



مهدی شاکریان

نام آزمون: دهم فصل ۴ درس ۲

تلفن سبقت: ۰۵۱-۳۸۱۱۷

تلگرام: riazi\_jazb

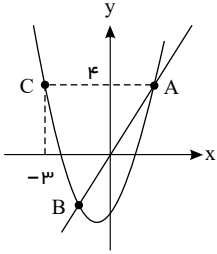
۱) اگر سهمی  $y = ax^2 - bx + c$  محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض  $-\frac{4}{b}$  قطع کند و با محور طول‌ها فقط در نقطه‌ای به طول  $-2$  مشترک باشد،  $a$  کدام است؟ (سهمی پایین محور  $x$  ها قرار دارد).

قلم چی- ۱۳۹۹

- ①  $-\frac{1}{2}$       ②  $\frac{1}{2}$       ③  $-2$       ④  $-\frac{1}{4}$

۲) در نمودار زیر خط  $d$  نمودار سهمی را در نقاط  $A = (x_A, 4)$  و  $B = (-1, -2)$  قطع کرده است. مجموع طول و عرض نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹



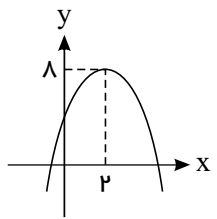
- ①  $-1$       ②  $-3.5$       ③  $-2.5$       ④  $-3$

۳) اگر پایین‌ترین نقطه سهمی  $y = x^2 - m(x - 1) + 4$  روی نیمساز ربع دوم (در ناحیه دوم) قرار داشته باشد، مجموع مقادیر قابل قبول برای  $m$  کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

- ①  $-2$       ②  $8$       ③  $-4$       ④  $6$

قلم چی- ۱۳۹۹



۴) نمودار سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  به صورت زیر است. کدام گزینه ضابطه این سهمی است؟

- ①  $y = x^2 + 2x + 5$       ②  $y = -x^2 - 2x + 3$       ③  $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$       ④  $y = -x^2 + 4x + 4$

۵) نمودار سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض  $2$  و محور  $x$ ها را در دو نقطه به طول‌های  $(-1)$  و  $(2)$  قطع می‌کند، این سهمی از کدام یک از نقاط زیر عبور می‌کند؟

قلم چی- ۱۳۹۹

- ①  $(1, 3)$       ②  $(4, 10)$       ③  $(3, -7)$       ④  $(5, -18)$

قلم چی- ۱۳۹۹

۶) اگر رأس سهمی  $y = 2x^2 - 8x + a + 1$  روی خط  $y = -x$  باشد،  $a$  کدام است؟

- ①  $5$       ②  $-5$       ③  $4$       ④  $-4$



۷) اگر رأس سهمی  $y = -2x^2 + bx + c$  نقطه  $(-2, 2)$  باشد، حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $-2x^2 + bx + c = 0$  کدام است؟

- قلم چی- ۱۳۹۹ ۴ ۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۱۳۹۹

۸) کدام یک از سهمی‌های زیر فقط از ناحیه چهارم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

- قلم چی- ۱۳۹۹ ۴ ۱)  $y = -(x+1)^2 - 3$  ۲)  $y = x^2 + x + 1$  ۳)  $y = x^2 + 3x + 2$  ۴)  $y = (x+2)^2 + 1$

۹) اگر  $(-1, 20)$  و  $(2, 5)$  دو نقطه از یک سهمی و  $x = 1$  خط تقارن آن باشد، این سهمی در نقطه‌ای با کدام عرض محور  $y$  ها را قطع می‌کند؟

- قلم چی- ۱۳۹۹ ۵ ۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱۳۹۹

۱۰) نمودار سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  با فرض  $a < -1$ ،  $b > 3$  و  $c > 2$  کدام یک می‌تواند باشد؟



۱۱) به‌ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، نمودار دو سهمی به معادله‌های  $y = ax^2 + 3x + 2$  و  $y = 3x^2 + 2x + 1$  باهم برخورد قلم چی- ۱۳۹۹

نمی‌کنند؟

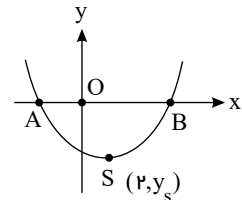
- ۱)  $(0, +\infty)$  ۲)  $(\frac{13}{4}, +\infty)$  ۳)  $(-\infty, \frac{13}{4})$  ۴) در هر صورت حداقل یک نقطه تلاقی دارند.

۱۲) اگر یک سهمی از نقاط  $A(1, 3)$  و  $B(3, 3)$  بگذرد و رأس آن روی خط  $y = -x$  قرار داشته باشد، رأس این سهمی با رأس کدام یک از

سهمی‌های زیر یکسان است؟

- ۱)  $y = x^2 + 4x + 6$  ۲)  $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$  ۳)  $y = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$  ۴)  $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 3$

۱۳) در سهمی زیر، اگر  $|OA| = |OB|$  باشد، طول نقطه  $B$  کدام است؟



- ۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۴

۱۴) سهمی  $y = (m-1)x^2 + (m-1)x + 1$  به‌ازای چند مقدار صحیح  $m$  بر محور  $x$  ها مماس است؟

- قلم چی- ۱۳۹۹ ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هیچ مقدار ۴) بی‌شمار



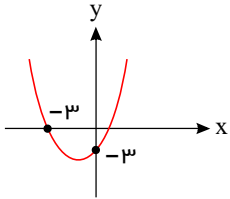
۱۳۹۹- قلم چی- ۱۵ خط به معادله  $y = -\frac{5}{2}x^2 - 3x + m$  نمودار سهمی به معادله  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + m$  را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.  $m$  کدام گزینه است؟

- ۱) -۲      ۲) -۱      ۳) ۱      ۴) ۲

۱۳۹۹- قلم چی- ۱۶ محور تقارن سهمی  $y = x^2 + 4x + k$  همین سهمی را در نقطه‌ای به عرض ۲- قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که سهمی روی محور  $x$  ها ایجاد می‌کند، کدام است؟

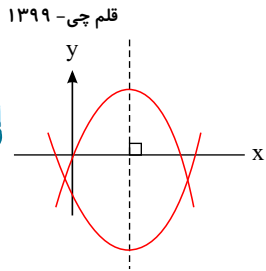
- ۱)  $2\sqrt{3}$       ۲)  $4\sqrt{3}$       ۳)  $2\sqrt{2}$       ۴)  $4\sqrt{2}$

۱۳۹۹- قلم چی- ۱۷ اگر نمودار سهمی  $f(x) = (2-a)x^2 + bx + c$  و  $a \in \mathbb{N}$  به صورت زیر باشد.  $b$  کدام است؟



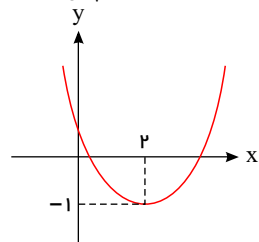
- ۱) ۲      ۲) -۲      ۳) ۳      ۴) -۳

۱۳۹۹- قلم چی- ۱۸ نمودار سهمی‌های  $y = x^2 - 4x - b$  و  $y = -2x^2 + bx + c$  در شکل زیر رسم شده است. رأس‌های دو سهمی از هم چند واحد فاصله دارند؟



- ۱) ۴      ۲) ۱۲      ۳) ۱۶      ۴) ۲۰

۱۳۹۹- قلم چی- ۱۹ اگر معادله سهمی زیر به صورت  $y = \frac{x^2}{a} - ax + b$  باشد، مقدار  $ab$  کدام است؟



- ۱) ۲      ۲) -۲      ۳) ۴      ۴) -۴

۱۳۹۹- قلم چی- ۲۰ اگر دو نقطه متمایز  $A(2, a+12)$  و  $B(m, a+12)$  روی سهمی به معادله  $y = ax^2 + 4ax + a$  باشند، آن‌گاه حاصل  $a+m$  کدام است؟

- ۱) ۶      ۲) -۶      ۳) -۵      ۴) ۵

۱۳۹۹- قلم چی- ۲۱ در سهمی  $y = 4x^2 - 4x + 5$  فاصله رأس سهمی از خط  $y = -1$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۴      ۴) ۵

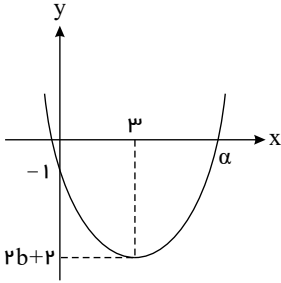


قلم چی- ۱۳۹۹

۲۲) اگر رأس یک سهمی نقطه  $S(2, -1)$  باشد و سهمی از نقطه  $(3, 2)$  عبور کند، عرض از مبدأ این سهمی کدام است؟

- ۱) -۸      ۲) ۴      ۳) ۱۱      ۴) ۱۲

قلم چی- ۱۳۹۹



۲۳) اگر نمودار سهمی  $y = x^2 + bx + c$  به صورت زیر باشد، مقدار  $\alpha$  کدام است؟

- ۱)  $6 + \sqrt{10}$       ۲)  $3 + \sqrt{10}$       ۳)  $3 + 2\sqrt{10}$       ۴)  $6 + 2\sqrt{10}$

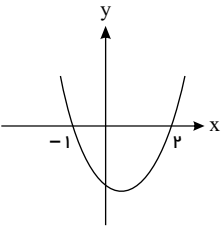
۲۴) اگر رأس سهمی  $y = ax^2 + 2ax - 3$  روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار داشته باشد و سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض  $b$  قطع کند، حاصل  $a \cdot b$  کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

- ۱) -۳      ۲) -۲      ۳) -۶      ۴) ۶

قلم چی- ۱۳۹۹

۲۵) شکل مقابل مربوط به سهمی  $y = 2x^2 + bx + c$  است. عرض رأس سهمی  $y = cx^2 - x + b$  کدام است؟



- ۱)  $-\frac{31}{16}$       ۲)  $\frac{31}{16}$       ۳) -۲      ۴) ۲

۲۶) نمودار تابعی به صورت یک سهمی است که از نقاط  $(1, 0)$  و  $(2, -1)$  می‌گذرد و محور  $y$  ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند. اگر دامنه این تابع  $\mathbb{R}$  باشد، برد این تابع کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۹

- ۱)  $[-2, +\infty)$       ۲)  $[1, +\infty)$       ۳)  $[2, +\infty)$       ۴)  $[-1, +\infty)$

قلم چی- ۱۳۹۹

۲۷) به ازای کدام مقادیر  $m$ ، سهمی  $y = (\frac{m}{2} + 2)x^2 - mx + \frac{m}{2} - 1$  همواره بالای محور  $x$  ها است؟

- ۱)  $m > 4$       ۲)  $m > -4$       ۳)  $m < -4$       ۴)  $m < 4$

۲۸) نقطه  $(2, 3)$  رأس یک سهمی درجه دوم است که نمودار آن، پاره‌خطی به طول ۶ روی محور  $x$  ها جدا می‌کند. نمودار این منحنی محور  $y$  ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

قلم چی- ۱۳۹۹

- ۱)  $\frac{7}{4}$       ۲)  $\frac{7}{2}$       ۳)  $\frac{4}{3}$       ۴)  $\frac{5}{3}$



۲۹ اگر  $(2, 5)$  و  $(-1, 20)$  دو نقطه از یک سهمی و  $x = 1$  خط تقارن آن باشد، این سهمی در نقطه‌ای با کدام عرض محور  $y$ ها را قطع می‌کند؟

قلم چی - ۱۳۹۹

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

۳۰ نمودار سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  محور  $x$ ها را در نقاطی با طول‌های  $-1$  و  $3$  و محور  $y$ ها را در نقطه‌ای با عرض  $6$  قطع می‌کند. فاصله رأس سهمی از محور  $x$ ها کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۹

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۸ (۱)



## پاسخنامه تشریحی

سهمی مورد نظر با محور  $x$  فقط در نقطه‌ای به طول  $x = -2$  مشترک است، یعنی یک ریشه مضاعف دارد و معادله آن به شکل زیر است:

$$y = a(x + 2)^2$$

سهمی، محور عرض‌ها را در  $-\frac{4}{b}$  قطع می‌کند.

$$\left. \begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow y = 4a = -\frac{4}{b} \Rightarrow b = -\frac{1}{a} \\ y = a(x + 2)^2 &= ax^2 + 4ax + 4a = ax^2 - bx + c \Rightarrow 4a = -b \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow 4a = -\left(-\frac{1}{a}\right) \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{سهمی پایین محور } x \text{ ها قرارداد.}} a = -\frac{1}{2}$$

با توجه به این که خط از دو نقطه  $(0, 0)$  و  $B = (-1, -2)$  عبور می‌کند، معادله خط به صورت  $y = 2x$  است. طول نقطه  $A$  را به دست می‌آوریم:

$$y = 2x \xrightarrow{y_A = 4} x_A = 2$$

اگر معادله سهمی را به صورت  $y = ax^2 + bx + c$  در نظر بگیریم، سه نقطه  $B = (-1, -2)$ ،  $C = (-3, 4)$  و  $A = (2, 4)$  در این معادله صدق می‌کند: بنابراین:

$$\left\{ \begin{aligned} a - b + c &= -2 && \text{تفریق} \\ 9a - 3b + c &= 4 && \longrightarrow 8a - 2b = 6 \\ 4a + 2b + c &= 4 && \text{تفریق} \\ 4a + 2b + c &= 4 && \longrightarrow 5a - 5b = 0 \end{aligned} \right. \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}$$

در نتیجه معادله سهمی به صورت  $y = x^2 + x - 2$  است. اکنون برای به دست آوردن مختصات محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات داریم:

$$y=0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$$

$$x=0 \rightarrow y = 0 + 0 - 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow -2 + 1 - 2 = -3$$

ابتدا معادله سهمی را مرتب می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - mx + m + 4$$

می‌دانیم که اگر  $a > 0$  باشد، مختصات پایین‌ترین نقطه سهمی به صورت  $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$  است. چون این نقطه روی نیمساز ربع دوم یعنی خط  $y = -x$  قرار دارد. بنابراین مختصات نقطه در خط صدق می‌کند (توجه کنید که چون پایین‌ترین نقطه روی نیمساز ناحیه دوم است طول آن منفی است.)

$$-\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow \frac{m}{2} < 0 \Rightarrow m < 0$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\left(\frac{-b}{2a}\right) \Rightarrow \frac{-\Delta}{4a} = \frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{\Delta}{2} = b \Rightarrow \Delta = -2b \quad (1)$$

با توجه به معادله  $y = x^2 - mx + m + 4$  داریم:

$$\xrightarrow{(1)} b^2 - 4ac = m^2 - 4(1)(m + 4) = -2(-m)$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m - 16 = +2m \Rightarrow m^2 - 6m - 16 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 8)(m + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 8 \text{ غ.ق.} \\ m = -2 \end{cases}$$

توجه کنید که در  $m = 8$  شرط  $m < 0$  صدق نمی‌کند.

می‌دانیم در سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  رأس سهمی برابر است با:

$$\text{رأس سهمی: } x = -\frac{b}{2a}$$

مختصات رأس سهمی  $(2, 8)$  است. حال مختصات رأس سهمی را در گزینه‌ها چک می‌کنیم:

گزینه ۱: ضریب  $x^2$  باید منفی باشد، پس گزینه ۱ نادرست است.

گزینه ۲: نادرست

گزینه ۳: نادرست

$$\text{رأس سهمی: } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2(-1)} = -1 \neq 2$$



$$\text{رأس سهمی : } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2(-\frac{1}{2})} = -2 \neq 2$$

گزینه ۴: درست

$$\text{رأس سهمی : } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2$$

روش اول: نقطه (۰, ۲) بر روی سهمی قرار دارد، بنابراین:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow 2 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 2$$

همچنین  $x = 2$  و  $x = -1$  ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  هستند، در نتیجه:

$$\xrightarrow{x=-1} a(-1)^2 + b(-1) + 2 = 0 \Rightarrow a - b = -2 \quad (1)$$

$$\xrightarrow{x=2} a(2)^2 + b(2) + 2 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -2 \quad (2)$$

در نتیجه بنابر (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ 2a - 2b = -4 \end{cases} \Rightarrow 6a = -6 \Rightarrow a = -1$$

$$a - b = -2 \xrightarrow{a=-1} -1 - b = -2 \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow y = ax^2 + bx + c \stackrel{a=-1, b=1, c=2}{=} -x^2 + x + 2$$

باتوجه به معادله سهمی، این سهمی از نقطه (۵, -۱۸) عبور می‌کند.

$$y = -x^2 + x + 2 = -(5)^2 + 5 + 2 = -25 + 7 = -18$$

روش دوم:

ابتدا معادله سهمی را به دست می‌آوریم. چون سهمی محور  $x$ ها را در (۱) و (۲) قطع کرده است، پس (۱) و (۲) ریشه‌های سهمی هستند. بنابراین ضابطه سهمی به شکل

$y = a(x+1)(x-2)$  است. برای به دست آوردن  $a$  توجه شود که سهمی از نقطه (۰, ۲) عبور می‌کند. بنابراین:

$$y = a(x+1)(x-2) \xrightarrow{x=0} 2 = a(1)(-2) \Rightarrow a = -1$$

پس معادله سهمی به شکل  $y = -(x+1)(x-2) = -x^2 + x + 2$  است. با بررسی گزینه‌ها معلوم می‌شود که سهمی فوق از نقطه (۵, -۱۸) عبور می‌کند.

می‌دانیم در سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  رأس سهمی برابر است با:

$$\text{رأس سهمی : } x = -\frac{b}{2a}$$

ابتدا مختصات رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-8)}{2 \times 2} = 2 \xrightarrow{\text{روی خط } y=-x}$$

$$y = -x \xrightarrow{x=2} y = -2 \quad \text{در سهمی صندق می‌کند} \quad -2 = 2(2)^2 - 8(2) + a + 1 \Rightarrow a - 7 = -2 \Rightarrow a = 5$$

می‌دانیم که مختصات رأس سهمی برابر است با:

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

بنابراین در سهمی  $y = -2x^2 + bx + c$  رأس سهمی برابر است با:

$$\left(\frac{b}{4}, \frac{\Delta}{8}\right)$$

چون رأس سهمی (۲, -۲) است، پس:

$$\frac{\Delta}{8} = 2 \Rightarrow \Delta = 16, \quad \text{عرض رأس سهمی} = -\frac{b}{4} = -2 \Rightarrow b = -8$$

حال ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+8 + \sqrt{16}}{-4} = \frac{8+4}{-4} = \frac{12}{-4} = -3$$

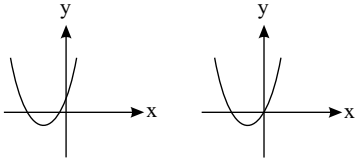
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+8 - \sqrt{16}}{-4} = \frac{8-4}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$x_1 \times x_2 = (-3)(-1) = +3$$

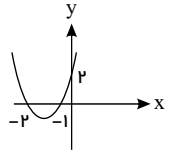
برای این که سهمی از ناحیه چهارم نگذرد باید دهانه سهمی رو به بالا باشد، پس ضریب  $x^2$  باید مثبت باشد. علاوه بر این، از آنجا که سهمی از ناحیه سوم نیز

می‌گذرد باید نمودارش یکی از دو حالت زیر باشد:



در گزینه ۱ سهمی رو به پایین است و در گزینه‌های ۲ و ۴ نمودار محور  $x$  ها را قطع نمی‌کند (از ناحیه سوم عبور نمی‌کند). بنابراین گزینه ۳ صحیح است. نمودار گزینه ۳ به صورت زیر است:

$$y = x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$



اگر محور تقارن یک سهمی خط  $x = h$  باشد، ضابطه سهمی به صورت  $y = a(x - h)^2 + k$  می‌شود: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$h = 1 \Rightarrow y = a(x - 1)^2 + k \xrightarrow{\begin{matrix} (2, 5) \\ (-1, 2) \end{matrix}} \begin{cases} 5 = a(2 - 1)^2 + k \\ 2 = a(-1 - 1)^2 + k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = a + k \\ 2 = 4a + k \end{cases} \Rightarrow a = 5, k = 0$$

در نتیجه معادله سهمی برابر است با:

$$y = 5(x - 1)^2$$

$$x=0 \rightarrow y = 5 \text{ محل برخورد با محور } y \text{ ها}$$

در سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  از آنجا که  $a < 0$  است، دهانه سهمی رو به پایین است. یعنی: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

طول رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$x = -\frac{b}{2a} \xrightarrow{b > 0, a < 0} x > 0$$

دلتای سهمی را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \xrightarrow{a < 0, c > 0} ac < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0$$

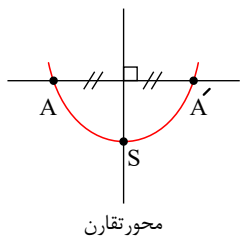
پس این سهمی در دو نقطه محور  $x$  ها را قطع می‌کند.

به ازای  $x = 0$  نیز  $y = c$  است و چون  $c > 0$  است، در نتیجه گزینه ۳ صحیح است.

زمانی این دو سهمی به هم برخورد می‌کنند که به ازای  $x$  معین،  $y$  یکسانی داشته باشند. پس باید عبارت‌های  $ax^2 + 3x + 2$  و  $3x^2 + 2x + 1$  را با هم برابر قرار دهیم تا نقطه تلاقی پیدا شود، حال که می‌خواهیم تلاقی نداشته باشند، باید این معادله، جواب نداشته باشد.

$$3x^2 + 2x + 1 = ax^2 + 3x + 2 \Rightarrow (3 - a)x^2 - x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{معادله جواب ندارد}} \Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 1 + 12 - 4a < 0 \Rightarrow 4a > 13 \Rightarrow a > \frac{13}{4}$$

باتوجه به اینکه قرینه هر نقطه سهمی نسبت به محور تقارن بر روی خود سهمی قرار دارد، پس می‌توانیم  $x_S$  را به صورت زیر به دست آوریم: به شکل زیر توجه کنید ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲



در نتیجه داریم:

$$x_S = \frac{x_A + x_{A'}}{2}$$

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

در اینجا نیز دو نقطه  $A$  و  $B$  دارای عرض یکسان‌اند پس نسبت به محور تقارن قرینه‌اند و چون رأس سهمی روی خط  $y = -x$  قرار دارد، پس  $y$  آن برابر  $-2$  است، یعنی  $S = (2, -2)$ . حال مشخصات رأس سهمی‌های داده‌شده در گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:





می‌دانیم در سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  طول رأس سهمی برابر است با:  $x_s = -\frac{b}{2a}$

گزینه ۱:

$$\text{طول رأس سهمی: } x_s = \frac{-b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$$

گزینه ۲:

$$\text{طول رأس سهمی: } x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = -2$$

گزینه ۳:

$$\left. \begin{array}{l} \text{طول رأس سهمی: } x_s = \frac{-b}{2a} = -\frac{-6}{2 \times \frac{1}{3}} = 2 \\ \text{عرض رأس سهمی: } y_s = \frac{1}{3}(2)^2 - 6(2) + 4 = 6 - 12 + 4 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow S = (2, -2)$$

گزینه ۴:

$$\left. \begin{array}{l} \text{طول رأس سهمی: } x_s = \frac{-b}{2a} = -\frac{1}{2 \times \frac{1}{4}} = 2 \\ \text{عرض رأس سهمی: } y_s = \frac{1}{4}(2)^2 - 2 + 3 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow S = (2, -2)$$

نقاط  $A$  و  $B$  محل برخورد نمودار سهمی با محور  $x$  هستند و نقطه  $S$ ، نقطه رأس سهمی است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۳)

$$2|OA| = |OB|$$

$$\text{فرض: } x_A = -a \Rightarrow x_B = 2a$$

$$\frac{x_A + x_B}{2} = x_s \Rightarrow \frac{(-a) + (2a)}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow x_B = 2a \stackrel{a=4}{=} 8$$

شرط مماس بودن بر محور  $x$  ها، داشتن ریشه مضاعف یا  $\Delta = 0$  است. زیرا سهمی تنها در یک نقطه با محور  $x$  تماس دارد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴)

$$y = (m-1)x^2 + (m-1)x + 1$$

$$\text{شرط مماس بودن: } \Delta = 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4(m-1)(1) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 - 4m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Rightarrow (m-1)(m-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \rightarrow \text{غ ق ق} \\ m=5 \rightarrow \text{ق ق} \end{cases}$$

در نتیجه تنها به ازای  $m = 5$  سهمی بر محور  $x$  ها مماس است.

خط  $y = -\frac{5}{2}$  و منحنی سهمی فقط یک نقطه تلاقی دارند. بنابراین آن نقطه رأس سهمی است و عرض رأس سهمی برابر  $-\frac{5}{2}$  است. پس: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۵)

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + m \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -3, c = m$$

در نتیجه:

$$\text{عرض رأس سهمی: می‌دانیم} \quad \frac{fac - b^2}{4a} = \frac{4 \times \frac{1}{2} \times m - 9}{4 \times \frac{1}{2}} = -\frac{5}{2} \Rightarrow 2m - 9 = -5 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$$

محل برخورد سهمی با خط تقارنش همان رأس سهمی است که عرض آن از فرمول  $-\frac{\Delta}{4a}$  به دست می‌آید. داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۶)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(k) = 9 - 4k \quad (1)$$

$$\text{عرض سهمی: } -\frac{\Delta}{4a} = -2 \xrightarrow{a=1} \Delta = 8 \quad (2)$$

$$(2), (1) \rightarrow 9 - 4k = 8 \Rightarrow 1 = 4k \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$



با جایگذاری  $k = 2$  معادله سهمی برابر است با:

معادله سهمی:  $y = x^2 + 4x + 2$

در نتیجه:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{8}}{2} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{8}}{2} \end{cases}$$

فاصله بین ریشه‌ها  
روی محور  $x$  ها

$$\left| \frac{-4 - \sqrt{8}}{2} - \frac{-4 + \sqrt{8}}{2} \right| = \left| -\frac{2\sqrt{8}}{2} \right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

سهمی رو به بالا است، پس  $2 - a > 0$  و چون  $a$  عدد طبیعی است  $a = 1$  پس معادله سهمی،  $f(x) = x^2 + bx + c$  است. عرض از مبدأ سهمی  $y = -3$  است، پس  $c = -3$  است. از طرفی  $(-3, 0)$  در معادله سهمی صدق می‌کند:

سهمی  $(-3, 0) \in$

$$\rightarrow (-3)^2 + b(-3) - 3 = 0 \Rightarrow 6 - 3b = 0 \Rightarrow b = 2$$

طبق نمودار، سهمی رو به پایین از مبدأ می‌گذرد، پس در  $y = -2x^2 + bx + c$  داریم:

می‌دانیم در سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  طول رأس سهمی برابر است با:  $x = \frac{-b}{2a}$

$y(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

هم‌چنین، طول رأس دو سهمی یکی است. پس:

$$\begin{cases} y = -2x^2 + bx \Rightarrow \text{طول رأس سهمی} : x_{s_1} = \frac{-b}{2(-2)} = \frac{b}{4} \\ y = x^2 - 4x - b \Rightarrow \text{طول رأس سهمی} : x_{s_2} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2 \end{cases} \rightarrow \frac{b}{4} = 2 \Rightarrow b = 8$$

پس معادله سهمی‌ها  $y = -2x^2 + 8x$  و  $y = x^2 - 4x - 8$  است و مقدار آن‌ها در  $x = 2$  برابر است با:

عرض رأس سهمی  $y_{s_1} = -2(2)^2 + 8(2) = 8$  عرض رأس سهمی  $y_{s_2} = 2^2 - 4(2) - 8 = -12$

و اختلاف عرض رأس‌ها برابر است با:

$8 - (-12) = 20$

می‌دانیم طول رأس سهمی به معادله  $y = a'x^2 + b'x + c'$  به صورت  $\frac{-b'}{2a'}$  است، پس:

طول رأس سهمی  $= \frac{-(-a)}{2} = 2 \Rightarrow \frac{a'}{2} = 2 \Rightarrow a' = 4 \Rightarrow a = 2$  یا  $a = -2$

چون سهمی رو به بالا است یعنی ضریب  $x^2$  مثبت است، پس  $a$  نیز مثبت است.

$a=2 \rightarrow y = \frac{x^2}{2} - 2x + b \xrightarrow{\text{سهمی } (2, -1) \in} \frac{2^2}{2} - 2(2) + b = -1 \Rightarrow 2 - 4 + b = -1 \Rightarrow -2 + b = -1 \Rightarrow b = 1 \xrightarrow{b=1, a=2} ab = 2 \times 1 = 2$

چون نقاط  $A(2, a + 12)$  و  $B(m, a + 12)$  بر روی سهمی دارای عرض یکسان هستند، پس نسبت به محور تقارن سهمی متقارن هستند و میانگین طول این

نقاط محور تقارن سهمی را نتیجه می‌دهد:

$x_s = \frac{2 + m}{2} \quad (1)$

از طرفی، معادله محور تقارن سهمی  $x = -\frac{b'}{2a'}$  است، پس:

$x_s = -\frac{b'}{2a'} = -\frac{4a}{2a} = -2 \quad (2)$

$\xrightarrow{(2), (1)} \frac{2 + m}{2} = -2 \Rightarrow m = -6$

مختصات نقطه  $A(2, a + 12)$  در معادله سهمی صدق می‌کند:

$a(2^2) + 4a(2) + a = a + 12 \Rightarrow 4a + 8a + a = a + 12 \Rightarrow 12a = 12 \Rightarrow a = 1$

در نتیجه:

$a=1, m=-6 \rightarrow a + m = 1 + (-6) = -5$

در سهمی به معادله  $y = a(x - h)^2 + k$  در سهمی به صورت  $(h, k)$  است.

$y = 4x^2 - 4x + 5 = 4x^2 - 4x + 1 + 4$

$\Rightarrow y = (2x - 1)^2 + 4 = 4(x - \frac{1}{2})^2 + 4$



بنابراین رأس سهمی نقطه  $(\frac{1}{2}, 4)$  است و فاصله این نقطه از خط افقی  $y = -1$  برابر است با:

$$4 - (-1) = 5$$

اگر رأس سهمی نقطه  $(h, k)$  باشد، معادله آن را به صورت  $y = a(x - h)^2 + k$  می‌توان نوشت. پس:

$$\xrightarrow{(h,k)=(2,-1)} y = a(x - 2)^2 - 1 \quad (1)$$

نقطه  $(3, 2)$  در معادله سهمی صدق می‌کند. پس:

$$2 = a(3 - 2)^2 - 1 \Rightarrow 2 = a - 1 \Rightarrow a = 3 \quad (2)$$

در نتیجه بنابر (1) و (2) داریم:

$$\Rightarrow y = 3(x - 2)^2 - 1$$

که در این صورت عرض از مبدأ آن برابر است با:

$$\xrightarrow{x=0} y = 3(-2)^2 - 1 = 11$$

طبق نمودار، عرض از مبدأ سهمی  $-1$  است. پس  $c = -1$ .

$$y = x^2 + bx - 1$$

رأس سهمی نقطه  $(2, 2b + 2)$  است، پس در معادله سهمی صدق می‌کند:

$$9 + 3b - 1 = 2b + 2 \Rightarrow b = -6$$

پس معادله سهمی به صورت  $y = x^2 - 6x - 1$  است. حال محل برخورد سهمی را با محور طول‌ها به دست می‌آوریم. باید معادله  $x^2 - 6x - 1 = 0$  را حل کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 + 4 = 40$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{40}}{2} = 3 \pm \sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + \sqrt{10} \\ x_2 = 3 - \sqrt{10} \end{cases}$$

طبق نمودار  $\alpha > 0$  است، پس  $\alpha = 3 + \sqrt{10}$ .

طول رأس سهمی برابر است با:

$$x = \frac{-b'}{2a'} = \frac{-2a}{2a} = -1$$

با جای گذاری  $x = -1$  در ضابطه سهمی، عرض رأس آن را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{x=-1} y = a(-1)^2 + 2a(-1) - 3 \Rightarrow y = -a - 3$$

بنابراین مختصات رأس سهمی  $(-1, -a - 3)$  است.

چون رأس سهمی روی نیمساز ناحیه‌های اول و سوم است، پس:

$$\xrightarrow{y=x} -a - 3 = -1$$

$$\Rightarrow -a = 2 \Rightarrow a = -2 \quad (1)$$

مقدار  $a = -2$  را در ضابطه سهمی جای گذاری می‌کنیم.

$$\xrightarrow{a=-2} y = -2x^2 - 4x - 3 \quad \xrightarrow{x=0}$$

محل برخورد سهمی با محور  $y$  ها

$$y = -3 \Rightarrow b = -3 \quad (2)$$

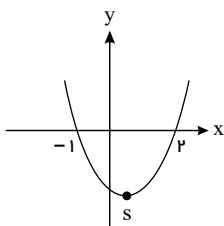
در نتیجه بنابر (1) و (2) داریم:

$$a \times b = (-2)(-3) = 6$$

1 2 3 4 25

با توجه به شکل  $x = 2$  و  $x = -1$  ریشه‌های معادله  $2x^2 + bx + c = 0$  می‌باشند.

از طرفی وسط دو ریشه طول رأس سهمی است پس:



$$x_s = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}$$

از طرفی می‌دانیم در سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  طول رأس سهمی برابر است با:

$$x_s = \frac{-b}{2a}$$

$$x_s = \frac{-b}{2(2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -2$$

$$2x^2 + bx + c = 0 \xrightarrow[x=-1]{b=-2} 2 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -4$$

$$y = cx^2 - x + b \xrightarrow[b=-2]{c=-4} y = -4x^2 - x - 2$$

$$y_s \text{ چند} = \frac{4a'c'}{4a'} = \frac{4(-4)(-2) - (-1)^2}{4(-4)} = \frac{-31}{16}$$

پس:

در نتیجه:

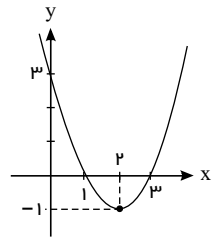
 معادله سهمی به صورت زیر در نظر می‌گیریم؛ داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۶)

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\left. \begin{aligned} (1, 0) \in y = f(x) &\Rightarrow a + b + c = 0 \\ (2, -1) \in y = f(x) &\Rightarrow 4a + 2b + c = -1 \\ (0, 3) \in y = f(x) &\Rightarrow 0 + 0 + c = 3 \Rightarrow c = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a + b &= -3 \\ 4a + 2b &= -4 \end{aligned}$$

 از حل دستگاه  $a = 1$  و  $b = -4$  می‌باشد.

شکل زیر را در نظر بگیرید:



$$y = x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x + 4) - 1 = (x - 2)^2 - 1$$

$$\text{برد: } R_f = [-1, +\infty)$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۲۷)

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta < 0 &\Rightarrow b^2 - 4ac = m^2 - 4\left(\frac{m}{2} + 2\right)\left(\frac{m}{2} - 1\right) < 0 \Rightarrow m^2 - m^2 - 2m + 4 < 0 \Rightarrow m > 4 \quad (1) \\ a > 0 &\Rightarrow \frac{m}{2} + 2 > 0 \Rightarrow m > -4 \quad (2) \end{aligned} \right.$$

در نتیجه:

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} m > 4$$

برای فهم بیشتر شکل زیر را در نظر بگیرید:

(۱) (۲) (۳) (۴) (۲۸)

 طول پاره‌خطی که روی محور  $x$  جدا شده است، ۶ واحد است. چون رأس سهمی وسط پاره‌خط است. پس یک نقطه روی محور  $x$ ها ۳ واحد جلوتر از ۲ و یک نقطه ۳ واحد عقب‌تر از ۲ است.

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 3 = -1 \\ x_2 = 2 + 3 = 5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{معادله سهمی}]{\text{نقطه } (2,3) \text{ در منحنی صدق می‌کند.}} y = a(x+1)(x-5) \rightarrow a(2+1)(2-5) = 3 \Rightarrow -9a = 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}(x+1)(x-5)$$

$$\xrightarrow[\text{عرض از مبدأ}]{\text{عرض از مبدأ}} -\frac{1}{3}(0+1)(0-5) = \frac{5}{3}$$

 اگر محور تقارن یک سهمی خط  $x = h$  باشد، ضابطه سهمی به صورت  $y = a(x-h)^2 + k$  می‌شود: (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۹)

$$h = 1 \Rightarrow y = a(x-1)^2 + k \xrightarrow{\begin{matrix} (2,5) \\ (-1,2) \end{matrix}} \begin{cases} 5 = a(2-1)^2 + k \\ 2 = a(-1-1)^2 + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = a + k \\ 2 = 4a + k \end{cases} \Rightarrow a = 5, k = 0 \xrightarrow{x=0} y = 5$$

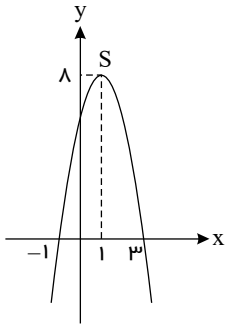
 از آن جایی که سهمی محور طولها را در نقاطی به طولهای ۱- و ۳ قطع می‌کند، معادله آن به صورت زیر است: (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۰)

$$y = a(x+1)(x-3) \xrightarrow{\begin{matrix} 0 \\ 6 \end{matrix} \in \text{سهمی}} 6 = a(0+1)(0-3) = a(1)(-3) \Rightarrow -3a = 6 \Rightarrow a = -2$$

$$y = -2(x+1)(x-3) = -2(x^2 - 2x - 3) \Rightarrow y = -2x^2 + 4x + 6$$



$$\begin{cases} \text{طول رأس سهمی : } x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-2)} = 1 \\ \text{عرض رأس سهمی : } y_s = -2(1)^2 + 4(1) + 6 \\ \quad \quad \quad = -2 + 4 + 6 = 8 \end{cases}$$



پس فاصله رأس سهمی از محور طولها ۸ واحد است و گزینه «ا» صحیح است.

# پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴

۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴

۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴