توابع چند جمله ای

۱) اگر f تابع ثابت و g و h توابع همانی باشند و داشته باشیم: $\frac{۳}{۲} = \frac{۲f(۳) - g(۵)}{h(۱) + g(-۲)}$، آن‌گاه حاصل $f(۲)$ چقدر است؟ (دامنهٔ توابع f، g و h را $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید.)

قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۲
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۷}{۴}$
۴) ۳

۲) مثلث متساوی‌الاضلاعی به‌طول ضلع a و مساحت S مفروض است. کدام گزینه بیانگر S به‌عنوان تابعی از a است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $S = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a^۲$
۲) $S = ۴a^۲$
۳) $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$
۴) $S = \sqrt{۳}a^۲$

۳) اگر $f(x) = \frac{x^۲ + ax + a - ۱}{x + ۱}$ یک تابع همانی با دامنهٔ $\mathbb{R} - \{-۱\}$ باشد، مقدار a کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

تابع همانی و تابع ثابت

۴) اگر $f(x) = \frac{۲x - m}{۴ - x}$ یک تابع ثابت باشد، حاصل $m \times f(m)$ کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۱۶
۲) -۱۶
۳) ۸
۴) -۸

۵) اگر تابع $f(x) = \{(۲, m^۲ + ۱), (m + ۲, ۲n)\}$ همانی و تابع $g(x) = \{(۲, -m), (۱, ۲n)\}$ ثابت باشد، حاصل $m \times n$ کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

۶) اگر تابع $f(x)=\dfrac{ax^{۳}-bx^{۲}-cx+d}{x^{۲}+x+۱}$ یک تابع همانی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و تابع $g(x)=\dfrac{ax^{۲}+۳}{۳x^{۲}+e}$ یک تابع ثابت با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشند، خط $y=ax-e-c$ ، محور x ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۷ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۶

۷) چند تابع می‌توان از مجموعهٔ $A=\{۴,۵,۶\}$ به مجموعهٔ $B=\{۷,۸\}$ نوشت به‌طوری‌که تابع همانی یا ثابت <u>نباشند</u>؟

قلم چی- ۱۳۹۹

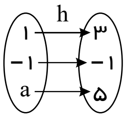
۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۴

۸)

f یک تابع ثابت، g همانی و h خطی است. در این صورت حاصل $a+b+c$ چقدر است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

$g=(a,b-۱),(۲-b,c+۱)$



x	۵	-۱
f(x)	a-۳	۲-b

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۲ ۴) -۲

۹) اگر $f(x)=\dfrac{۳x-۲}{mx+m-۱}$ تابعی ثابت باشد، مقدار $\dfrac{۱}{m}f(-۱)$ کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) $\dfrac{۲۵}{۳}$ ۴) $\dfrac{۳}{۲۵}$

۱۰) اگر $f=\{(۴a+b,b+۱),(۴a+b^{۲},۱-۲b),(b^{۲},۴)\}$ یک تابع همانی باشد، $a+b$ کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $-\dfrac{۷}{۴}$ ۲) $\dfrac{۹}{۴}$ ۳) $\dfrac{۱}{۴}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۴}$

۱۱) اگر تابع $f=\{(۲p,-۲),(۲,m-۱)\}$ یک تابع ثابت و تابع $g=\{(m+۱,p),(۲,۲)\}$ یک تابع همانی باشد، آنگاه $p+m$ کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

تابع قدرمطلق

۱۲) مساحت محدود بین قسمتی از نمودار $y=|x-۲|+a$ که زیر محور xها قرار دارد با محور xها دو برابر مساحت سطح بسته‌ای است که نمودار با محورها در ناحیهٔ اول مختصات می‌سازد. مقدار a کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۱۳ در تابع $f(x)=|\frac{x-1}{2}+1|-1$ در صورتی‌که دامنه، بازهٔ $[-2,3]$ باشد، بزرگ‌ترین بازه برای برد این تابع کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $[-1,2]$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $[0,1]$ ۴) $[-\frac{3}{2},1]$

۱۴ مجموعه جواب نامعادلهٔ $-2\leq|\frac{x-1}{2}-1|<3$ به‌صورت بازهٔ (a,b) است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۱۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+2|-1$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۶ مساحت محور بین نمودار دو تابع $f(x)=|x+1|-1$ و $g(x)=2$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

تابع قطعه ای (چند ضابطه ای)

۱۷ مساحت محصور بین نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}3x & x\leq 2\\ 6 & 2<x<4\\ -\frac{1}{2}x+8 & x\geq 4\end{cases}$ و محور x ها کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۲۸ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

۱۸ برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & , x<0\\ -|x+2|, & x\geq 0\end{cases}$ شامل چند عدد صحیح نمی‌شود؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) بی‌شمار

۱۹ اگر تابع $f(x)$ به‌صورت زیر باشد، آن‌گاه برد تابع $a|x-1|+b$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx & , x\geq 3\\ 6x-3a & , x\leq 3\\ -3 & , x=0\end{cases}$$

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $[2,+\infty)$ ۳) $[-2,+\infty)$ ۴) $[-1,+\infty)$

۲۰ مقدار a چقدر باشد تا $f(x)=\begin{cases} x^۲+ax & x\geq -۱ \\ ۲x^۲+۳ & x\leq -۱ \end{cases}$ یک تابع دو ضابطه‌ای باشد؟ قلم چی - ۱۳۹۹

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۴ (۴) -۴

۲۱ در مجموعه‌های دامنه و برد تابع $f(x)=\begin{cases} ۴x-x^۲ & , & ۱\leq x\leq ۳ \\ ۱ & , & -۱<x<۱ \\ x^۲+۴x+۳ & , & -۳\leq x\leq -۱ \end{cases}$ چند عدد صحیح مشترک وجود دارد؟ قلم چی - ۱۳۹۹

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۲ اگر رابطه‌های $f(x)=\begin{cases} x+a & ,x\geq ۰ \\ ۲a+۱ & ,x=۰ \\ x^۲-b & ,x\leq ۰ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} |x|-۱ & ,x\geq ۰ \\ bx+c & ,x<۰ \end{cases}$ تابع باشند و $f(۰)=g(-۱)$، آن‌گاه $g(-۲)$ کدام است؟ قلم چی - ۱۳۹۹

(۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

رسم توابع به کمک انتقال

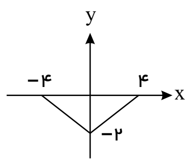
۲۳ اگر نمودار تابع $f(x)$ را ۲ واحد به چپ و ۳ واحد به بالا ببریم به $g(x)=|x|$ می‌رسیم، مقدار $f(-۱)$ کدام است؟ قلم چی - ۱۳۹۹

(۱) صفر (۲) -۲ (۳) ۶ (۴) ۴

۲۴ اگر $f(x)=\begin{cases} -x^۲+۲x & x\geq -۱ \\ x^۲+۱ & x<-۱ \end{cases}$ باشد، آن‌گاه به‌ازای کدام مجموعه مقادیر x نمودار تابع f زیر محور xها نیست؟ قلم چی - ۱۳۹۹

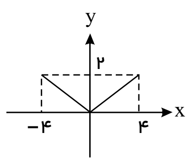
(۱) $[-۲,-۱]\cup(۰,۲)$ (۲) $(-\infty,-۱)\cup[۰,۲]$ (۳) $[۰,+\infty)$ (۴) $(-\infty,۲]$

۲۵ اگر نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت

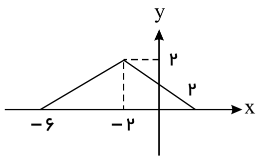


باشد، نمودار تابع $y=f(x-۲)+۲$ کدام است؟ قلم چی - ۱۳۹۹

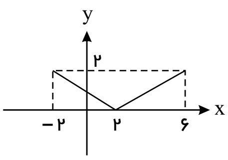
(۱)



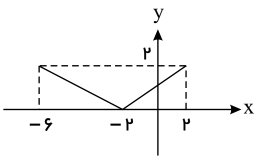
(۲)



(۳)



(۴)



۲۶ نمودار $y = x^{۲} - ۲x$ را ۳ واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا منتقل کرده‌ایم، این نمودار درکدام طول با خط $y = ۲x + ۳$ تماس دارد؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۷ اگر دامنه و برد تابع $f(x)$ به‌ترتیب $[-۲, ۲]$ و $(-۳, ۱]$ باشد، دامنه و برد $y = f(x + ۲) + ۳$ به‌ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه آمده است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $[-۴, ۰]$ و $[۰, ۴)$ ۲) $[-۴, ۰]$ و $[-۶, -۲)$ ۳) $[۰, ۴]$ و $[۰, ۴)$ ۴) $[۰, ۴]$ و $[-۶, -۲)$

۲۸ هر نقطه از تابع $y = x^{۲} - ۴x - ۱$ را ۳ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا منتقل می‌کنیم، تابع جدید از کدام نقطه نمی‌گذرد؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $(۰, -۳)$ ۲) $(۱, ۰)$ ۳) $(-۱, ۵)$ ۴) $(۲, ۵)$

پاسخنامه تشریحی

۱ ۱ ۲ **۳** ۴ از آن‌جایی که h و g توابع همانی هستند؛ $g(x)=x$ و $h(x)=x$ است؛ داریم:

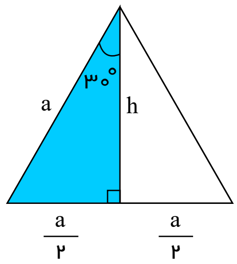
$$\frac{۲f(۳)-g(۵)}{h(۱)+g(-۲)}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{۲f(۳)-۵}{۱-۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴f(۳)-۱۰=-۳\Rightarrow ۴f(۳)=۷\Rightarrow f(۳)=\frac{۷}{۴}$$

چون f تابع ثابت است، پس $f(۲)=\frac{۷}{۴}$.

۲ ۱ ۲ **۳** ۴ راه حل اول:

ابتدا ارتفاع h را برحسب a به‌دست می‌آوریم:



در مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ °۳۰، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ °۳۰ نصف وتر است. (از $\sin ۳۰^\circ$ کمک بگیرید.)

$$\text{فیثاغورس}:\ (\frac{a}{۲})^۲+h^۲=a^۲\Rightarrow\frac{۱}{۴}a^۲+h^۲=a^۲$$

$$\Rightarrow h^۲=\frac{۳}{۴}a^۲\Rightarrow h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\ (۱)$$

در نتیجه مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{a\times h}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

راه حل دوم:

می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a ارتفاع برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ و مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است.

۳ **۱** ۲ ۳ ۴ چون f همانی است، ضابطهٔ آن به‌صورت $y=x$ است، پس:

$$f(x)=\frac{x^۲+ax+a-۱}{x+۱}=x\Rightarrow x^۲+ax+a-۱=x^۲+x\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ a-۱=۰\Rightarrow a=۱\end{cases}$$

۴ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\text{ضابطهٔ تابع ثابت}:\ f(x)=k$$

$$\Rightarrow\frac{۲x-m}{۴-x}\Rightarrow\underbrace{۲x-m=۴k-kx}_{\text{به‌ازای } x \text{ در دامنه برقرار است.}}\Rightarrow\begin{cases}k=-۲\\ m=۸\end{cases}$$

در نتیجه:

$$\text{ضابطهٔ تابع ثابت}:\ f(x)=-۲$$

پس داریم:

$$m\times f(m)=۸\times(-۲)=-۱۶$$

۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\text{تابع همانی}:\ f(x)=x\Rightarrow ۲=m^۲+۱\Rightarrow m=۱ \text{ یا } m=-۱$$

حالت اول:

$$\text{اگر}:\ m=۱\Rightarrow ۲n=۳\Rightarrow n=\frac{۳}{۲}$$

حالت دوم:

$$m = -۱ \Rightarrow ۱ = ۲n \Rightarrow n = \frac{۱}{۲}$$: اگر

با توجه به این‌که $g(x)$ تابعی ثابت است، $۲n$ باید برابر $-m$ باشد.

حالت اول : $۲n = ۳ \quad و \quad -m = -۱ \Rightarrow ۲n \neq -m$

حالت دوم : $۲n = ۱ \quad و \quad -m = ۱ \Rightarrow ۲n = m$

بنابراین حالت دوم برقرار است و $m \times n = -۱ \times \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۲}$.

۶ ۱ **۲** ۳ ۴ تابع f همانی است، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x) = x$ است.

$$\frac{ax^۳ - bx^۲ + cx + d}{x^۲ + x + ۱} = x$$

$$\Rightarrow ax^۳ - bx^۲ + cx + d = x^۳ + x^۲ + x \xrightarrow{\text{به‌ازای هر } x \text{ برقرار است.}} \begin{cases} a = ۱ \\ b = -۱ \\ c = ۱ \\ d = ۰ \end{cases}$$

تابع g ثابت است، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $g(x) = k$ است. $(k \in \mathbb{R})$.

$$\frac{ax^۲ + ۳}{۳x^۲ + e} = k \Rightarrow ax^۲ + ۳ = ۳kx^۲ + ke$$

$$\xrightarrow{\text{به‌ازای هر } x \text{ برقرار است.}} \begin{cases} ۳k = a \xrightarrow{a=۱} k = \frac{۱}{۳} \\ ke = ۳ \xrightarrow{k=\frac{۱}{۳}} e = ۹ \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$y = ax - e - c \xrightarrow{a=۱, e=۹, c=۱} y = ۰ \Rightarrow x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow x = ۱۰$$

خط $y = x - ۱۰$ محور x ها را در $x = ۱۰$ قطع می‌کند.

۷ ۱ ۲ **۳** ۴ اعضای مجموعهٔ A را به‌عنوان مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های تابع قرار می‌دهیم. برای مؤلفهٔ دوم هر زوج مرتب، ۲ حالت (۷ یا ۸) داریم، پس:

$$f = \{(۴, \frac{\;}{۲}), (۵, \frac{\;}{۲}), (۶, \frac{\;}{۲})\}$$ طبق اصل ضرب : $۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

تابع f همانی نمی‌تواند باشد ولی در دو حالت زیر ثابت است:

$$\begin{cases} f = \{(۴, ۷), (۵, ۷), (۶, ۷)\} \\ f = \{(۴, ۸), (۵, ۸), (۶, ۸)\} \end{cases}$$

پس تعداد کل تابع‌های مطلوب برابر با $۸ - ۲ = ۶$ است.

۸ **۱** ۲ ۳ ۴ از اینکه f یک تابع ثابت است؛ نتیجه می‌گیریم مؤلفه‌های دوم مساوی هستند.

$$a - ۳ = ۲ - b \Rightarrow a + b = ۵ \quad (۱)$$

h یک تابع خطی است، پس:

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۳ - (-۱)}{۱ - (-۱)} = \frac{۴}{۲} = ۲ \;,\quad h(x) = ۲x + ۱$$

$$h(a) = ۵ \Rightarrow ۲a + ۱ = ۵ \Rightarrow a = ۲$$

$$(۱) : ۲ + b = ۵ \Rightarrow b = ۳$$

g یک تابع همانی است، یعنی $g(x) = x$ پس:

$$۲ - b = c + ۱ \xrightarrow{b=۳} ۲ - ۳ = c + ۱$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow c = -۲$$

$$a + b + c = a = ۲, b = ۳, c = -۲ \Rightarrow ۲ + ۳ + (-۲) = ۳$$

۹ ۱ ۲ **۳** ۴ تابع مذکور تابع ثابت باشد؛ باید به‌صورت $f(x) = k$ باشد $(k \in \mathbb{R})$. پس:

$$f(x)=\frac{۳x-۲}{mx+m-۱}=\frac{۳(x-\frac{۲}{۳})}{m(x+\frac{m-۱}{m})}\xrightarrow[\text{باید: } -\frac{۲}{۳}=\frac{m-۱}{m}]{\text{برای این‌که تابع ثابت باشد}}-۲m=۳m-۳\Rightarrow ۵m=۳\Rightarrow m=\frac{۳}{۵}\Rightarrow f(x)=\frac{۳}{m}=\frac{۳}{\frac{۳}{۵}}=۵\Rightarrow f(-۱)=۵\quad(۲)$$

در نتیجه بنابر (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{۱}{m}f(-۱)=\frac{۱}{\frac{۳}{۵}}\times ۵=\frac{۵}{۳}\times ۵=\frac{۲۵}{۳}$$

۱۰ ۴ ۳ ۲ **۱**

ضابطهٔ تابع همانی به‌صورت $f(x)=x$ است یعنی در هر زوج مرتب مؤلفهٔ اول و مؤلفهٔ دوم برابر است ؛ پس خواهیم داشت:

$$۴a+b=b+۱\Rightarrow ۴a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

$$۴a+b^۲=۱-۲b\xrightarrow{a=\frac{۱}{۴}}۱+b^۲=۱-۲b\Rightarrow b^۲+۲b=۰\Rightarrow b(b+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}b=-۲\\ b=۰\end{cases}$$

در مورد $(b^۲,۴)$ نیز باید $b^۲=۴$ باشد که $b=\pm ۲$ می‌شود و با توجه به نتایج قبلی، فقط مقدار -۲ قابل قبول است. پس:

$$a+b\xrightarrow{a=\frac{۱}{۴}\,,\,b=-۲}\frac{۱}{۴}-۲=-\frac{۷}{۴}$$

۱۱ ۴ **۳** ۲ ۱ تابع ثابت، تابعی است که برد آن تنها شامل یک عضو باشد، یعنی داریم:

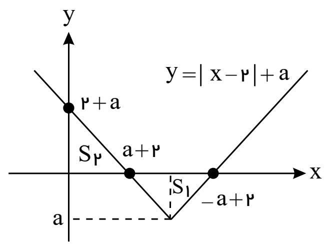
$$f=\{(۲p,-۲),(۲,m-۱)\}\Rightarrow m-۱=-۲\Rightarrow m=-۱$$

از طرفی تابع همانی، تابعی است که مؤلفهٔ اول و دوم هر زوج مرتب آن یکسان باشد، یعنی داریم:

$$g=\{(m+۱,p),(۲,۲)\}\Rightarrow m+۱=p\xrightarrow{m=-۱}-۱+۱=p\Rightarrow p=۰\Rightarrow p+m=۰-۱=-۱$$

۱۲ ۴ **۳** ۲ ۱ چون نمودار به پایین محور xها انتقال یافته پس حتماً $a<۰$ می‌باشد.

محل برخورد با محور xها : $y=۰\Rightarrow |x-۲|+a=۰\Rightarrow\begin{cases}x-۲=a\\ x-۲=-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=a+۲\\ x=-a+۲\end{cases}$



چون $a<۰$ می‌باشد پس $-a+۲>a+۲$ است.

$$S_۱=۲S_۲\Rightarrow\frac{|(-a+۲)-(a+۲)|\times|a|}{۲}=\frac{۲|a+۲||a+۲|}{۲}\Rightarrow a^۲=a^۲+۴a+۴\Rightarrow ۴a+۴=۰\Rightarrow a=-۱$$

۱۳ ۴ ۳ **۲** ۱

$$f(x)=|\frac{x-۱+۲}{۲}|-۱=|\frac{x+۱}{۲}|-۱$$

راه‌حل اول:

$$-۱\le x\le ۳\Rightarrow f(x)=\frac{x+۱}{۲}-۱=\frac{x-۱}{۲}\Rightarrow -۱\le f(x)\le ۱$$

$$-۲\le x\le -۱\Rightarrow f(x)=\frac{-x-۱}{۲}-۱=\frac{-x-۳}{۲}\Rightarrow -۱\le f(x)\le -\frac{۱}{۲}\Rightarrow R_f=[-۱,۱]$$

راه‌حل دوم:

$$-۲\le x\le ۳\Rightarrow -۱\le x+۱\le ۴\Rightarrow -\frac{۱}{۲}\le\frac{x+۱}{۲}\le ۲\Rightarrow ۰\le|\frac{x+۱}{۲}|\le ۲\Rightarrow -۱\le|\frac{x+۱}{۲}|-۱\le ۱\Rightarrow \text{برد تابع}=R_f=[-۱,۱]$$

۱۴ **۴** ۳ ۲ ۱

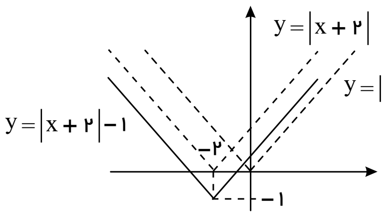
باید هر دو طرف نامعادلهٔ داده شده را حل کنیم و سپس بین جواب‌ها اشتراک بگیریم:

$$|\frac{x-۱}{۲}-۱|\ge -۲\Rightarrow \text{همواره درست است}\Rightarrow x\in\mathbb{R}$$

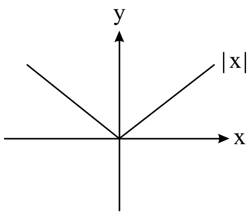
$$|\frac{x-۱}{۲}-۱|<۳\Rightarrow|\frac{x-۳}{۲}|<۳\xrightarrow{\times ۲}|x-۲|<۶\Rightarrow -۶<x-۳<۶\xrightarrow{+۳}-۳<x<۹\Rightarrow(a,b)=(-۳,۹)\Rightarrow max(b-a)=۹-(-۳)=۱۲$$

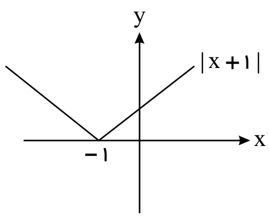
۱۵ **۴** ۳ ۲ ۱ برای رسم $f(x)=|x+۲|-۱$ باید ابتدا نمودار $y=|x|$ را ۲ واحد به چپ، سپس ۱ واحد به پایین منتقل کنیم.

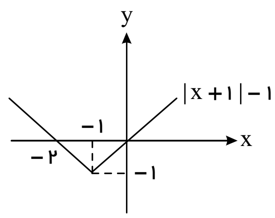
با توجه به شکل، نمودار تابع از ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

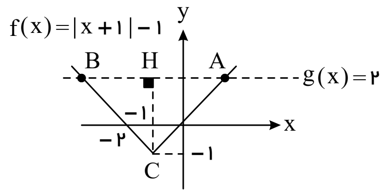


۱۶ ۴ **۳** ۲ ۱







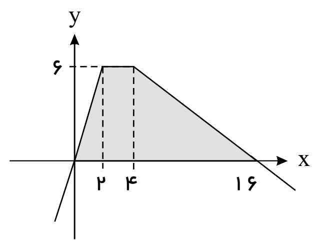


$$x \geq -۱ \Rightarrow f(x) = (x+۱) - ۱ = x \Rightarrow A = \left| \begin{matrix} ۲ \\ ۲ \end{matrix} \right.$$

$$x < -۱ \Rightarrow f(x) = -(x+۱) - ۱ = -x - ۲ \Rightarrow -x - ۲ = ۲ \Rightarrow x = -۴ \Rightarrow B \left| \begin{matrix} -۴ \\ ۲ \end{matrix} \right.$$

$$\Rightarrow AB = ۶ \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{AB \times CH}{۲} = \frac{۶ \times ۳}{۲} = ۹$$

۱۷ **۴** ۳ ۲ ۱ تابع داده شده را رسم می‌کنیم:



$y = ۳x :$

x	۰	۲
y	۰	۶

$y = ۶ :$

x	۲	۴
y	۶	۶

$y = -\frac{۱}{۲}x + ۸ :$

x	۴	۱۶
y	۶	۰

با توجه به شکل بالا مساحت محصور، یک ذوزنقه به ارتفاع ۶ و طول قاعده‌های ۲ و ۱۶ است.

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times (۲ + ۱۶) = ۵۴$$

۱۸ ۴ ۳ **۲** ۱

$$\left. \begin{array}{l} x < ۰ \;\Rightarrow\; x^۲ > ۰ \Rightarrow x^۲ + ۱ > ۱ \\ x \geq ۰ \Rightarrow x + ۲ \geq ۲ \Rightarrow |x+۲| \geq ۲ \Rightarrow -|x+۲| \leq -۲ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{برد تابع} = (-\infty, -۲] \cup (۱, +\infty)$$

برد تابع $f(x)$، اعداد صحیح $۱ ,۰ ,۱-$ را شامل نمی‌شود.

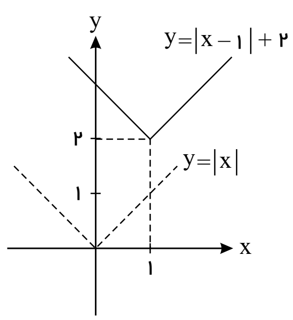
۱۹ ۴ ۳ **۲** ۱

$f(x)$ نمایش یک تابع است بنابراین برای هر عضو از دامنهٔ آن تنها یک عضو نظیر از برد داریم.

$$x = ۰ \Rightarrow (۰, -۳), (۰, ۶(۰) - ۳a) \Rightarrow -۳ = ۰ - ۳a \Rightarrow a = ۱ \quad (۱)$$

$$x = ۳ \Rightarrow (۳, ۶(۳) - ۳a), (۳, a(۳)^۲ + b(۳)) \Rightarrow ۱۸ - ۳a = ۹a + ۳b \xrightarrow{(۱)} ۱۸ - ۳(۱) = ۹(۱) + ۳b \Rightarrow ۳b = ۶ \Rightarrow b = ۲$$

با رسم نمودار $|x - ۱| + ۲$ با استفاده از انتقال نمودار $y = |x|$ برد آن را به‌دست می‌آوریم.



بنابراین برد این تابع برابر بازهٔ $[۲, +\infty)$ است.

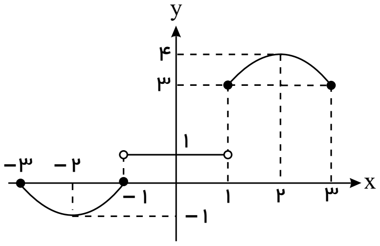
۲۰ **۴** ۳ ۲ ۱ رابطهٔ f تابع است، هرگاه به‌ازای هر ورودی فقط یک خروجی داشته باشد. در تابع f به‌ازای $x = -۱$، ضابطه‌های بالا و پایین باید خروجی یکسان بدهند.

$$f(-۱) = (-۱)^۲ + a(-۱) = ۱ - a \;,\; f(-۱) = ۲(-۱)^۲ + ۳ = ۵$$

$\Rightarrow 1 - a = 5 \Rightarrow a = -4$

۲۱ ۴ **۳** ۲ ۱ برای به‌دست آوردن برد، نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 = -(x-2)^2 + 4 & , \quad 1 \le x \le 3 \\ 1 & , \quad -1 < x < 1 \\ x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1 & , \quad -3 \le x \le -1 \end{cases}$$



$D_f = [-3, 3]$

$R_f = [-1, 0] \cup [3, 4] \cup \{1\}$

$D_f \cap R_f = [-1, 0] \cup \{1, 3\} \Rightarrow$ شامل ۴ عدد صحیح

۲۲ ۴ ۳ **۲** ۱

اگر f تابع باشد باید میانه‌های آن به‌ازای $x = 0$ مقدار یکسانی داشته باشند:

یعنی:

$$(0) + a = 2a + 1 = (0) - b \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

از طرفی دیگر داریم:

$$f(0) = g(-1) \Rightarrow 2a + 1 = -b + c \xrightarrow{a=-1, b=1} -2 + 1 = -1 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} |x| - 1 & x \ge 0 \\ x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(-2) = -2$$

۲۳ ۴ ۳ ۲ **۱** عملیات گفته شده را باید برعکس انجام دهیم. یعنی:

$$g(x) = |x| \xrightarrow{\text{۲ واحد راست}} h(x) = |x - 2|$$

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} f(x) = |x - 2| - 3 \xrightarrow{x=-1} f(-1) = 0$$

۲۴ ۴ ۳ **۲** ۱

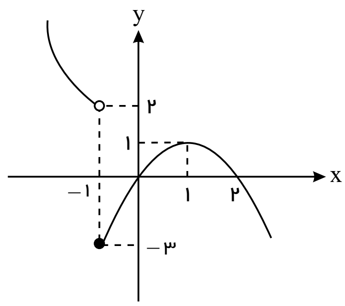
$$y = -x^2 + 2x = -(x^2 - 2x + 1) + 1 = -(x-1)^2 + 1$$

برای رسم نمودار تابع $y = -(x-1)^2 + 1$، نمودار تابع $y = -x^2$ را یک واحد به سمت راست و سپس یک واحد به سمت بالا انتقال داده‌ایم و آن را در محدودهٔ $x \ge -1$ رسم کرده‌ایم.

همچنین برای رسم نمودار $y = x^2 + 1$، نمودار تابع $y = x^2$ را یک واحد به سمت بالا انتقال داده‌ایم و نمودار را برای $x < -1$ رسم کرده‌ایم.

نمودار تابع را در شکل زیر رسم کرده‌ایم:

$$f(x) \ge 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup [0, 2]$$



۲۵ ۴ **۳** ۲ ۱ مطابق نمودار گزینهٔ «۳»، اگر نمودار تابع $y = f(x)$ دو واحد به سمت راست و دو واحد به سمت بالا منتقل شود نمودار تابع $y = f(x-2) + 2$ به‌دست می‌آید.

۲۶ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$

$$\xrightarrow{\text{سه واحد به چپ}} y = (x - 1 + 3)^2 - 1$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y = (x+2)^2 - 1 + 1 = (x+2)^2$$

برای یافتن طول نقطهٔ تماس دو نمودار، آن‌ها را مساوی یک‌دیگر قرار می‌دهیم.

$$y=(x+۲)^۲=۲x+۳\Rightarrow x^۲+۴x+۴=۲x+۳\Rightarrow x^۲+۲x+۱=۰\Rightarrow (x+۱)^۲=۰\Rightarrow x=-۱$$

۲۷ ۴ ۳ ۲ **۱**

تابع $y=f(x+۲)+۳$ را می‌توان به روش انتقال تابع $f(x)$ به‌دست آورد. به این منظور ابتدا $f(x)$ را روی محور x دو واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا $f(x+۲)$ به‌دست آید.

(مرحلهٔ یک) سپس تابع را در راستای محور yها سه واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا تابع y به‌دست آید (مرحلهٔ دو).

حال در هر یک از مراحل تغییراتی را که روی دامنه و برد به‌وجود می‌آید، مشخص می‌کنیم. در مرحلهٔ یک تنها دامنه به $([-۲-۲,۲-۲]=[-۴,۰])$ تغییر می‌کند.در مرحلهٔ فقط تغییراتی در برد به‌وجود می‌آید. $[-۳+۳,۱+۳)=[۰,۴)$

پس دامنه و برد تابع $y=f(x+۲)+۳$ به ترتیب $[-۴,۰]$ و $[۰,۴)$ است.

۲۸ ۴ **۳** ۲ ۱

ابتدا تابع را به صورت مربع کامل در می‌آوریم:

$$y=x^۲-۴x-۱+۴=(x-۲)^۲-۵$$

حال $x\to x+۳$ تبدیل می‌شود و به سمت راست معادله یک واحد اضافه می‌کنیم:

$$y=(x-۲)^۲-۵\xrightarrow{x\to x+۳}y=(x+۱)^۲-۵\xrightarrow{+۱}y=(x+۱)^۲-۴$$

حال دقت کنید گزینهٔ «۳» در تابع صدق نمی‌کند:

$$(-۱,۵)\notin f$$

روش دوم: هر کدام از نقاط گزینه‌ها را ۳ واحد به راست یک واحد به پایین منتقل کنید و با صورت سوال چک کنید:

$(۰,-۳)\to(۳,-۴)\in y=x^۲-۴x-۱$

$(۱,۰)\to(۴,-۱)\in y=x^۲-۴x-۱$

$(-۱,۵)\to(۲,۴)\notin y=x^۲-۴x-۱$ جواب

$(۲,۵)\to(۵,۴)\in y=x^۲-۴x-۱$

پاسخنامه کلیدی

	۱	۲	۳	۴
۱			■	
۲			■	
۳	■			
۴		■		
۵				■
۶		■		
۷			■	
۸	■			
۹			■	
۱۰	■			
۱۱			■	
۱۲			■	
۱۳		■		
۱۴				■
۱۵				■
۱۶			■	
۱۷				■
۱۸		■		
۱۹		■		
۲۰				■
۲۱			■	
۲۲		■		
۲۳	■			
۲۴		■		
۲۵			■	
۲۶	■			
۲۷	■			
۲۸			■	