷

فاصله نقطه از خط برابر شعاع دایره یا واحد است و داریم:

در نتیجه داریم:

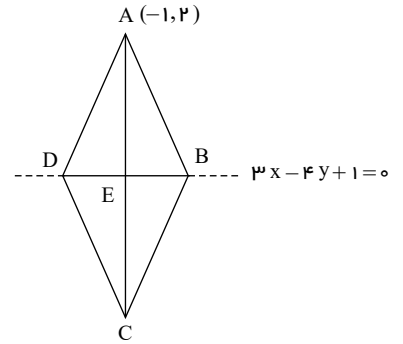
نقطه $A(-1, 2)$ در معادله قطر کوچک $(3x - 4y + 1 = 0)$ صدق نمی‌کند، بنابراین نقطه A روی قطر بزرگ قرار دارد و فاصله $A(-1, 2)$ از خط ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

$3x - 4y + 1 = 0$ ، برابر نصف قطر بزرگ است داریم:

$$AE = \frac{|3(-1) - 4(2) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

(قطر کوچک) $BD \times 2 =$ (قطر بزرگ) $AC \rightarrow BE = 1$

$$\rightarrow AB^2 = AE^2 + BE^2 \rightarrow AB^2 = 2^2 + 1^2 \rightarrow AB = \sqrt{5} \rightarrow \text{محیط لوزی} = 4\sqrt{5}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

$$x + 2y = 0 \rightarrow x = -2y, \text{ مرکز دایره } O(a, b) \Rightarrow a = -2b \rightarrow O(-2b, b)$$

$$3x = 4y \rightarrow 3x - 4y = 0$$

شعاع دایره = فاصله نقطه $O(-2b, b)$ از خط $(3x - 4y = 0)$

$$\rightarrow 2 = \frac{|3(-2b) - 4(b)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \rightarrow 2 = \frac{|10b|}{5} \rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

$$\rightarrow a = \pm 2 \rightarrow a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

$$\text{مساحت دایره } S = \pi R^2 \rightarrow 9\pi = \pi R^2 \rightarrow R = 3$$

فاصله مرکز دایره $O(2, -1, 5)$ تا خط $3x - 4y - k = 0$ برابر شعاع دایره است و داریم:

$$3 = \frac{|3(2) - 4(-1, 5) - k|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \rightarrow 3 = \frac{|12 - k|}{5} \rightarrow |k - 12| = 15$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow \begin{cases} k - 12 = 15 \rightarrow k = 27 \\ k - 12 = -15 \rightarrow k = -3 \end{cases} \rightarrow \text{مجموع مقادیر } : 27 + (-3) = 24$$

از آنجایی که ABCD مربع است، شیب خط d با شیب پاره خط AB برابر است (با خط d موازی است):

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{-1 - 0} = 1$$

پس معادله خط d به صورت $y = x + b$ می‌باشد.

از طرفی در مربع، اضلاع با هم برابرند: $|AD| = |AB|$ که $|AD|$ برابر با فاصله نقطه A از خط d می‌باشد:

$$|AD| = |AB| \rightarrow \frac{|1 - b|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow |1 - b| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 - b = 2 \Rightarrow b = -1 \\ 1 - b = -2 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

با توجه به شکل داده شده، عرض از مبدأ مثبت است. بنابراین $b = 3$ مورد قبول می‌باشد.

نقطه $(-2, 1)$ روی خط $d: y = x + 3$ قرار دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲

$$d: 3x - 4y = k \Rightarrow 3x - 4y - k = 0$$

$$\text{فاصله نقطه از خط } d = \text{شعاع دایره} = \frac{|6 + 4 - k|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|10 - k|}{5} = 3$$

$$\Rightarrow |10 - k| = 15 \Rightarrow \begin{cases} 10 - k_1 = 15 \Rightarrow k_1 = -5 \\ 10 - k_2 = -15 \Rightarrow k_2 = 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k_1 + k_2 = -5 + 25 = 20$$

در نتیجه مجموع مقادیر c برابر است با:

$$\text{دو خط } 2 - 3x = 4y = 6 \text{ و } 4y = 3x - 2 \text{ دارای شیب } \frac{4}{3} \text{ و } -\frac{4}{3} \text{ و عمود بر هم هستند. پس فاصله رأس } (3, 3) \text{ از این دو خط برابر طول و عرض مستطیل}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳

$$3x - 4y - 2 = 0 \rightarrow d_1 = \frac{|3(3) - 4(3) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$4x + 3y - 6 = 0 \rightarrow d_2 = \frac{|4(3) + 3(3) - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$S = 1 \times 3 = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۴

$$(12x + 5y - 15 = 0 \text{ از خط } A(2, -3) \text{ فاصله}) d = \frac{|12(2) + 5(-3) - 15|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{6}{13} = 7a + 1$$

$$\rightarrow \frac{6}{13} - 1 = 7a \rightarrow 7a = \frac{-7}{13} \rightarrow a = -\frac{1}{13}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵

$$y - 2x = 3 \rightarrow m_1 = 2, 4x + 8y - 4 = 0 \rightarrow m_2 = -\frac{1}{2}$$

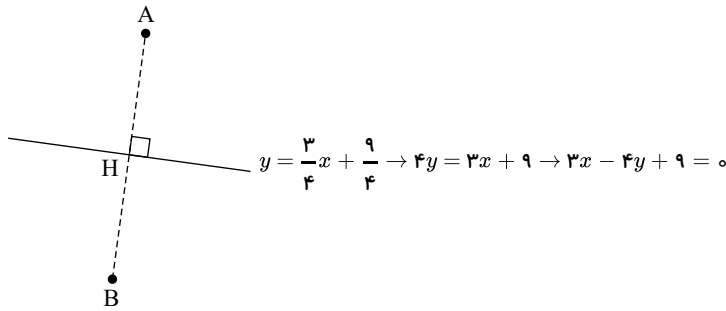
دو ضلع گفته شده بر هم عمودند و نقطه $A \begin{vmatrix} -1 \\ -4 \end{vmatrix}$ در هیچکدام صدق نمی‌کند، بنابراین فاصله نقطه $A \begin{vmatrix} -1 \\ -4 \end{vmatrix}$ از دو ضلع گفته شده برابر طول و عرض مستطیل است:

$$d_1 = \frac{|-4 - 2(-1) - 3|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$d_2 = \frac{|4(-1) + 8(-4) - 4|}{\sqrt{4^2 + 8^2}} = \frac{40}{\sqrt{80}} = \frac{40}{\sqrt{16 \times 5}} = \frac{40}{4\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow \text{مساحت مستطیل } S = d_1 \times d_2 = \sqrt{5} \times \frac{10}{\sqrt{5}} = 10$$

طول پاره‌خط AB دو برابر طول پاره‌خط AH (فاصله نقطه A از خط) می‌باشد و داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۶



$$AH = d = \frac{|3(1) - 4(-2) + 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{20}{5} = 4 \rightarrow AB = 2 \times 4 = 8$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۷

$$\begin{aligned} x - y + 1 &= 0 \\ x - y - \frac{13}{2} &= 0 \end{aligned}$$

شیب هر دو خط یک می‌باشند یعنی این دو خط موازی هستند و فاصله‌ی بین این دو، ضلع مربع را می‌دهد.

(در محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی حتماً ضرایب x و y در هر دو معادله‌ی خط باید یکسان باشند)

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - (-\frac{13}{2})|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{\frac{15}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{15}{2\sqrt{2}}$$

$$S_{\text{مربع}} = (\text{ضلع})^2 = \left(\frac{15}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{225}{8}$$



برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه‌ی $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ استفاده می‌کنیم.

دو ضلع مقابل متوازی‌الاضلاع با هم موازیند: **۱ ۲ ۳ ۴ ۳۸**

طول قاعده متوازی‌الاضلاع

فاصله‌ی بین دو خط ارتفاع متوازی‌الاضلاع

مساحت متوازی‌الاضلاع

با توجه به معادله‌ی خط، نقاط و را به دست می‌آوریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۳۹**

هم‌چنین با توجه به معادله‌ی خط داریم:

ارتفاع دوزنقه برابر است با فاصله‌ی دو خط و .

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۰

پس دو خط و باهم موازی هستند و فاصله‌ی این دو خط موازی برابر با طول ضلع مربع است و داریم:

فاصله دو خط

محیط مربع

در نتیجه:

ابتدا فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B را که همان فاصله‌ی دو خط موازی $3x - 4y + 5 = 0$ و $3x - 4y + 15 = 0$ است را به دست می‌آوریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱**

$$AB = \frac{|15 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

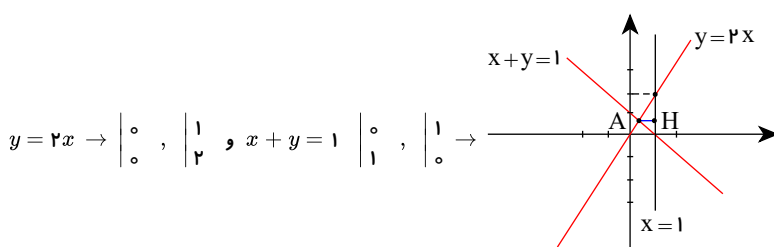
طبق قضیه فیثاغورس: $AC^2 = AB^2 + BC^2 \rightarrow AC^2 = 2^2 + 3^2 \rightarrow AC^2 = 13 \rightarrow AC = \sqrt{13}$

فاصله‌ی دو خط L_1 و L_2 برابر قطر دایره است. **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۲**

$$L_2 \text{ و } L_1 \text{ فاصله‌ی دو خط: } \frac{|-6 - (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{شعاع دایره} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{مساحت دایره: } S = \pi \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4\pi}{5}$$

سه خط داده شده را رسم می‌کنیم. **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۳**



$$y = 2x \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow$$



کوچک‌ترین ارتفاع مثلث ABC پاره خط AH می‌باشد که معادله اش $y = \frac{2}{3}$ است زیرا اگر با دو خط $x + y = 1$ و $y = 2x$ تشکیل دهیم داریم:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$$

یعنی مختصات نقطه A به صورت $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ است پس معادله‌ی ارتفاع AH به صورت $y = \frac{2}{3}$ است.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴

۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴

۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴

۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴