فاکتوریل

۱ اگر $(n-۲)\left((n-۲)!+(n-۳)!\right)=۱۲۰$ باشد، n کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲ اشتراک بردهای دو تابع $f=\{(n,\dfrac{(n+۱)!}{(n-۱)!})|n\in\mathbb{N}\}$ و $g=\{(m,\dfrac{۲(m!)+(m-۱)!}{(m-۱)!})|m\in\mathbb{N}\}$ شامل چند عضو است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۳ با حروف کلمهٔ «فاکتوریل» چند کلمهٔ ۵ حرفی بدون تکرار حروف و بدون توجه به معنی می‌توان نوشت که در آن کلمه با حرف نقطه‌دار شروع شود؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $\dfrac{۶!}{۲!}$ ۲) $\dfrac{۸!}{۳!}$ ۳) $\dfrac{۷!}{۳!}$ ۴) $\dfrac{۷!}{۲!}$

جایگشت

۴ اگر بخواهیم از یک گروه ۱۰ نفره، ۳ نفر استخدام کرده به‌طوری که نفر اول دبیر، نفر دوم نایب دبیر و نفر سوم منشی باشد، به چند روش این انتخاب ممکن است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۷۰۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۷۲

۵ ۳ پسر و ۴ دختر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به‌طوری‌که فقط پسرها یک در میان نسبت به‌هم باشند؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۲۸۴ ۲) ۱۴۴ ۳) ۲۸۸ ۴) ۲۱۸

۶ به چند طریق می‌توان ۴ کتاب ریاضی و ۳ کتاب فیزیک متمایز را کنار هم قرار داد به گونه‌ای که همه کتاب‌های ریاضی در سمت چپ قرار بگیرند؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۲۸۸ ۲) ۳۶ ۳) ۱۴۴ ۴) ۷۲

۷) با اعداد ۲,۳,۵,۶,۷ و ۰، چند عدد سه رقمی (بدون تکرار) می‌توان نوشت که حتماً عدد ۶ در آن‌ها وجود داشته باشد؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۱۰۰ ۲) ۴۸ ۳) ۵۲ ۴) ۳۲

۸) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ «$YASAMAN$» حروف مشابه کنار هم‌دیگر قرار دارند ولی M و N کنار هم نیستند؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۴۸ ۲) ۷۲ ۳) ۹۶ ۴) ۱۲۰

۹) در معادلهٔ $۳P(۲n,۳) = ۱۴P(n,۲)$، مقدار n برابر کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) وجود ندارد.

۱۰) از بین تیم‌های حاضر در لیگ فوتبال یک کشور، ۳ تیم اول سهمیهٔ حضور در رقابت‌های باشگاهی قاره خود را کسب می‌کنند. اگر تیم‌های اول تا سوم این لیگ به ۷۲۰ حالت مختلف بتواند مشخص شود، به چند طریق ممکن ۲ تیم آخر این لیگ مشخص می‌شود؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $\frac{۶!}{۲!}$ ۲) $\frac{۱۰!}{۲!}$ ۳) ۷۲ ۴) ۹۰

۱۱) در چند جایگشت حروف کلمهٔ «$sample$» سه حرف کلمهٔ sam کنار هم قرار نمی‌گیرند؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۶۷۲ ۲) ۵۷۶ ۳) ۴۸۰ ۴) ۴۳۲

۱۲) تعداد جایگشت‌های حروف کلمه " $Hamrahan$ " به‌شرط آن‌که حروف یکسان کنار هم قرار بگیرند، کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۱۸۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۳۶۰

۱۳) ۴ کتاب ریاضی متفاوت و ۲ کتاب فیزیک متفاوت را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم قرار داد به‌طوری که فقط کتاب‌های ریاضی کنار هم باشند؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۴۸ ۲) ۱۴۴ ۳) ۷۲ ۴) ۲۴

۱۴) با حروف کلمهٔ $security$ چند کلمهٔ ۸ حرفی (بدون توجه به معنی آن) می‌توان ساخت که s حرف اول آن نباشد؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $۷!$ ۲) $۷ \times ۷!$ ۳) $\frac{۸!}{۷}$ ۴) $۸!$

۱۵) تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ « $KONKORI$ » که در آن‌ها حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند، کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

۱۶) ۴ کتاب ریاضی متمایز و ۳ کتاب ادبیات متمایز را به چند طریق می‌توان در کتابخانه کنار هم در یک طبقه قرار داد به‌طوری که کتاب‌های هم‌نوع کنار هم نباشند؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $۳! \times ۴!$ ۲) $۳! \times ۴! \times ۲$ ۳) $(۳ \times ۴)!$ ۴) $۷! \times ۲$

۱۷) اگر $P(n+1,2) = 72$ باشد، n کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۸) چند جایگشت از حروف کلمهٔ «مسابقه» با حرف «م» آغاز می‌شود و حروف نقطه‌دار کنار هم قرار ندارند؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۷۲ ۲) ۳۶ ۳) ۹۶ ۴) ۴۸

۱۹) با ارقام ۱ تا ۵ چند عدد چهاررقمی مضرب ۶ می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام) قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۶

۲۰) ۳ زوج می‌خواهند روی ۶ صندلی در یک ردیف بنشینند. آن‌ها به چند حالت می‌توانند روی صندلی‌ها بنشینند به‌طوری که هر سه زوج هم‌زمان کنار هم ننشسته باشند؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۷۱۴ ۲) ۶۷۲ ۳) ۷۰۸ ۴) ۶۹۶

۲۱) با حروف کلمهٔ «آزمون» چند کلمهٔ پنج حرفی می‌توان نوشت به‌طوری که حروف «م» و «ن» همواره کنار هم باشند؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۴۸ ۲) ۳۶ ۳) ۴۴ ۴) ۵۲

۲۲) با حروف کلمهٔ «جهانگردی» چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه‌دار شروع شده و به «دی» ختم می‌شود؟(بدون توجه به معنی کلمه ساخته شده است.) قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۹۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۱۸۰

۲۳) با حروف کلمهٔ «compute»، چند کلمهٔ ۷ حرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت به‌طوری که حرف m بعد از o و حرف o بعد از c باشد؟ (نه لزوماً بلافاصله) قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $\frac{7!}{2}$ ۲) $\frac{7!}{3}$ ۳) $\frac{7!}{6}$ ۴) $5!$

۲۴) با حروف کلمهٔ «تقویم» و بدون تکرار حروف چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت به‌طوری که بین حروف «و» و «م» دقیقاً یک حرف قرار بگیرد؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۳۶ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۳۲

۲۵) در چند جایگشت از حروف کلمهٔ sabzipolu عبارت sabzi وجود دارد ولی عبارت pol وجود ندارد؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۱۸ ۳) ۱۱۴ ۴) ۱۱۲

۲۶ می‌خواهیم ارقام ۵,۴,۳,۲,۱ را طوری کنار هم قرار دهیم که بین ۱ و ۳ حداقل یک رقم دیگر وجود داشته باشد. تعداد حالات ممکن کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۷۲ ۲) ۹۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۸۴

۲۷ با حروف کلمه‌ی $KAMYAB$، چند رمز عبور ۴ حرفی می‌توان ساخت؟ خارج از کشور- ۱۳۹۴

۱) ۱۴۲ ۲) ۱۵۶ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۲

۲۸ با حروف کلمه‌ی $FARHAD$، چند رمز عبور ۶ حرفی می‌توان ساخت، به طوری که دو حرف A در کنار هم نباشند؟ سراسری- ۱۳۹۶

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۰۰

۲۹ حروف کلمه $EARNEST$ را به چند طریق می‌توان در کنار هم قرار دارد، به طوری که حرف N همواره در وسط قرار گیرد؟ (بدون توجه به مفهوم) سراسری- ۱۳۹۱

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

۳۰ تعداد جایگشت‌های سه حرفی انتخاب شده از حروف کلمه‌ی $DELAVAR$ کدام است؟ سراسری- ۱۳۹۰

۱) ۱۱۵ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۳۵

۳۱ از یک قطعه مقوا، ارقام ۵، ۳، ۲، ۲، ۲ و ۱ بریده شده است. با جایگشت هر سه رقم دلخواه از آنان، چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت؟ خارج از کشور- ۱۳۹۰

۱) ۲۸ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

۳۲ از ۱۲ نفر دانش‌آموز نمونه، به چند راه می‌توان سه نفر را جهت مشارکت در سه مورد متمایز در امور مدرسه، انتخاب کرد؟ خارج از کشور- ۱۳۹۱

۱) ۱۳۲۰ ۲) ۶۶۰ ۳) ۳۳۰ ۴) ۲۲۰

۳۳ با حروف کلمهٔ $DANESH$، چند رمز عبور چهار حرفی می‌توان ساخت. به‌طوری که حرف S در هر رمز باشد؟ سراسری- ۱۳۹۷

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۲۶۰ ۴) ۲۷۰

۳۴ شش رقم ۱,۳,۳,۵,۵,۵، را از مقوا بریده در کنار یکدیگر جابه‌جا می‌کنیم. تعداد اعداد شش رقمی متمایز، کدام است؟ خارج از کشور- ۱۳۹۵

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰

۳۵ با حروف کلمه‌ی $DAMDARAN$، چند رمز عبور ۸ حرفی می‌توان ساخت، به‌طوری که با D شروع و به D ختم شوند؟ خارج از کشور- ۱۳۹۶

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۴۰

۳۶ پنج حرف از هفت حرف کلمه‌ی $ELEMENT$ را با جایگشت‌های متمایز کنار هم قرار می‌دهیم. تعداد کلماتی که هر سه E در آن‌ها موجود باشند، کدام است؟

خارج از کشور- ۱۳۹۲

۱) ۷۲
۲) ۸۴
۳) ۹۶
۴) ۱۲۰

۳۷ پنج حرف از هشت حرف کلمه‌ی $BUSINESS$ را با جایگشت‌های متمایز در کنار هم قرار می‌دهیم. تعداد گروه‌هایی که هر سه S در آن‌ها موجود باشند، کدام است؟

سراسری- ۱۳۹۲

۱) ۱۵۰
۲) ۱۶۰
۳) ۲۰۰
۴) ۲۴۰

پاسخ‌نامه تشریحی

۱) ۱ ۲ **۳** ۴

$$(n-۲)\left((n-۲)! + (n-۳۰)! = ۱۲۰\right.$$

$$\Rightarrow (n-۲)\left((n-۲)(n-۳)! + (n-۳)!\right) = ۱۲۰$$

$$\Rightarrow (n-۲)(n-۳)!(n-۲+۱) = ۱۲۰$$

$$\Rightarrow (n-۱)(n-۲)(n-۳)! = ۱۲۰ \Rightarrow (n-۱)! = ۱۲۰$$

$$\Rightarrow (n-۱)! = ۵! \Rightarrow n-۱ = ۵ \Rightarrow n = ۶$$

۲) **۱** ۲ ۳ ۴

$$\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = \frac{(n+۱)(n)(n-۱)!}{(n-۱)!} = n(n+۱) \Rightarrow R_f = \{n(n+۱) | n \in \mathbb{N}\} = \{۲, ۶, ۱۲, ۲۰, \ldots\}$$

$$\frac{۲(m!) + (m-۱)!}{(m-۱)!} = \frac{۲m(m-۱)!}{(m-۱)!} + \frac{(m-۱)!}{(m-۱)!} = ۲m+۱ \Rightarrow R_g = \{۲m+۱ | m \in \mathbb{N}\} = \{۳, ۵, ۷, \ldots\} \Rightarrow R_f \cap R_g = \{\ \}$$

۳) ۱ ۲ ۳ **۴** «فاکتوریل» ۸ حرف دارد که ۳ حرف آن نقطه‌دار است. بنابراین ابتدا یک حرف نقطه‌دار را انتخاب می‌کنیم و سپس حروف دیگر را می‌چینیم:

$$۳ \times P(۷, ۴) = ۳ \times \frac{۷!}{۳!} = \frac{۷!}{۲!}$$

توجه: حرف «ی» در صورتی که در انتهای کلمه نباشد و به‌صورت چسبان باشد، نقطه‌دار است.

۴) ۱ **۲** ۳ ۴

چون ترتیب داریم پس:

$$P(۱۰, ۳) = \frac{۱۰!}{۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۷!} = ۷۲۰$$

۵) ۱ ۲ **۳** ۴ چون فقط پسرها یک در میان نسبت به‌هم قرار می‌گیرند، پس ۲ حالت به‌صورت $\underline{ggbgbgb}$ و $\underline{bgbgbgg}$ خواهیم داشت. در هر یک از این حالات پسرها به $۳!$ طریق و دخترها به $۴!$ طریق قرار می‌گیرند، لذا جواب نهایی برابر با $۲ \times ۴! \times ۳! = ۲۸۸$ می‌باشد.

۶) ۱ ۲ **۳** ۴

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{\text{کتاب‌های ریاضی}} \quad \overbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}^{\text{کتاب‌های فیزیک}} \quad \Rightarrow ۴! \times ۳! = ۱۴۴$$

۷) ۱ ۲ **۳** ۴ ابتدا تعداد کل اعداد سه رقمی (بدون تکرار) را نوشته و سپس اعدادی را که عدد شش در آن‌ها وجود ندارد، می‌نویسیم پس تفاضل دو عدد به‌دست آمده برابر است با تعداد اعداد سه رقمی (بدون تکرار ارقام) که شامل عدد ۶ می‌باشند.

تعداد اعداد سه‌رقمی بدون ۶ $= \boxed{۴}\boxed{۴}\boxed{۳} = ۴۸$

تعداد کل اعداد سه‌رقمی $= \boxed{۵}\boxed{۵}\boxed{۴} = ۱۰۰$

تعداد اعداد سه‌رقمی شامل ۶ $= ۱۰۰ - ۴۸ = ۵۲$

۸) ۱ **۲** ۳ ۴

اگر Aها را کنار هم و در یک بسته در نظر بگیریم:

$$\boxed{AAA}, Y, S, M, N$$

بین ۵ شیء باقی‌مانده به $۵!$ جایگشت دارند. Aها هم در بستهٔ خودشان فقط یک جایگشت دارند. پس تعداد کلماتی که Aها کنار هم باشند برابر است با $۵!$.

در بین کلماتی که Aها کنار هم قرار دارند، اگر M و N هم کنار هم قرار گیرند، به‌صورت زیر M و N را هم درون بسته‌ای قرار می‌دهیم.

$$\boxed{AAA}\boxed{MN}YS$$

تعداد این کلمات برابر است با:

$$\underset{N,M \text{ جابه‌جایی}}{\underset{\downarrow}{۴! \times ۲!}}$$

پس تعداد کلماتی که Aها کنار هم باشند و M و N کنار هم نباشند برابر است با:

$$۵! - ۴! \times ۲! = ۴!(۵ - ۲) = ۴! \times ۳ = ۷۲$$

۹ ۱ ۲ ۳ **۴** با استفاده از رابطهٔ ترتیب، مقادیر $P(n,۲)$ و $P(۲n,۳)$ را می‌نویسیم:

$$P(n,۲) = \frac{n!}{(n-۲)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!} = n(n-۱)$$

$$P(۲n,۳) = \frac{(۲n)!}{(۲n-۳)!} = \frac{(۲n)(۲n-۱)(۲n-۲)(۲n-۳)!}{(۲n-۳)!} = (۲n-۲)(۲n-۱)۲n = ۴n(n-۱۰)(۲n-۱)$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$۱۲n(n-۱)(۲n-۱) = ۱۴n(n-۱) \xrightarrow{n \neq ۰,۱} ۱۲(۲n-۱) = ۱۴$$

$$\Rightarrow ۲n - ۱ = \frac{۷}{۶} \Rightarrow ۲n = \frac{۷}{۶} + ۱ \Rightarrow n = \frac{۱۳}{۱۲}$$

که با توجه به این‌که در $P(n,۲)$ باید n عدد طبیعی باشد، پس $n = \frac{۱۳}{۱۲}$ قابل قبول نیست.

۱۰ ۱ ۲ ۳ **۴** اگر تعداد تیم‌های این لیگ را n در نظر بگیریم، تعداد حالت‌های انتخاب سه تیم اول برابر با $P(n,۳)$ است. پس:

$$P(n,۳) = ۷۲۰ \Rightarrow \frac{n!}{(n-۳)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{(n-۳)!} = ۷۲۰$$

$$\Rightarrow n(n-۱)(n-۲) = ۱۰ \times ۹ \times ۸ \Rightarrow n = ۱۰$$

تعداد حالت‌های انتخاب دو تیم آخر برابر است با:

$$P(۱۰,۲) = \frac{۱۰!}{(۱۰-۲)!} = \frac{۱۰!}{۸!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸!}{۸!} = ۹۰$$

۱۱ ۱ **۲** ۳ ۴ کل جایگشت‌های حروف کلمهٔ «$sample$» برابر $۶!$ است که تعداد حالاتی که حروف «sam» کنار هم قرار می‌گیرند، برابر است با:

$$\underbrace{۴!}_{\text{جایگشت بسته } sam \text{ و سه حرف دیگر}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جایگشت حروف } sam} = ۱۴۴$$

در نتیجه داریم:

$$\text{تعداد حالات مطلوب} = ۶! - ۴! \times ۳! = ۷۲۰ - ۱۴۴ = ۵۷۶$$

۱۲ ۱ **۲** ۳ ۴

ابتدا طبق شرط حروف را دسته‌بندی می‌کنیم.

$$\boxed{H\ h}\boxed{a\ a\ a}\ r\ m\ n$$

مطابق دسته‌بندی ۵ شی داریم پس جایگشت آن $۱۲۰ = ۵!$ است و چون حروف داخل دسته‌ها یکسان است، تفاوتی در جابه‌جایی نخواهیم داشت.

۱۳ **۱** ۲ ۳ ۴ چون فقط کتاب‌های ریاضی می‌توانند کنار هم باشند، پس کتاب‌های فیزیک نمی‌توانند کنار هم باشند. طبق شکل کتاب‌های فیزیک با هم $۲!$ و کتاب‌های ریاضی با هم $۴!$ جایگشت دارند.

در نتیجه بنابر اصل ضرب داریم:

اصل ضرب : $۴! \times ۲! = ۴۸$ □کتاب ریاضی ، △کتاب فیزیک △ (□ □ □ □) △

۱۴ ۱ **۲** ۳ ۴ راه حل اول:

$$\begin{matrix} \text{s} & \text{e} & \text{c} & \text{u} & \text{r} & \text{i} & \text{t} & \text{y} \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \end{matrix}$$

اگر s حرف اول کلمه نباشد، باید حرف دوم تا هشتم کلمه باشد که جمعاً ۷ حالت می‌شود و در هریک از این حالت‌ها تعداد جایگشت‌های مابقی حروف (۷ حرف) برابر $۷!$ است. پس تعداد کل کلمات برابر می‌شود با:

$$۷ \times ۷!$$

راه حل دوم:

اگر از کل حالت‌ها، تعداد حالت‌هایی که s حرف اول است را کم کنیم، جواب به‌دست می‌آید:

$$۸! - (۱ \times ۷!) = ۸! - ۷! = ۸ \times ۷! - ۷! = ۷! \times (۸ - ۱) = ۷ \times ۷!$$

(۱۵) ۴ ۳ ۲ **۱** دو حرف O را با هم در یک بسته و دو حرف K را باهم در یک بستهٔ دیگر قرار می‌دهیم:

$\boxed{KK}\ \boxed{OO}\ \boxed{N}\ \boxed{R}\ \boxed{I}$

تعداد جایگشت‌های ۵ بستهٔ فوق برابر است :

$$۵! = ۵ \times ۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$$

(۱۶) ۴ ۳ ۲ **۱**

شکل روبه‌رو را درنظر بگیرید:

$R_۱$		$R_۲$		$R_۳$		$R_۴$	

اولاً مجبور هستیم اولین کتاب را ریاضی انتخاب کنیم تا کتاب‌های هم‌نوع کنار هم نباشند، که تعداد حالات آن‌ها !۴ می‌باشد.

ثانیاً در این وضعیت کتاب‌های ادبیات را به‌صورت $\boxed{\ }\boxed{A_۱}\boxed{\ }\boxed{A_۲}\boxed{\ }\boxed{A_۳}\boxed{\ }$ به تعداد !۳ حالت می‌توان درکتاب‌خانه قرار داد. بنابراین تعداد حالات قرار دادن کل کتاب‌های فوق با شرط ذکر شده در کتاب‌خانه بنابر اصل ضرب، برابر است با : $۴! \times ۳!$.

(۱۷) **۴** ۳ ۲ ۱

$$P(n+۱,۲) = \frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = \frac{(n+۱)(n)(n-۱)!}{(n-۱)!}$$

$$(n+۱)(n) = ۷۲ \Rightarrow n^۲ + n - ۷۲ = ۰ \Rightarrow (n+۹)(n-۸) = ۰ \Rightarrow n = -۹ \text{ یا } n = ۸$$

n نمی‌تواند منفی باشد، بنابراین داریم:

$$n = ۸$$

(۱۸) ۴ ۳ ۲ **۱**

ابتدا حرف اول را «م» قرار می‌دهیم. ۵ حرف باقی‌مانده می‌توانند به !۵ کنار هم قرار گیرند. تعداد حالاتی که حروف نقطه‌دار («ب» و «ق») کنار هم قرار می‌گیرند برابر است با:

ه $\boxed{\text{ب ق}}$ ا س $\Rightarrow$ $۲! \times ۴!$

یک بسته — جابه‌جایی «ب» و «ق» درون بسته

پس تعداد حالاتی که حروف نقطه‌دار کنار هم قرار ندارند برابر است با:

$$۵! - ۲! \times ۴! = ۴ \times ۳ = ۷۲$$

(۱۹) ۴ **۳** ۲ ۱ عددی که مضرب ۶ باشد، هم بر ۲ بخش‌پذیر و هم بر ۳. یکان عددی که با ارقام ۴،۳،۲،۱ و ۵ ساخته می‌شود باید ۲ یا ۴ باشد تا عدد بر ۲ بخش‌پذیر باشد.

بنابراین در این ۲ حالت بررسی می‌کنیم:

الف) یکان ۲ باشد:

$$\_\ \_\ \_\ \underset{\{۲\}}{\_}$$

برای این‌که عدد حاصل مضرب ۳ باشد، مجموع ارقام آن باید مضرب ۳ باشد، در این حالت فقط می‌توانیم ارقام $\{۱,۴,۵\}$ را انتخاب کنیم که این ارقام نیز به $۳! = ۶$ حالت جایگشت می‌کنند.

ب) یکان ۴ باشد:

$$\_\ \_\ \_\ \underset{\{۴\}}{\_}$$

در این حالت نیز فقط ارقام $\{۱,۲,۵\}$ را می‌توانیم انتخاب کنیم که این ارقام نیز به $۳! = ۶$ حالت جایگشت می‌کنند.بنابراین بنابر اصل جمع در مجموع ۱۲ عدد مضرب ۶ می‌توانیم بسازیم.

(۲۰) ۴ ۳ **۲** ۱

تعداد کل حالت‌ها:

$$۶! = ۷۲۰$$

اگر هر سه زوج در کنار یکدیگربنشینند:

$$۳! \times ۲! \times ۲! \times ۲! = ۴۸$$

$$\text{تعداد حالات مطلوب} = ۷۲۰ - ۴۸ = ۶۷۲$$

(۲۱) ۴ ۳ ۲ **۱**

دو حرف «م» و «ن» را یک شیء در نظر گرفته و در کل چهار شیء داریم که به !۴ حالت کنار هم قرار می‌گیرند. از طرفی دو حرف فوق دارای !۲ جایگشت می‌باشند، پس داریم:

$$\text{تعداد کل جایگشت‌ها} = ۴! \times ۲! = (۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) \times (۲ \times ۱) = ۴۸$$

(۲۲) ۴ ۳ **۲** ۱

برای حرف اول ۲ انتخاب «ج» و «ن» وجود دارد. همچنین ۲ حرف آخر کلمه تنها یک حالت دارد و به‌صورت «دی» است. بنابراین تعداد کل کلمات برابر است با:

$$۲ \times P(۵,۳) \times ۱ = ۲ \times \frac{۵!}{۲!} = ۵! = ۱۲۰$$

(۲۳) ۴ **۳** ۲ ۱ قرار است m بعد از o و o بعد از c بیاید. اگر گفته می‌شد بلافاصله بعد از هم بیایند c, o, m را یک بسته می‌کردیم و جایگشت حساب می‌کردیم. ولی فقط گفته شده است، بعد از هم بیایند، در این حالت ابتدا کل جایگشت‌ها را حساب می‌کنیم یعنی !۷. حال حروف مورد نظر ما m و o و c هستند که !۳ جایگشت دارند، یعنی ۶ حالت. پس در این !۷ جایگشت، به هر یک از ۶ حالت حروف c, o, m تعداد $\frac{۷!}{۶}$ حالت تعلق می‌گیرد. در بین این ۶ حالت، یکی مطلوب است و آن هم زمانی که m بعد از o و o بعد از c قرار بگیرد، پس تعداد کل حالات

مطلوب برابر است با:

$$\frac{7!}{6}\times 1=\frac{7!}{6}$$

۲۴) ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا به ۳ طریق می‌توان حرف بین «و» و «م» را بین حروف (ت،ق،ی) انتخاب کرد. سپس به ۲ طریق حرف «م» و «و» می‌توانند جایشان را عوض کنند. حال حرف انتخاب شده و حروف «و» و «م» را در یک بسته قرار می‌دهیم. این بسته و دو حرف باقی‌مانده به !۳ طریق جایگشت دارند، بنابراین تعداد کل کلمات برابر است با:

$$3\times 2\times 3!=36$$

۲۵) ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا تعداد جایگشت‌هایی را که عبارت sabzi دارد به‌دست می‌آوریم:

$$\text{sabzi}-p-o-l-u\Rightarrow \text{۵ شی}\Rightarrow \text{تعداد جایگشت‌ها}\ 5!=120$$

تعداد جایگشت‌هایی که sabzi و pol را دارد.

$$\text{sabzi - pol - u}\Rightarrow \text{۳ شی}\Rightarrow 3!=6\ \text{تعداد جایگشت‌ها}$$

تعداد جایگشت‌های مطلوب برابر است با:

$$5!-3!=120-6=114$$

۲۶) ۱ ۲ ۳ ۴ کل حالات ممکن !۵ است.حال، حالت‌هایی که ۳ و ۱ کنار هم هستند و رقمی بین آن‌ها وجود ندارد را حساب می‌کنیم:

$$\boxed{1\ \ 3}\ \ \underline{2}\ \ \underline{4}\ \ \underline{5}\Rightarrow\ 2\times 4!$$

$$5!-(2\times 4!)=5\times 4!-2\times 4!=3\times 4!=72$$

۲۷) ۱ ۲ ۳ ۴ کلمه‌ی $KAMYAB$ دارای دو حرف تکراری A است، پس برای نوشتن رمزهای ۴ حرفی حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) فاقد حرف A باشد: بنابراین از بین حروف باقی‌مانده‌ی $\{K,M,Y,B\}$، چهار حرف انتخاب کرده و جایگشت می‌دهیم:

$$\binom{4}{4}\times 4!=1\times 24=24$$

ب) دارای یک حرف A باشد: بنابراین از بین حروف باقی‌مانده، سه حرف دیگر را انتخاب و جایگشت می‌دهیم:

$$\binom{4}{3}\times 4!=4\times 24=96$$

ج) دارای دو حرف A باشد: بنابراین از بین حروف باقی‌مانده، دو حرف دیگر را انتخاب و با دو حرف تکراری A جایگشت می‌دهیم:

$$\binom{4}{2}\times\frac{4!}{2!}=6\times 12=72$$

در نهایت طبق اصل جمع، تعداد کل رمزهای چهار حرفی برابر است با: $24+96+72=192$

۲۸) ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا جایگشت شش حرف کلمه‌ی داده شده را که دارای دو حرف تکراری است را بدست می‌آوریم:

$$\text{تعداد جایگشت}=\frac{6!}{2!}=\frac{6\times5\times4\times3\times2!}{2!}=360$$

اکنون تعداد جایگشت‌هایی را که دو حرف A کنار هم هستند را بدست می‌آوریم.

$$\boxed{AA}\,FRHD\rightarrow \text{تعداد جایگشت}=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$$

(جابجایی دو حرف A چون عین هم هستند اهمیت ندارد).

اکنون اگر تعداد حالاتی را که دو حرف A کنار هم هستند را از تعداد کل حالات کم کنیم، تعداد حالاتی که دو حرف A کنار هم نیستند بدست می‌آید.

$$360-120=240$$

۲۹) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underset{1}{\underline{N}}\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }$$

حرف N را در وسط قرار می‌دهیم. ۶ حرف $EAREST$ باقی می‌ماند که جایگشت آن‌ها را حساب می‌کنیم:

(توجه کنید که حرف E ۲ بار تکرار شده است):

$$\frac{6!}{2!}=\frac{6\times5\times4\times3\times2!}{2!}=360$$

۳۰) ۱ ۲ ۳ ۴ در بین حروف کلمه‌ی $DELAVAR$ دو حرف تکراری A داریم بنابراین مسأله را در سه حالت مختلف زیر حل می‌کنیم:

حالت اول: ابتدا سه حرف از بین تمام حروف (بجز A) را انتخاب کرده و جایگشت‌های آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$D,E,L,V,R\rightarrow \text{انتخاب ۳ حرف از بین ۵ حرف و جایگشت سه حرف متمایز}\ \binom{5}{3}\times\overbrace{3!}^{\text{جایگشت ۳ حرف متمایز}}=10\times 6=60$$

حالت دوم: در این مرحله یکی از حروف A و دو حرف دیگر از حروف غیر A را انتخاب و باز جایگشت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{انتخاب ۲ حرف از ۵ حرف و جایگشت سه حرف متمایز}\ \binom{5}{2}\times\overbrace{3!}^{\text{جایگشت ۳ حرف متمایز}}=10\times 6=60$$

حالت سوم: در این مرحله دو حرف A و یک حرف از حروف غیر A را انتخاب می‌کنیم و باز هم جایگشت آن‌ها (که این بار حرف تکراری هم دارد) حساب می‌کنیم:

انتخاب ۱ حرف از ۵ حرف و جایگشت ۳ حرف با ۲ حرف تکراری یکسان $\binom{۵}{۱} = ۵ \times \overbrace{\frac{۳!}{۲!}}^{\text{جایگشت ۳ حرف با ۲ حرف تکراری یکسان}} = ۵ \times ۳ = ۱۵$

بنابراین مجموع حالات برابر است با:

$۶۰ + ۶۰ + ۱۵ = ۱۳۵$

۳۱) ۱ ۲ ۳ **۴** حالت اول: هر ۳ رقم ۲ باشد.

$۲, ۲, ۲ \to$ تعداد جایگشت $= ۱$

حالت دوم: یکی از ارقام ۲ و دو رقم دیگر غیراز ۲

$$۲, \underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{۱,۳,۵} \to \underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{انتخاب ۲ رقم از بین ارقام ۱, ۳, ۵}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جایگشت ۳ رقم}} = ۳ \times ۶ = ۱۸$$

حالت سوم: دو رقم ۲ و یک رقم دیگر غیر ۲

$$۲, ۲, \underbrace{\bigcirc}_{۱,۳,۵} \to \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{انتخاب یک رقم از بین ارقام ۱, ۳, ۵}} \times \underbrace{\frac{۳!}{۲!}}_{\text{جایگشت یک رقم انتخابی با دو تا رقم ۲}} = ۳ \times ۳ = ۹$$

حالت چهارم: هر ۳ رقم غیر ۲ باشند.

پس داریم: $۱ + ۱۸ + ۹ + ۶ = ۳۴$

۳۲) ۴ ۳ ۲ **۱** انتخاب ۳ نفر از ۱۲ نفر، مورد سؤال است و چون قرار است این سه نفر جهت مشارکت در سه مورد متمایز در امور مدرسه انتخاب شوند، پس ترتیب انتخاب آن‌ها اهمیت دارد. بنابراین از فرمول ترتیب استفاده می‌کنیم:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \Rightarrow P(۱۲, ۳) = \frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!} = \frac{۱۲!}{۹!} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ \times ۹!}{۹!} = ۱۳۲۰$$

۳۳) ۴ ۳ ۲ **۱**

ابتدا حرف S را حذف کرده تعداد دسته‌های سه حرفی بدون S که ترتیب مهم نباشد را می‌نویسیم.

$D\ A\ N\ E\ \cancel{S}\ H$

پس از ۵ حرف باقی‌مانده سه حرف انتخاب می‌کنیم (ترتیب مهم نیست)

$$\binom{۵}{۳} = \binom{۵}{۲} = \frac{۵ \times ۴}{۲} = ۱۰$$

پس به ۱۰ طریق سه حرف غیر S انتخاب می‌کنیم حال با S، ۴ حرف می‌شوند و !۴ ترتیب جابه‌جایی آنها است. پس:

$$\text{جواب}: \underset{\substack{\downarrow \\ \text{انتخاب‌های دسته‌های سه تایی بدون } S}}{۱۰} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{جابه‌جایی ۴ عضو}}}{۴!} = ۱۰ \times ۲۴ = ۲۴۰$$

۳۴) ۴ ۳ ۲ **۱** چون ارقام داده شده، شامل ارقام تکراری است، پس داریم:

$$\text{تعداد اعداد شش رقمی متمایز} = \frac{۶!}{\underset{\text{جایگشت تکراری ۳ ها}}{۲!} \times \underset{\text{جایگشت تکراری ۵ ها}}{۳!}} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۲ \times ۳!} = ۶۰$$

۳۵) ۴ ۳ ۲ **۱** اگر بخواهیم با حروف کلمه‌ی $DAMDARAN$ یک رمز ۸ حرفی بسازیم که با D شروع و به D ختم شود؛ رمز به صورت $D□□□□□□D$ است؛ یعنی با حروف $AAAMRN$ باید یک کلمه‌ی سه حرفی بسازیم که دارای ۳ حرف تکراری A است. بنابراین با استفاده از جایگشت با تکرار داریم:

$$\text{تعداد کلمات} = \frac{۶!}{۳!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۳!} = ۱۲۰$$

۳۶) ۳ ۲ ۱ **۴** حروف کلمه‌ی $ELEMENT$ شامل ۳ حرف تکراری E است، بنابراین برای ساختن کلمات پنج حرفی که شامل هر سه حرف E است، کافی است دو حرف دیگر از حروف غیر E (یعنی L، M، N یا T) را انتخاب کنیم و با سه حرف تکراری E جایگشت دهیم:

$$\text{تعداد کلمات} = \binom{۴}{۲} \times \frac{۵!}{۳!} = \frac{۴!}{۲! \times ۲!} \times \frac{۵!}{۳!} = \frac{۴ \times ۳ \times \cancel{۲!}}{۲ \times \cancel{۲!}} \times \frac{۵ \times ۴ \times \cancel{۳!}}{\cancel{۳!}} = ۶ \times ۲۰ = ۱۲۰$$

۳۷) ۴ ۲ ۱ **۳** تعداد جایگشت‌های ۵ حرفی از حروف $BUSINESS$ را می‌خواهیم که شامل ۳ حرف S باشند، پس ابتدا باید دو حرف دیگر از حروف B, U, I, N, E را انتخاب کرده و سپس این دو حرف را با سه حرف S جایگشت دهیم، بنابراین تعداد جایگشت‌های متمایز مطلوب برابر است با:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{انتخاب دو حرف غیر از } S}}{\binom{۵}{۲}} \times \frac{\overbrace{۵!}^{\text{جایگشت ۵ حرف حاصل}}}{\underbrace{۳!}_{\text{جایگشت ۳ حرف } S \text{ تکراری}}} = ۱۰ \times ۲۰ = ۲۰۰$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۳
۲	۱
۳	۴
۴	۲
۵	۳
۶	۳
۷	۳
۸	۲
۹	۴
۱۰	۴
۱۱	۲
۱۲	۲
۱۳	۱
۱۴	۲
۱۵	۱
۱۶	۱
۱۷	۴
۱۸	۱
۱۹	۳
۲۰	۲
۲۱	۱
۲۲	۲
۲۳	۳
۲۴	۱
۲۵	۳
۲۶	۱
۲۷	۴
۲۸	۳
۲۹	۴
۳۰	۴
۳۱	۴
۳۲	۱
۳۳	۱
۳۴	۱
۳۵	۱
۳۶	۴
۳۷	۳