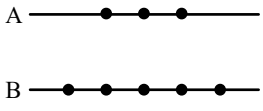
۱ تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ که شامل a باشند ولی شامل g نباشند چندتاست؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۱۵ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) ۲۰

۲ به چند طریق می‌توان مثلثی را تشکیل داد که رئوس آن، نقاط مشخص شده روی خطوط زیر باشد؟



قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۳۰ ۲) ۱۵ ۳) ۴۵ ۴) ۵۵

۳ یک اداره ۵ سواری و ۴ وانت دارد. این اداره به چند طریق می‌تواند ۳ ماشین را برای مأموریت به شهرستان اعزام کند به طوری که حداقل دو سواری بین ماشین‌های اعزامی باشد؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۴۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۸۰ ۴) ۵۰

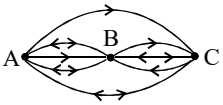
۴ به چند روش می‌توان از بین ۳ دانش‌آموز پایهٔ دهم و ۴ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم یک کمیتهٔ ۳ نفره انتخاب کرد که در آن هم دانش‌آموز پایهٔ دهم و هم دانش‌آموز پایهٔ یازدهم وجود داشته باشد؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۵۰ ۴) ۴۰

۵ از بین n کتاب ریاضی و $n-1$ کتاب شیمی، به ۱۶ حالت می‌توانیم ۲ کتاب هم مبحث را انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب از مجموع کتاب‌ها انتخاب کنیم؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۸۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۵۶ ۴) ۱۰

۶ در مسیرهای جاده‌ای زیر، جهت‌های حرکت در هر جاده با فلش مشخص شده است، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت و برگشت به‌طوری‌که فقط یکبار تغییر جهت (از راست به چپ) اتفاق افتد؟ قلم چی- ۱۳۹۹



۱) ۱۱ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۳۶

۷ اگر $(n+1)!=56(n-1)!$ باشد، حاصل $\binom{n-2}{n-4}$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۱۰ ۲) ۲۱ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۸ با حروف کلمهٔ «تپهٔ حسنلو» چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت به‌طوریکه فقط یک حرف نقطه‌دار باشد؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۷۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۷۱

۹ اگر $C(n,۳) = P(n-۱,۲)$ باشد، حاصل $\binom{n}{۲}$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۱۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۸

۱۰ به چند طریق می‌توان ۵ کودک را از میان ۸ کودک و ۴ بزرگسال آز میان ۶ بزرگسال انتخاب کرد و آن‌ها را یک در میان کنار هم نشاند؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $۲۰ \times ۸!$ ۲) $۶۰ \times ۸!$ ۳) $۲۰ \times ۶!$ ۴) $۶۰ \times ۶!$

۱۱ به چند طریق می‌توان ۶ عدد اسباب‌بازی متمایز را بین سه بچه، با تعداد یکسان تقسیم کرد؟ سراسری- ۱۳۹۳

۱) ۵۴ ۲) ۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۹۰

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ ۴

a حتماً باید باشد و g نباید باشد، پس باید ۳ حرف از $\{b, c, d, e, f\}$ انتخاب کنیم:

$$\underset{\downarrow}{۱} \times \binom{۵}{۳} = ۱۰$$

a حضور دارد.

۲ ۱ ۲ ۳ ۴

برای تشکیل مثلث باید ۲ نقطه از روی یک خط و یک نقطه از روی خط دیگر انتخاب کنیم:

$$\binom{۳}{۱} \times \binom{۵}{۲} + \binom{۵}{۱} \times \binom{۳}{۲} = ۳ \times ۱۰ + ۵ \times ۳ = ۳۰ + ۱۵ = ۴۵$$

۳ ۱ ۲ ۳ ۴

حداقل دو سواری یعنی دو سواری و یک وانت یا سه سواری.

چون ترتیب ماشین‌ها اهمیت ندارد، باید از ترکیب استفاده کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \text{تعداد حالت‌هایی که دو سواری و یک وانت وجود دارد.} = \binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱} = ۱۰ \times ۴ = ۴۰ \\ \text{تعداد حالت‌هایی که سه سواری اعزام شوند.} = \binom{۵}{۳} = ۱۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۴۰ + ۱۰ = ۵۰$$

۴ ۱ ۲ ۳ ۴

چون می‌خواهیم از هر دو پایه در کمیته حضور داشته باشند یا «یک نفر از یازدهم و دو نفر از دهم» انتخاب می‌کنیم یا «دو نفر از یازدهم و یک نفر از دهم».

$$\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۱} + \binom{۳}{۱}\binom{۴}{۲} = ۱۲ + ۱۸ = ۳۰$$

۵ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\binom{n}{۲} + \binom{n-۱}{۲} = ۱۶ = \frac{n(n-۱)}{۲} + \frac{(n-۱)(n-۲)}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{(n-۱)(n+n-۲)}{۲} = ۱۶ \Rightarrow \frac{(n-۱)(۲n-۲)}{۲} = ۱۶ \Rightarrow (n-۱)^۲ = ۱۶ \Rightarrow n-۱ = \pm ۴$$

$$\Rightarrow n = -۳ \text{ یا } n = ۵ \Rightarrow n = ۵ \text{ قابل قبول است.}$$

$$\Rightarrow n + (n-۱) = ۵ + ۴ = ۹$$

$$\binom{۹}{۳} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷}{۳ \times ۲} = ۸۴$$

۶ ۱ ۲ ۳ ۴

برای آن‌که از A به C برویم دو حالت داریم که یا از A به C مستقیم برویم یا از A به B و از B به C برویم:

$$A \xrightarrow{\text{مستقیم}} C: \text{۱ حالت} \quad \begin{cases} A \to B: \text{۳ حالت} \\ B \to C: \text{۲ حالت} \end{cases} \Rightarrow A \to B \to C \Rightarrow ۳ \times ۲ = \text{۶ حالت}$$

پس تعداد حالت‌های مسیر رفت برابر $۸ = ۶ + ۲$ است.

$$C \xrightarrow{\text{مستقیم}} A: \text{۱ حالت} \quad \begin{cases} C \to B: \text{۲ حالت} \\ B \to A: \text{۲ حالت} \end{cases} \Rightarrow C \to B \to A \Rightarrow ۲ \times ۲ = \text{۴ حالت}$$

پس تعداد حالت‌های مسیر برگشت برابر با $۵ = ۴ + ۱$ است.

رفت و برگشت از A به C طبق اصل ضرب برابر است با:

$$\text{تعداد کل حالت‌ها}: ۵ \times ۸ = ۴۰$$

۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$(n+۱)! = ۵۶(n-۱)! \Rightarrow (n+۱)(n)(n-۱)! = ۵۶(n-۱)! \Rightarrow n(n+۱) = ۵۶ = ۸ \times ۷ \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = ۷$$

$$\binom{n-۲}{n-۴} \xrightarrow[n=۷]{\text{جایگذاری}} \binom{۵}{۳} = \frac{۵!}{۳! \times ۲!} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳!}{۳! \times ۲} = ۱۰$$

۸ ۱ ۲ ۳ ۴

از سه حرف نقطه‌دار، یکی را انتخاب می‌کنیم و از ۵ حرف باقی‌مانده ۳ حرف انتخاب می‌کنیم. به $۴!$ حالت این ۴ حرف می‌توانند جابه‌جا شوند.

$\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۳} \times ۴! = ۷۲۰$

۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$C(n-۳) = \frac{n!}{(n-۳)! \times ۳!} = \frac{n \times (n-۱) \times (n-۲) \times (n-۳)!}{(n-۳)! \times ۶} = \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}$$

$$P(n-۱,۲) = \frac{(n-۱)!}{(n-۳)!} = (n-۱) \times (n-۲)$$

$$C(n,۳) = P(n-۱,۲) \Rightarrow \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶} = (n-۱) \times (n-۲) \Rightarrow \frac{n}{۶} = ۱ \Rightarrow n = ۶$$

$$\Rightarrow \binom{n}{۲} = \binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{۴! \times ۲!} = \frac{۶ \times ۵}{۲} = ۱۵$$

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴ باید از بین ۸ کودک ۵ کودک و از بین ۶ بزرگسال ۴ بزرگسال را انتخاب کرد یعنی $\binom{۶}{۴} \times \binom{۸}{۵}$ و از طرفی چون باید یک در میان کنار هم بنشینند اولین و آخرین نفر کودک هستند، (زیرا تعداد کودک‌ها یکی بیشتر است.) ۵ کودک به $۵!$ حالت در داخل دایره‌ها و ۴ بزرگسال به $۴!$ حالت داخل مربع‌های شکل زیر جایگشت دارد.

○□○□○□○□○

تعداد کل حالت‌ها : طبق اصل ضرب $= \binom{۶}{۴} \times \binom{۸}{۵} \times ۵! \times ۴! = \frac{۶!}{۴! \times ۲!} \times \frac{۸!}{۵! \times ۳!} \times ۴! \times ۵! = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳! \times ۸!}{۲ \times ۳!} = ۶۰ \times ۸!$

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ برای آن که به بچه‌ها تعداد مساوی اسباب‌بازی برسد باید به هر بچه ۲ عدد اسباب‌بازی بدهیم. برای بچه‌ی اول کافیست ۲ اسباب‌بازی از ۶ اسباب‌بازی انتخاب کنیم $C(۶,۲)$ و بدهیم.

برای بچه‌ی دوم ۲ اسباب‌بازی از ۴ اسباب‌بازی باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم $C(۴,۲)$ و در نهایت ۲ اسباب‌بازی باقی‌مانده را برای بچه‌ی سوم انتخاب می‌کنیم .

$$C(۶,۲) = \frac{۶!}{۲!۴!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴!}{۲ \times ۴!} = ۱۵$$

$$C(۴,۲) = \frac{۴!}{۲!۲!} = \frac{۴ \times ۳ \times ۲!}{۲ \times ۲!} = ۶$$

$$C(۲,۲) = \frac{۲!}{۲!۰!} = ۱$$

بنا بر اصل ضرب داریم:

$$C(۶,۲) \times C(۴,۲) \times C(۲,۲) = ۱۵ \times ۶ \times ۱ = ۹۰$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۱	**۲**	۳	۴	۴	۱	**۲**	۳	۴
۲	۱	۲	**۳**	۴	۵	**۱**	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	**۴**	۶	۱	۲	**۳**	۴

۷	**۱**	۲	۳	۴	۱۰	۱	**۲**	۳	۴
۸	**۱**	۲	۳	۴	۱۱	۱	۲	۳	**۴**
۹	**۱**	۲	۳	۴					