



مهدی شاکریان

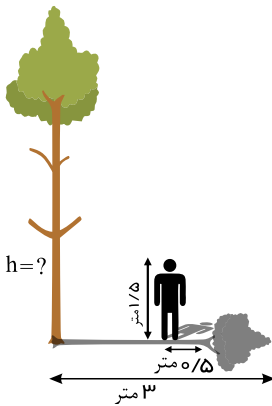
نام آزمون: دهم تمرین های فصل ۲ کتاب

تلفن پنج رقمی: ۰۵۱-۳۸۱۱۷

تلگرام: riazi_jazb

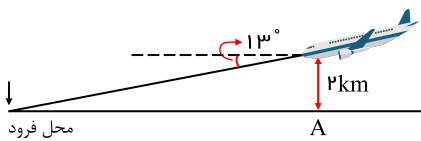
مثلث های متشابه

۱) علی می خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی ۱٫۵ متر و طول سایه او در همان لحظه ۰٫۵ متر است. ارتفاع درخت چقدر است؟
تمرین های کتاب - ۳۴



۲) یک هواپیما در ارتفاع 2 km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله ای از نقطه A فرود می آید.
تمرین های کتاب - ۳۵

$$\tan 13^\circ \simeq 0.23$$



۳) هر یک از زاویه های زیر را روی دایره مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می گیرد.
تمرین های کتاب - ۴۰

الف) $270^\circ +$ ب) 225° پ) $135^\circ -$ ت) 185°

تمرین های کتاب - ۴۱

۴) اگر $\sin \theta$ و $\tan \theta$ هم علامت باشند، آن گاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

تمرین های کتاب - ۴۱

۵) حدود زاویه θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف) $\sin \theta > 0$, $\cos \theta > 0$

ب) $\sin \theta < 0$, $\cos \theta > 0$



تمرین های کتاب - ۴۱

۶ اگر $\sin \alpha \times \cos \alpha < 0$ آن گاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می تواند قرار بگیرد؟ چرا؟

۷ زاویه ای مثل α پیدا کنید به طوری که $\tan \alpha > \cot \alpha$ ، اکنون زاویه ای مثل β پیدا کنید، به طوری که $\cot \beta > \tan \beta$. از این تمرین چه نتیجه ای می گیرید؟

تمرین های کتاب - ۴۱

۸ معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور x ها 45° است و نقطه $(0, 2)$ روی آن قرار دارد.

تمرین های کتاب - ۴۱

نسبت های مثلثاتی (تعریف و خواص)

۹ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه ای داده شده است. سایر نسبت های مثلثاتی را به دست آورید.

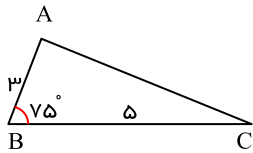
تمرین های کتاب - ۴۱

(الف) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ (در ربع چهارم)

(ب) $\sin \beta = \frac{-1}{2}$ (در ربع سوم)

مساحت مثلث

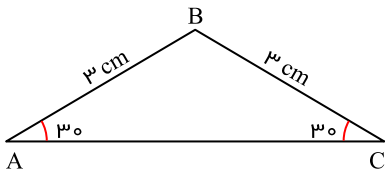
تمرین های کتاب - ۳۵



۱۰ فرض کنید $\sin 75^\circ = 0.96$ ، مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.

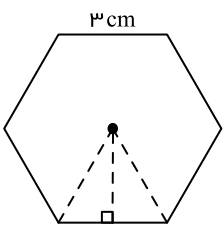
تمرین های کتاب - ۳۵

۱۱ مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



تمرین های کتاب - ۳۵

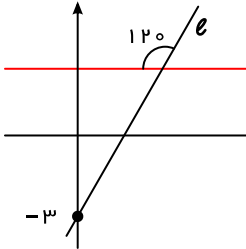
۱۲ مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.



رابطه ی شیب خط و تانژانت زاویه

۱۳ با توجه به شکل زیر، معادله l را به دست آورید.

تمرین های کتاب - ۴۱



روابط بین نسبت های مثلثاتی

۱۴ اگر $\tan \alpha = \frac{-4}{3}$ و α زاویه ای در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

تمرین های کتاب - ۴۵

۱۵ فرض کنید α زاویه ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. نسبت های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

تمرین های کتاب - ۴۵

۱۶ اگر $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آن گاه نسبت های دیگر مثلثاتی زاویه 135° را به دست آورید.

تمرین های کتاب - ۴۵

۱۷ اگر $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، آن گاه نسبت های دیگر مثلثاتی زاویه 24° را به دست آورید.

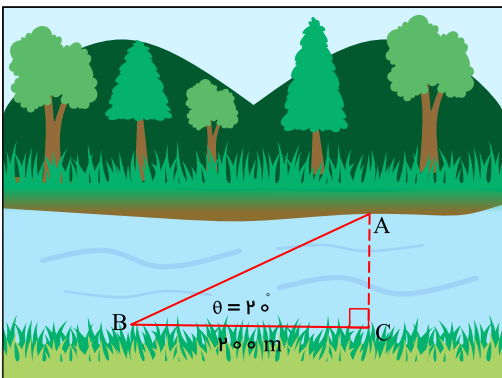
تمرین های کتاب - ۴۵

۱۸ شخصی می خواهد عرض یک رودخانه را اندازه گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه ای چون C و سپس نقطه ای مانند A را در امتداد C و در

طرف دیگر رودخانه مشخص می کند و به اندازه 200 متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می کند تا به نقطه B برسد. اگر زاویه دید این شخص (از نقطه B به نقطه A)، 20° باشد و $\sin 20^\circ = 0.34$ ، او چگونه می تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار بر

تمرین های کتاب - ۴۵

حساب متر بنویسید.)





۱۹) با فرض با معنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

تمرین های کتاب - ۴۶

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad (\text{ب})$$

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x \quad (\text{ت})$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha \quad (\text{پ})$$

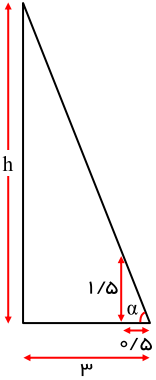
$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \quad (\text{ث})$$

پاسخنامه تشریحی

۱

می‌دانیم: $\tan \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}$

شکل کتاب در این سؤال ایراد داشته و تصحیح شده آن به شکل مقابل است:
با نوشتن $\tan \alpha$ در دو مثلث داریم:

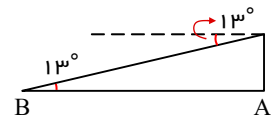


$$\tan \alpha = \frac{1.5}{0.5} = \frac{h}{3} \Rightarrow h = \frac{3 \times 1.5}{0.5} = 9m$$

۲

می‌دانیم: $\tan \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}$

$$\tan 13^\circ = \frac{2}{AB} \Rightarrow 0.23 = \frac{2}{AB} \Rightarrow AB = \frac{2 \times 100}{23} \approx 8.7km$$



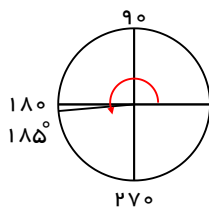
۳

می‌دانیم:

- ربع اول: $0 < \alpha < 90$
- ربع دوم: $90 < \alpha < 180$
- ربع سوم: $180 < \alpha < 270$
- ربع چهارم: $270 < \alpha < 360$

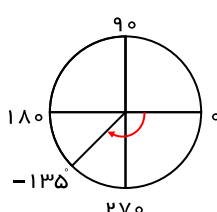
خود زوایای $0, 90, 180, 270$ از ربع‌ها نیستند.

(ت)



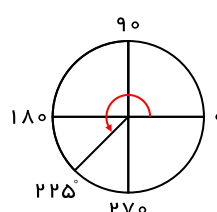
ربع سوم

(پ)



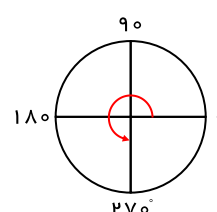
ربع سوم

(ب)



ربع سوم

(الف)



هیچ کدام

می‌دانیم: α ربع اول $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases}$ ربع سوم $\begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$

$\tan \theta$ زمانی اگر هر دو مثبت باشند θ در ربع اول و اگر هر دو منفی باشند θ در ربع سوم است.

می‌دانیم: α ربع اول $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$ ربع دوم $\begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$ ربع سوم $\begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases}$ ربع چهارم $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases}$

(الف) $\begin{cases} \sin \theta > 0 \\ \cos \theta > 0 \end{cases} \Rightarrow$ ربع اول θ

(ب) $\begin{cases} \sin \theta < 0 \\ \cos \theta > 0 \end{cases} \Rightarrow$ ربع چهارم θ



$$I) \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ربع دوم } \alpha \quad II) \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ربع چهارم } \alpha$$

۷

$$\alpha = 60^\circ \Rightarrow \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan 60^\circ > \cot 60^\circ$$

$$\beta = 30^\circ \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cot 30^\circ > \tan 30^\circ$$

نتیجه: در ربع اول زوایایی که از 45° بیشتر باشد تانژانتشان بیش تر از کتانژانتشان است و زوایایی که از 45° کم تر باشد کتانژانتشان بیش تر از تانژانتشان است.

شیب خط، تانژانت زوایای است که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

۸ می‌دانیم:

$$\begin{cases} m = \tan 45 = 1 \\ (0, 2) \end{cases} \Rightarrow y - 2 = 1(x - 0) \Rightarrow y - 2 = x \Rightarrow y = x + 2$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{ربع چهارم } \alpha \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases} \quad \text{ربع سوم } \alpha \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{ربع دوم } \alpha \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{ربع اول } \alpha \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases}$$

۹ می‌دانیم:

الف) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \xrightarrow[\sin \alpha < 0]{\text{ربع چهارم } \alpha} \sin \alpha = \frac{-4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{-4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{-4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} = \frac{-3}{4} = \frac{-3\sqrt{40}}{40}$$

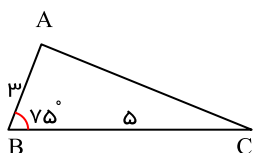
ب) $\sin \beta = \frac{-1}{2}$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta \Rightarrow \cos \beta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$$

$$\cos \beta = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \xrightarrow[\cos \beta < 0]{\text{ربع سوم } \beta} \cos \beta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \beta = \frac{\cot \beta}{\sin \beta} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = \sqrt{3}$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B$$

۱۰ می‌دانیم:

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{96}{100} = 7,2 \text{ cm}^2$$

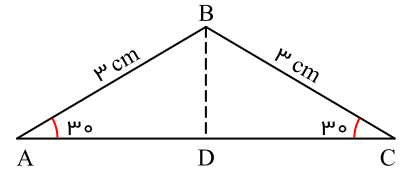


$$\cos \alpha = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \hat{B}$$

می‌دانیم: (11)

با تقسیم مثلث به دو مثلث داریم:



$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDC}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AD}{3} \Rightarrow AD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AD \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

$$S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} \times BC \times CD \times \sin \hat{C} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{8} = \frac{18\sqrt{3}}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

هر ۶ ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin \hat{B}$$

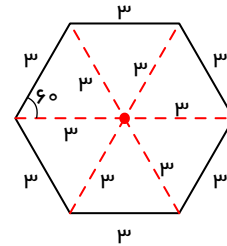
زاویه داخلی n ضلعی منتظم برابر است

$$\theta = \frac{(n-2)}{n} \times 180^\circ$$

می‌دانیم: (12)

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\text{ضلعی ۶}} = 6 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

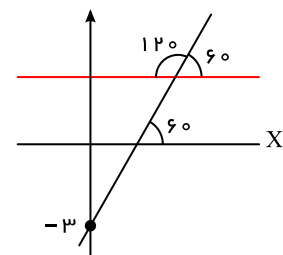


شیب خط، تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد.

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

می‌دانیم: (13)

$$\begin{cases} m = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \\ (0, -3) \end{cases} \Rightarrow y - (-3) = \sqrt{3}(x - 0) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 3$$



$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

می‌دانیم: (14)

$$1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(\frac{-4}{3}\right)^2 = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$$

$$\frac{\text{ربع چهارم}}{\cos \alpha > 0} \rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}$$

$$\frac{\text{ربع چهارم}}{\sin \alpha < 0} \rightarrow \sin \alpha = \frac{-4}{5}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{-4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{می دانیم: } (15)$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{-3}{5}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow[\sin \alpha > 0]{\text{ربع دوم } \alpha} \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{-3}{5}} = \frac{-4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{-3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{-3}{4}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad \text{می دانیم: } (16)$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \xrightarrow[\cos \alpha < 0]{\text{ربع سوم } 135^\circ} \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1, \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{می دانیم: } (17)$$

$$1 + \tan^2 \alpha = 1 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[\cos \alpha < 0]{\text{ربع سوم } \alpha = 240^\circ} \cos \alpha = \frac{-1}{2}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\xrightarrow[\sin \alpha < 0]{\text{ربع سوم } \alpha = 240^\circ} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \tan = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} \quad \text{می دانیم: } (18)$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - (0,34)^2} = \pm \sqrt{1 - 0,1156} = \pm \sqrt{0,8844} = \pm 0,9404$$

$$\xrightarrow[\cos \alpha > 0]{\text{ربع اول } \alpha = 20^\circ} \cos \alpha = 0,9404$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,34}{0,9404} = 0,3615 = \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{20} \Rightarrow AC = 72,3m$$

$$\text{الف) } \frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\text{ب) } \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \times \frac{1 - \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{\cos \theta(1 - \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} = \frac{\cos \theta(1 - \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\cos \theta(1 - \sin \theta)}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\text{پ) } \frac{1 + \tan \theta}{1 + \cot \theta} = \frac{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$



$$\begin{aligned} \text{ت) } 1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} &= \frac{1 + \sin x - \cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x + (1 - \cos^2 x)}{1 + \sin x} = \frac{\sin x + \sin^2 x}{1 + \sin x} \\ &= \frac{\sin x(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)} = \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ث) } \frac{1}{\cos x} - \tan x &= \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} \\ &= \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \end{aligned}$$