



قلم چی - ۱۳۹۹

۱ در یک الگوی خطی، جمله هفتم ۳۱ و جمله دهم  $\frac{8}{5}$  جمله پنجم است. جمله بیستم این الگو کدام است؟

۷۱ (۴)

۶۹ (۳)

۷۰ (۲)

۶۷ (۱)

۲ در یک الگوی خطی با جمله عمومی  $c_n$ ، اگر  $c_{n+1} - c_n = -4$  و جمله یازدهم  $-29$  باشد، آن گاه چندمین جمله دنباله

قلم چی - ۱۳۹۹

برابر  $-65$  است؟

سی و چهارم (۴)

سی ام (۳)

بیست و دوم (۲)

بیستم (۱)

قلم چی - ۱۳۹۹

۳ در یک الگوی خطی جملات پنجم و دوازدهم به ترتیب ۱۲ و ۴۰ می باشند. جمله سی ام این الگو کدام است؟

۱۲۰ (۴)

۱۱۲ (۳)

۱۰۸ (۲)

۱۰۰ (۱)

۴ سی امین جمله الگوی خطی  $17, 21, 25, 29, \dots$  با جمله چندم الگوی خطی  $1999, 1996, 1993, 1990, \dots$  برابر

قلم چی - ۱۳۹۹

است؟

۶۲۵ (۴)

۶۲۴ (۳)

۶۲۳ (۲)

۶۲۲ (۱)

۵ در یک الگوی خطی مجموع جملات سوم و پنجم برابر ۲۸ می باشد. اگر جمله دهم این الگو برابر ۳۲ باشد، جمله پانزدهم این

قلم چی - ۱۳۹۹

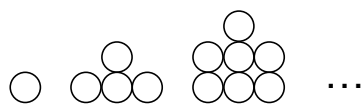
الگو کدام است؟

۴۸ (۴)

۴۶ (۳)

۴۷ (۲)

۴۵ (۱)



قلم چی - ۱۳۹۹

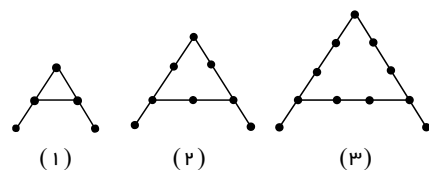
۶ با توجه به الگوی زیر، تعداد دایره ها در مرحله هشتم کدام است؟

۲۳ (۲)

۲۲ (۱)

۲۵ (۴)

۲۴ (۳)



۷ با توجه به الگوی زیر تعداد چوب کبریت ها در شکل دهم کدام است؟ قلم چی - ۱۳۹۹

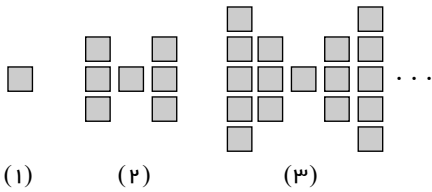
۲۹ (۲)

۳۵ (۱)

۳۰ (۴)

۳۲ (۳)

۸ با توجه به الگوی زیر چند مربع رنگی در شکل دهم وجود دارد؟



قلم چی - ۱۳۹۹

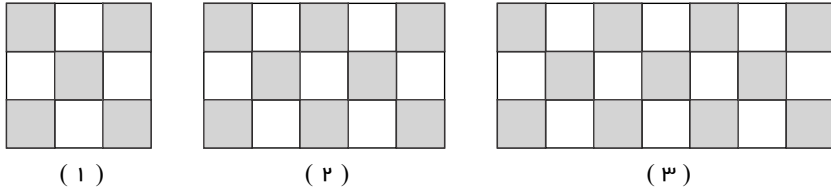
۱۹۷ (۲)

۲۰۷ (۴)

۱۸۷ (۱)

۱۹۹ (۳)

۹ با توجه به الگوی شکل زیر، در مرحله پانزدهم چه کسری از شکل هاشور خورده است؟



قلم چی - ۱۳۹۹

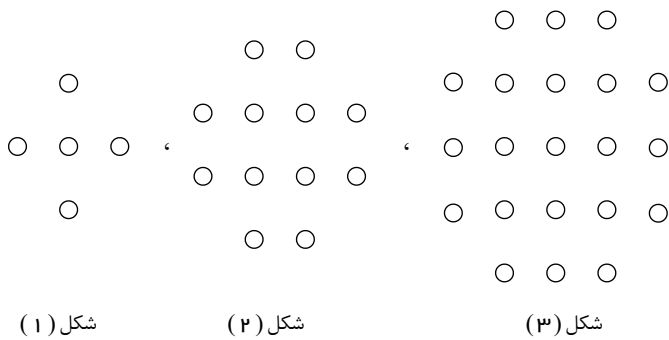
$\frac{46}{93}$  (۱)

$\frac{43}{89}$  (۲)

$\frac{47}{93}$  (۳)

$\frac{44}{89}$  (۴)

۱۰ در الگوی زیر، اختلاف تعداد دایره‌ها در شکل یازدهم و نهم است؟



قلم چی - ۱۳۹۹

۴۲ (۱)

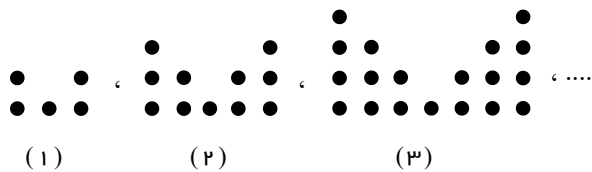
۴۴ (۲)

۴۶ (۳)

۴۸ (۴)

۱۱ در شکل ۹ از الگوی زیر، چند نقطه وجود دارد؟

قلم چی - ۱۳۹۹



۳۰۵ (۱)

۳۴۲ (۲)

۳۷۷ (۳)

۴۱۹ (۴)

۱۲ اگر ۵، ۱۲، ۲۱، ۳۲، ... جمله بیست و یکم این دنباله چند واحد از جمله اول بیشتر است؟

قلم چی - ۱۳۹۹

۵۲۱ (۴)

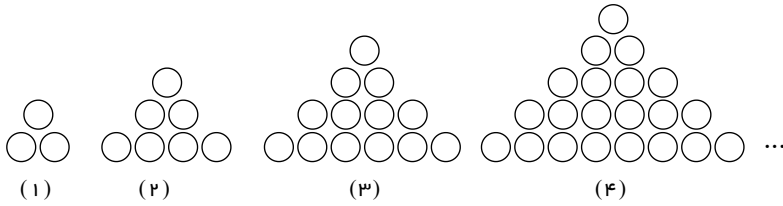
۵۲۰ (۳)

۵۱۹ (۲)

۵۱۸ (۱)

۱۳ با توجه به الگوی زیر، تعداد دایره‌ها در شکل پانزدهم کدام است؟

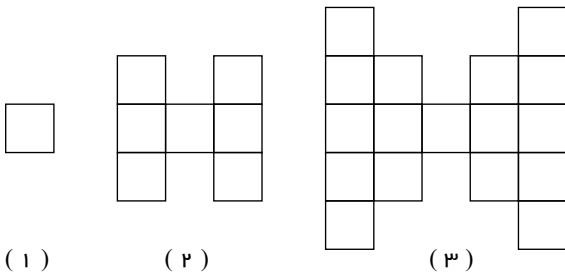
قلم چی - ۱۳۹۹



- ۲۲۱ (۱)
- ۲۴۱ (۲)
- ۲۶۱ (۳)
- ۲۸۱ (۴)

۱۴ با توجه به الگوی زیر تعداد مربع‌های واحد در شکل دهم کدام است؟

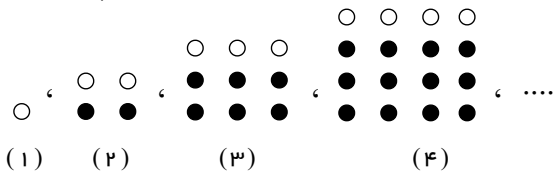
قلم چی - ۱۳۹۹



- ۱۸۵ (۱)
- ۱۹۹ (۲)
- ۱۹۱ (۳)
- ۱۹۵ (۴)

۱۵ با توجه به شکل‌های زیر، نسبت مجموع کل دایره‌های سفید از مرحله ۱ تا ۱۲ به تعداد دایره‌های سیاه مرحله هفتم کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۹

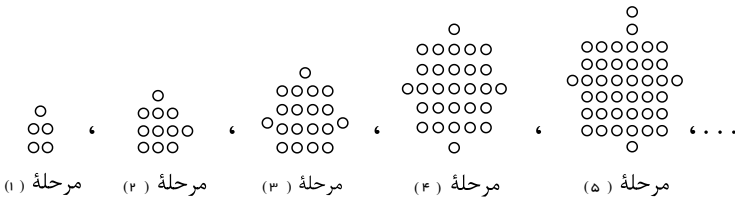


- $\frac{13}{7}$  (۲)
- $\frac{27}{20}$  (۴)

- $\frac{17}{20}$  (۱)
- $\frac{40}{21}$  (۳)

قلم چی - ۱۳۹۹

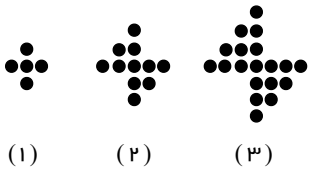
۱۶ با توجه به الگوی زیر، تعداد دایره‌ها در مرحله ۹ کدام است؟



- ۹۲ (۱)
- ۱۰۹ (۲)
- ۸۶ (۳)
- ۷۰ (۴)

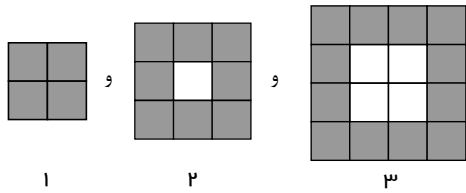
۱۷ با توجه به الگوی زیر، در شکل دهم چند نقطه وجود دارد؟

قلم چی - ۱۳۹۹



- ۱۳۱ (۲)
- ۱۳۲ (۴)

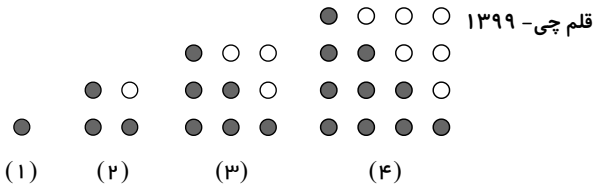
- ۱۲۱ (۱)
- ۱۲۲ (۳)



۱۸ در الگوی زیر، تعداد مربع‌های هاشور خورده در دهمین شکل چندتاست؟

- ۸۱ (۱)
- ۳۰ (۲)
- ۴۰ (۳)
- ۶۴ (۴)

۱۹ با توجه به الگوی زیر، اختلاف تعداد دایره‌های سیاه و سفید در شکل یازدهم کدام است؟



- ۱۰ (۱)
- ۱۱ (۲)
- ۱۲ (۳)
- ۱۴ (۴)

قلم چی - ۱۳۹۹

۲۰ جمله نهم از دنباله  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$  با جمله سوم از کدام دنباله برابر است؟

$d_n = \frac{(-1)^n}{10^n}$  (۴)    
  $c_n = (-1)^n \times \frac{3^{n-1}}{n^2 + 1}$  (۳)    
  $b_n = \frac{10^n - 1}{10^n}$  (۲)    
  $a_n = \frac{n(-1)^{n+1}}{3^n}$  (۱)

قلم چی - ۱۳۹۹

۲۱ اگر جمله  $(2n - 1)$  ام یک دنباله به صورت  $\frac{5n - 6}{(-1)^n + 2n}$  باشد، جمله هفدهم این دنباله کدام است؟

$\frac{79}{34}$  (۴)    
  $\frac{39}{17}$  (۳)    
  $\frac{79}{33}$  (۲)    
  $\frac{39}{18}$  (۱)

قلم چی - ۱۳۹۹

۲۲ جمله دوازدهم دنباله  $1, 3, 6, 10, \dots$  چند واحد از جمله هشتم دنباله  $1, 4, 9, 16, \dots$  بیشتر است؟

۱۴ (۴)    
 ۱۲ (۳)    
 ۱۱ (۲)    
 ۸ (۱)



## پاسخنامه تشریحی

جمله عمومی الگوی خطی را به صورت  $c_n = an + b$  در نظر می‌گیریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱)

جمله هفتم  
 $\rightarrow 31 = a \times 7 + b \Rightarrow 7a + b = 31 \quad (1)$

$$\frac{c_{10}}{c_5} = \frac{a}{a} \Rightarrow \frac{10a + b}{5a + b} = \frac{a}{a} \Rightarrow 50a + 5b = 40a + 10b \Rightarrow 10a = 3b \Rightarrow b = \frac{10}{3}a \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} 7a + \frac{10}{3}a = 31 \Rightarrow 21a + 10a = 93 \Rightarrow 31a = 93 \Rightarrow a = 3 \text{ و } b = \frac{10}{3} \times 3 = 10$$

پس جمله عمومی دنباله خطی برابر با  $c_n = 3n + 10$  می‌شود:

$$\Rightarrow c_{20} = 20 \times 3 + 10 = 70$$

جمله عمومی الگوی خطی به صورت  $c_n = an + b$  است که اختلاف هر دو جمله متوالی همان ضریب  $n$  در  $c_n$  است، پس: (۱) (۲) (۳) (۴) (۲)

$$a = -4, c_{11} = -29 \Rightarrow -4(11) + b = -29$$

$$\Rightarrow b = -29 + 44 = 15 \Rightarrow c_n = -4n + 15$$

$$c_n = -65 \Rightarrow -4n = -65 - 15 = -80 \Rightarrow n = 20$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۳)

$$t_n = an + b \Rightarrow \begin{cases} t_5 = 5a + b \\ t_{12} = 12a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a + b = 12 \\ 12a + b = 40 \end{cases} \Rightarrow \frac{(-1) \times \begin{cases} -5a - b = -12 \\ 12a + b = 40 \end{cases}}{7a = 28 \Rightarrow a = 4}$$

$$5a + b = 12 \Rightarrow 5 \times 4 + b = 12 \Rightarrow b = 12 - 20 = -8$$

$$t_{20} = 20a + b = 20 \times 4 + (-8) = 80 - 8 = 72$$

جمله  $n$ ام الگوی اول  $a_n = 4n + 13$  و جمله  $n$ ام الگوی دوم برابر  $b_n = -3n + 2002$  می‌باشد. پس داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۴)

$$a_n = 4n + 13 \Rightarrow a_{20} = 133$$

$$a_{20} = b_n \rightarrow 133 = -3n + 2002 \Rightarrow 3n = 2002 - 133 \Rightarrow 3n = 1869 \Rightarrow n = 623$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

از آنجایی که الگو خطی است؛ داریم:

$$a_n = bn + c$$

$$a_7 + a_5 = 28 \Rightarrow 3b + c + 5b + c = 28 \Rightarrow 8b + 2c = 28 \xrightarrow{\div 2} 4b + c = 14$$

$$a_{10} = 32 \Rightarrow 10b + c = 32$$

$$\begin{cases} 4b + c = 14 \\ 10b + c = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow a_n = 3n + 2 \Rightarrow a_{15} = 45 + 2 = 47$$

$$\begin{matrix} +3 & +3 \\ \hline 1 & , & 4 & , & 7 & , & \dots \end{matrix}$$

$$2, 4 : \text{تعداد دایره‌ها در محله } 2, 4$$

$$3, 7 : \text{تعداد دایره‌ها در محله } 3, 7$$

در نتیجه داریم:

(۱) (۲) (۳) (۴) (۶)

تعداد دایره‌ها را به صورت یک دنباله می‌نویسیم:



$$(n) \text{ تعداد دایره‌ها در محله } (n) : 3(n-1) + 1 \Rightarrow a_n = 3n - 2 \xrightarrow{n=8} a_8 = 3 \times 8 - 2 = 22$$

1 2 3 4 7

شماره مرحله	1	2	3	...	n
تعداد چوب کبریت‌ها	3(1)+2	3(2)+2	3(3)+2	...	3n+2

$$\Rightarrow a_n = 3n + 2 \xrightarrow{n=10} a_{10} = 3(10) + 2 = 32$$

با توجه به شکل می‌توان متوجه شد که در شکل n ام تعداد مربع‌ها به صورت زیر است: 1 2 3 4 8

$$\begin{aligned} & 1 + 2 \times (3 + 5 + \dots + (2n-1)) \\ &= 2 \times (1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)) - 1 \\ &= 2 \times \left( \frac{2n(2n+1)}{2} - 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \right) - 1 \\ &= 2n(2n+1 - n - 1) - 1 = 2n^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد مربع‌ها در شکل دهم} = 2 \times 10^2 - 1 = 199$$

توجه کنید که برای محاسبه مجموع اعداد فرد کافی است مجموع اعداد زوج 2 تا 2n را از مجموع اعداد 1 تا 2n کم کنیم و همانطور که می‌دانید حاصل جمع اعداد از 1 تا n برابر

$$\text{است با: } \frac{n(n+1)}{2}$$

با توجه به الگو درمی‌یابیم که تعداد کل مربع‌ها و تعداد مربع‌های هاشورخورده در شکل، تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. تعداد کل مربع‌ها در هر مرحله: 1 2 3 4 9

$$9, 15, 21, \dots \Rightarrow a_n = 9 + (n-1) \times 6 = 6n + 3$$

تعداد مربع‌های هاشورخورده در هر مرحله:

$$5, 8, 11, \dots \Rightarrow b_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$$

پس کسرهاشورخورده شکل برابر است با:

$$\text{کسرهاشورخورده شکل در هر مرحله: } \frac{b_n}{a_n} = \frac{3n+2}{6n+3} \xrightarrow{n=15} \frac{3 \times 15 + 2}{6 \times 15 + 3} = \frac{47}{93}$$

با توجه به الگو داریم: 1 2 3 4 10

n شماره شکل	1	2	3
t_n تعداد دایره‌ها	5	12	21

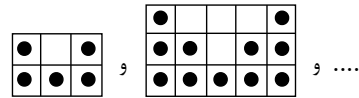
هر شکل از یک مربع n × n و 4 ردیف n تایی تشکیل شده است، پس رابطه t\_n = n^2 + 4n برقرار است:

$$t_{11} = 11^2 + 4 \times 11 = 121 + 44 = 165$$

$$t_9 = 9^2 + 4 \times 9 = 81 + 36 = 117$$

$$\Rightarrow t_{11} - t_9 = 165 - 117 = 48$$

اگر نقطه‌ها را درون یک شبکه مستطیلی شکل در نظر بگیریم، به راحتی می‌توانیم جمله عمومی دنباله را به دست آوریم. 1 2 3 4 11



$$2 \times 3 - 1, 3 \times 5 - 4, \dots, (n+1)(2n+1) - n^2$$

با توجه به جمله عمومی به دست آمده، تعداد نقاط در شکل 19 ام برابر است با:

$$(19+1)(38+1) - 19^2 = 780 - 361 = 419$$

اعداد 5, 12, 21, 32, ... جملات یک دنباله درجه دوم هستند. جمله عمومی این دنباله را به صورت t\_n = an^2 + bn + c در نظر می‌گیریم. 1 2 3 4 12

اگر دنباله‌ای با جملات t\_n = t\_{n+1} - t\_n تشکیل دهیم، نشان می‌دهیم که c\_n یک دنباله حسابی است.

$$c_n = t_{n+1} - t_n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c - (an^2 + bn + c)$$

$$\Rightarrow c_n = an^2 + 2an + a + bn + b + c - an^2 - bn - c = 2an + a + b$$

دنباله c\_n = 2an + a + b یک دنباله حسابی با قدرنسبت 2a و جمله اول 3a + b است. حال با توجه به اعداد داده شده، جملات دنباله c\_n را می‌نویسیم:

$$c_n : 12 - 5, 21 - 12, 32 - 21, \dots \Rightarrow c_n : 7, 9, 11, \dots \Rightarrow \begin{cases} \text{قدرنسبت} = 2 \\ \text{جمله اول} = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \\ 3a + b = 7 \Rightarrow 3 + b = 7 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$



پس  $t_n = n^2 + 4n + c$  است و داریم:

$$t_1 = 5 \Rightarrow 1^2 + 4 \times 1 + c = 5 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow t_n = n^2 + 4n$$

$$\Rightarrow t_{21} = (21)^2 + 4(21) = 441 + 84 = 525$$

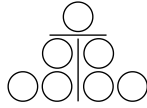
$$\Rightarrow t_{21} - t_1 = 525 - 5 = 520$$

با توجه با الگوی زیر اگر دایره بالایی را از شکل حذف کنیم، داریم:



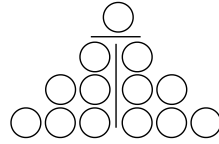
$$2 \times 1 + 1$$

$$2(1) + 1$$



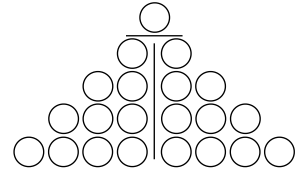
$$2 \times 3 + 1$$

$$2 \times (1 + 2) + 1$$



$$2 \times 6 + 1$$

$$2 \times (1 + 2 + 3) + 1$$



$$2 \times 6 + 1$$

$$2 \times (1 + 2 + 3) + 1$$

در نتیجه جمله عمومی الگو برابر است با:

$$t_n = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 1 = n^2 + n + 1 \xrightarrow{n=15} t_{15} = (15)^2 + 15 + 1 = 225 + 15 + 1 = 241$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

(۱) شکل:  $2 \times (1)^2 - 1$

(۲) شکل:  $2 \times (2)^2 - 1$

(۳) شکل:  $2 \times (3)^2 - 1$

⋮

(n) شکل:  $2 \times (n)^2 - 1$

$$\Rightarrow (10) \text{ شکل: } 2 \times (10)^2 - 1 = 199$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

مرحله	۱	۲	۳	...	n
تعداد دایره‌های سفید	۱	۲	۳	...	n
تعداد کل دایره‌ها	۱	۴	۹	...	$n^2$
تعداد دایره‌های سیاه	۱ - ۱	۴ - ۲	۹ - ۳	...	$n^2 - n$

می‌دانیم: مجموع n عدد طبیعی متوالی برابر است با:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع دایره‌های سفید از مرحله ۱ تا ۱۲} = 1 + 2 + \dots + 12 = \frac{12(12+1)}{2} = 78$$

$$\text{تعداد دایره‌های سیاه مرحله ۷} = 7^2 - 7 = 49 - 7 = 42$$

$$\Rightarrow \text{خواسته سؤال} = \frac{78}{42} = \frac{13}{7}$$

تعداد دایره‌ها در هر مرحله برابر است با: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

(۱) مرحله:  $1 + 2^2 \Rightarrow 1 + (1 + 1)^2$

(۲) مرحله:  $2 + 3^2 \Rightarrow 2 + (2 + 1)^2$

(۳) مرحله:  $3 + 4^2 \Rightarrow 3 + (3 + 1)^2$

⋮

(n) مرحله:  $n + (n + 1)^2$

(۹) مرحله:  $9 + (9 + 1)^2 = 109$

طبق الگو می‌توان نوشت: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷



«۱» تعداد نقطه‌ها در شکل =  $2(1 + 2) - 1 = 5$

«۲» تعداد نقطه‌ها در شکل =  $2(1 + 2 + 3) - 1 = 11$

:

«۱۰» تعداد نقطه‌ها در شکل =  $2(1 + 2 + 3 + \dots + 11) - 1 = 2 \times 66 - 1 = 131$

نکته: اگر  $n$  عدد طبیعی باشد. آن‌گاه داریم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

راه حل اول:

تعداد مربع‌های سفید - تعداد کل مربع‌ها = تعداد مربع‌های هاشور خورده =  $a_n$

$$a_n = (n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n \Rightarrow a_{10} = 4 \times 10 = 40$$

راه حل دوم:

$$a_1 = 4, a_2 = 8, a_3 = 12 \Rightarrow a_n = 4n \Rightarrow a_{10} = 4 \times 10 = 40$$

راه حل اول: تعداد دایره‌های شکل  $n$ ام از رابطه  $n^2$  به دست می‌آید و تعداد دایره‌های سیاه از رابطه  $\frac{n^2+n}{2}$  به دست می‌آید. پس در شکل

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

یازدهم داریم:

$$\text{تعداد کل دایره‌ها} = 11^2 = 121$$

$$\text{تعداد دایره‌های سیاه} = \frac{11^2 + 11}{2} = 66$$

$$\text{تعداد دایره‌های سفید} = 121 - 66 = 55$$

$$11 = 66 - 55 = \text{اختلاف دایره‌های سیاه و سفید}$$

راه حل دوم:

اختلاف دایره‌های سیاه و سفید در هر مرحله برابر تعداد دایره‌های قطر اصلی است که در هر مرحله برابر شماره مرحله است، پس این عدد در مرحله یازدهم برابر با ۱۱ است.

ابتدا جمله سوم هریک از دنباله‌های داده شده در گزینه‌ها را می‌یابیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

$$\text{گزینه ۱: } a_3 = \frac{3(-1)^{3+1}}{3^3} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

$$\text{گزینه ۲: } b_3 = \frac{10^3 - 1}{10^3} = \frac{1000 - 1}{1000} = \frac{999}{1000}$$

$$\text{گزینه ۳: } c_3 = (-1)^3 \times \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} = (-1) \times \frac{9}{10} = -\frac{9}{10}$$

$$\text{گزینه ۴: } d_3 = \frac{(-1)^3}{10^3} = \frac{-1}{1000}$$

در نتیجه:

$$\frac{-1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \Rightarrow -\frac{1}{1+1}, \frac{2}{2+1}, -\frac{3}{3+1}, \dots \Rightarrow t_n = (-1)^n \times \frac{n}{n+1} \Rightarrow t_9 = (-1)^9 \times \frac{9}{9+1} = (-1) \times \frac{9}{10} = -\frac{9}{10}$$

قرار دهیم  $2n - 1 = 17$  و مقدار  $n$  را بیابیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱

$$2n - 1 = 17 \Rightarrow n = 9$$

با جای گذاری  $n = 9$  در دنباله  $\frac{5n - 6}{(-1)^n + 2n}$  جمله هفدهم به دست می‌آید.

$$a_{2(9)-1} = \frac{5(9) - 6}{(-1)^9 + 2(9)} = \frac{39}{17}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲

دنباله مثلثی  $1, 3, 6, 10, \dots \rightarrow$

$$a_n = \frac{n \times (n+1)}{2} \Rightarrow a_{12} = \frac{12 \times 13}{2} = 78$$





دنبالهٔ مربعی  $1, 4, 9, 16, \dots \rightarrow$

$$b_n = n^2 \Rightarrow b_8 = 8^2 = 64 \quad a_{12} - b_8 = 78 - 64 = 14$$

در نتیجه:

# پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴

۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴

۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴

۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴